УДК 519.65

$\boxed{\text{В.В. СКОПЕЦКИЙ}}$, П.С. МАЛАЧИВСКИЙ, Я.В. ПИЗЮР

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЛАДКИМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ СПЛАЙНОМ

Ключевые слова: *гладкий интерполяционный сплайн, интерполирование нелинейным выражением, погрешность приближения, эрмитовая интерполяция.*

ВВЕДЕНИЕ

Гладкий интерполяционный сплайн — это локальный сплайн, в котором приближение на каждом из звеньев определяется из условий интерполирования значений функции и эрмитового интерполирования в крайних точках звена. Особенности построения гладкого интерполяционного сплайна с полиномиальными звеньями описаны в [1]. Такие сплайны используются при решении многих практических задач [1]; в частности, при построении непрерывного и гладкого минимаксного сплайн-приближения с заданной погрешностью имеют место случаи, когда на минимально допустимой длине звена погрешность приближения функции больше заданной [2, 3]. При этом вместо чебышевского приближения применяют интерполирование функции с воспроизведением значений ее производной в крайних точках звена. Гладкие интерполяционные сплайны используются также для приближенного решения дифференциальных уравнений.

Определение. Пусть $f(x) \in C^1[\alpha, \beta]$ и на отрезке $[\alpha, \beta]$ задано значение функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$ в точках $x_i \in [\alpha, \beta]$, $i = \overline{0, s}$, а $F_m(a; x)$ — непрерывно дифференцируемое на $[\alpha, \beta]$ выражение

$$F_m(a; x) = F_m(a_0, a_1, \ldots, a_m; x)$$

от $(m+1)$-го параметра $(m \ge 3)$. Сплайн

$$S(x) = F_m(a^{(j)}, x), \; t_j \le x \le t_{j+1}, \; j = \overline{1, q}, \tag{1}$$

параметры $a^{(j)}$ j-го звена которого определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} f'(x_{k_j}) - F'_m(a^{(j)}; x_{k_j}) = 0, \\ f(x_{k_j+i}) - F_m(a^{(j)}; x_{k_j+i}) = 0, \quad i = \overline{0, m-2}, \\ f'(x_{k_j+m-2}) - F'_m(a^{(j)}; x_{k_j+m-2}) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

будем называть гладким интерполяционным сплайн-приближением функции $f(x)$ на множестве точек x_i $(i = \overline{0, s})$. В этом сплайне q — количество звеньев, а отрезок $[x_{k_j}, x_{k_j+m-2}]$ соответствует j-му звену сплайна, где $k_j = (m-2)(j-1)$, $t_j = x_{k_j}$. В точках соприкосновения звеньев сплайна t_j $(j = \overline{2, q})$ значения функции и ее производной совпадают со значением сплайна и его производной

$$F_m(a^{(j-1)}; t_j) = F_m(a^{(j)}; t_j) = f(t_j), \tag{3}$$

$$F'_m(a^{(j-1)}; t_j) = F'_m(a^{(j)}; t_j) = f'(t_j). \tag{4}$$

© $\boxed{\text{В.В. Скопецкий}}$, П.С. Малачивский, Я.В. Пизюр, 2011

Построение гладкого интерполяционного сплайна (1) с полиномиальными звеньями для непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ сводится к определению коэффициентов полиномов фиксированной степени на каждом из его звеньев из соответствующих систем линейных уравнений вида (2). Гладкие интерполяционные сплайны (1) со звеньями в виде нелинейных по параметрам выражений существуют не всегда. Кроме того, при построении таких сплайнов возникают трудности с определением их параметров, поскольку оно сводится к решению систем нелинейных уравнений [2].

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЛАДКИМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ СПЛАЙНОМ СУММОЙ ПОЛИНОМА И ЭКСПОНЕНТЫ

Построение для функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ гладкого интерполяционного сплайна (1) с нелинейными по параметрам звеньями основывается на применении интерполяции функции $f(x)$ этим выражением с воспроизведением значения ее производной в крайних точках отрезка. Условия существования такой интерполяции для функции $f(x)$ суммой полинома и экспоненты

$$F_m(a;\ x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + Ae^{px},\ \ A \neq 0,\ \ p \neq 0,\ \ m = n+2, \tag{5}$$

установлены в работе [4].

Необходимым и достаточным условием существования эрмитовой интерполяции, непрерывно дифференцируемой на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции $f(x)$ суммой многочлена степени n $(n \geq 1)$ и экспоненты (5) на множестве разных упорядоченных по возрастанию точек x_j $(j = \overline{1, n+1})$, которая воспроизводит значения производной функции в крайних точках x_1 и x_{n+1}, является выполнение неравенств

$$W^{(n)} > 0,\ \ W^{(n)} \neq W_0^{(n)}, \tag{6}$$

где:

$$W_0^{(n)} = \frac{D_{n+1}(s_{n+1};\ z_2,\ z_3, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(s_{n+1};\ z_1,\ z_2, \ldots, z_{n+2})}, \tag{7}$$

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}(f;\ z_2, z_3, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(f;\ z_1,\ z_2, \ldots, z_{n+2})}, \tag{8}$$

$$D_k(U;\ z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k}) = \frac{D_{k-1}(U;\ z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k})}{D_{k-1}(s_{k-1};\ z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k})} -$$

$$- \frac{D_{k-1}(U;\ z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k-1})}{D_{k-1}(s_{k-1};\ z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k-1})},\quad j = \overline{1, n-k+3},\ \ k = \overline{3,\ n+1}, \tag{9}$$

$$D_2(U;\ z_j, z_{j+1}, z_{j+2}) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U;\ z_2, z_3)}{D_1(s_1;\ z_2, z_3)} - U'(z_1), \text{ если } j=1; \\ \dfrac{D_1(U;\ z_{j+1}, z_{j+2})}{D_1(s_1;\ z_{j+1}, z_{j+2})} - \dfrac{D_1(U;\ z_j, z_{j+1})}{D_1(s_1;\ z_j, z_{j+1})}, \text{ если } 1 < j < n+1; \\ U'(z_{n+3}) - \dfrac{D_1(U;\ z_{n+1}, z_{n+2})}{D_1(s_1;\ z_{n+1}, z_{n+2})}, \text{ если } j = n+1, \end{cases} \tag{10}$$

$$D_1(U;z_j,z_{j+1})=\begin{cases}U'(z_1)\,, \text{если} \quad j=1;\\ U(z_{j+1})-U(z_j), \text{если } 1<j\le n+1;\\ U'(z_{n+3})\,, \quad \text{если} \quad j=n+2\,,\end{cases} \tag{11}$$

$$s_k(x)=x^k,$$

$U'(x)$ — производная функции $U(x)$, $z_j=x_{j-1}$ $(j=\overline{2,n+2})$, $z_1=z_2=x_1$, $z_{n+2}=z_{n+3}=x_{n+1}$.

Необходимому и достаточному условию (6) существования на отрезке $[\alpha,\beta]$ интерполяции функции $f\ (x)$ с воспроизведением значения производной функции в крайних точках отрезка выражением (5) удовлетворяют, в частности, непрерывно дифференцируемые до n-го порядка функции, n-я производная которых строго монотонна на $[\alpha,\beta]$, за исключением полинома $(n+1)$-й степени.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет неравенствам (6) на отрезке $[\alpha,\beta]$ и заданы ее значения и значения ее производной в необходимом количестве точек x_i $(i=\overline{1,\ n+1})$, то параметры a_k $(k=\overline{0,\ n})$ и A интерполяции функции $f(x)$ с эрмитовой интерполяцией в крайних точках отрезка выражением (5) на множестве разных, упорядоченных по возрастанию точек x_i $(i=\overline{1,n+1})$ из $[\alpha,\beta]$, определяются по формулам

$$A=D_{n+1}(f;z_1,z_2,\ldots,z_{n+2})/D_{n+1}(\varphi;z_1,z_2,\ldots,z_{n+2}); \tag{12}$$

$$a_k=\frac{D_k(f;\ z_1,\ z_2,\ldots,z_{k+1})-\sum\limits_{i=k+1}^{n}a_iD_k(s_i;z_1,z_2,\ldots,z_{k+1})}{D_k(s_k;\ z_1,\ z_2,\ldots,z_{k+1})}-$$

$$-\frac{AD_k(\varphi;\ z_1,z_2,\ldots,z_{k+1})}{D_k(s_k;\ z_1,\ z_2,\ldots,z_{k+1})},\qquad k=\overline{1,n}; \tag{13}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(f(z_2)+f(z_3)-\sum_{i=1}^{n}a_i(z_2^i+z_3^i)-A(e^{pz_2}+e^{pz_3})\right), \tag{14}$$

где $\varphi(p;x)=e^{px}$, $z_j=x_{j-1}$ $(j=\overline{2,\ n+2})$, $z_1=z_2=x_1$, а $z_{n+2}=z_{n+3}=x_{n+1}$.

Значение параметра p вычисляется как решение уравнения

$$\omega_n(p)=W^{(n)}, \tag{15}$$

при этом

$$\omega_n(p)=\frac{D_{n+1}(\varphi;z_2\,,z_3,\ldots,z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi;z_1,z_2,\ldots,z_{n+2})}.$$

В работе [4] установлено, что левая часть этого уравнения для $\varphi(p;x)=e^{px}$ выступает экспоненциальной функцией, которая имеет вид

$$\omega_n(p)=Ke^{p(\zeta_2-\zeta_1)}, \tag{16}$$

где $K=\dfrac{\tau_3-\tau_2}{\tau_2-\tau_1}$, $\zeta_1\in(z_1,\ z_{n+2})$, $\zeta_2\in(z_2,\ z_{n+3})$.

Учитывая экспоненциальный характер зависимости левой части уравнения (15) от p, его решение целесообразно искать как корень уравнения

$$g_n(p)=V^{(n)}, \tag{17}$$

где $g_n(p)=\ln(\omega_n(p))$, $V^{(n)}=\ln(W^{(n)})$. Решение этого уравнения можно получить с помощью итерационного метода Ньютона

$$p_{i+1}=p_i-\frac{g_n(p_i)-V^{(n)}}{g_n'(p_i)},\ i=0,1,2,\dots, \tag{18}$$

где

$$g_n'(p)=\frac{D_{n+1}(\overline{\varphi};\ z_2,\ z_3,\dots,z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi;\ z_2,z_3,\dots,z_{n+3})}-\frac{D_{n+1}(\overline{\varphi};\ z_1,\ z_2,\dots,z_{n+2})}{D_{n+1}(\varphi;z_1,\ z_2,\dots,z_{n+2})}, \tag{19}$$

$$\overline{\varphi}(p;z)=ze^{pz};\qquad \varphi(p,\ z)=e^{pz};$$

$$p_0=\operatorname{sign}(W^{(n)}-W_0^{(n)})\frac{(n+1)|V^{(n)}|}{z_{n+3}-z_2}. \tag{20}$$

Начальное значение приближения p_0 (20) к искомому корню уравнения (15) определено с учетом левой части уравнения (16). При таком выборе значения p_0 его знак всегда будет совпадать со знаком искомого решения. Совпадение знаков необходимо для обеспечения устойчивости итерационного метода (18), поскольку функция $g_n(p)$ имеет разрыв в точке $p=0$. При таком выборе начального значения p_0 промежуточные значения p_i всегда будут одного знака с искомым решением. При решении тестовых задач итерационный процесс (18) сходился за три–четыре итерации.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГЛАДКИМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ СПЛАЙНОМ

Исследуем точность приближения значений функции $f(x)$ и ее производной на отрезке $[\alpha,\beta]$ гладким интерполяционным сплайном (1). Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема до $(m+1)$-го порядка, т.е. $f^{(m+1)}(x)\in C^{m+1}[\alpha,\beta]$. Поскольку в гладком интерполяционном сплайне (1) на обеих границах каждого звена воспроизводятся значения производной функции $f(x)$, т.е. выполняется условие эрмитовой интерполяции кратности 2, то погрешность приближения функции $f(x)$ на отдельном звене сплайна полиномом $P_m(a;x)$ степени $m\ (m\ge 3)$ определяется по формуле [5]

$$\varepsilon_{m,0}=\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\left(\prod_{i=0}^{m-2}(x-x_{k_j+i})\right)(x-x_{k_j})\,(x-x_{k_j+m-2}),\ \xi\in[x_{k_j},x_{k_j+m-2}]. \tag{21}$$

В случае полиномов степени $m=3$ и $m=4$ сплайн (1) — это классический локальный эрмитовый сплайн [6, 7] с четным $m+1=4$ и нечетным $m+1=5$ количеством параметров в звене. Погрешность приближения функций этими сплайнами на звене, длиной h, исследована в работах [6, 8], и ее значение равно

$$\varepsilon_{3,0}=\frac{h^4}{2^4}\frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!},\ \varepsilon_{4,0}=\frac{h^5}{2\cdot 5^{5/2}}\frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!}, \tag{22}$$

где $\varepsilon_{m,0}$ — погрешность приближения функции полиномиальным эрмитовым сплайном степени m, $h=(x_{k_j+m-2}-x_{k_j})$ — длина звена, а $\xi\in[x_{k_j},x_{k_j+m-2}]$.

Для полинома степени $m\ge 5$ сплайн (1) — это локальный эрмитовый сплайн максимального дефекта, потому что на каждом звене во всех внутренних узлах интерполяции $x_{k_j+i}\quad (i=\overline{1,m-3})$ дефект равен m, а в крайних узлах, на обеих границах звена $[x_{k_j},x_{k_j+m-2}]$, он равен $(m-1)$.

Оценим погрешность приближения функции $f(x)$ на отдельном звене сплайна (1) полиномом пятой степени $P_5(a;x)$. Для этого найдем максимум полинома

$$\omega_6(x)=(x-x_{k_j})^2(x-x_{k_j+1})(x-x_{k_j+2})(x-x_{k_j+3})^2. \tag{23}$$

Максимальное значение полинома (23) достигается в точке $x^*=(x_{k_j}+x_{k_j+3})/2$ и равно

$$\max_{x_{k_j}\le x\le x_{k_j+3}}|\omega_6(x^*)|=\frac{h^6}{2^6 3^2},$$

где $h=x_{k_j+3}-x_{k_j}$. Отсюда максимальная погрешность приближения функции $f(x)$ сплайном (1) с полиномиальными звеньями степени $m=5$ равна

$$\varepsilon_{5,0}=\frac{h^6}{2^6\cdot 3^2}\frac{|f^{(6)}(\xi)|}{6!},\qquad \xi\in[x_{k_j},x_{k_j+3}]. \tag{24}$$

Исследуем точность приближения производной функции $f(x)$ производной гладкого интерполяционного сплайна (1) с полиномиальными звеньями. Для полинома степени $m=3$ функция погрешности имет вид [5]

$$\Delta_3(z)=\frac{(h_1^2-z^2)^2}{4!}f^{(4)}(\xi),\quad \xi\in[x_{k_j},x_{k_j+1}],\ z\in[-h_1,h_1], \tag{25}$$

где $h_1=h/2=(x_{k_j+1}-x_{k_j})/2$. Функция $\Delta_3(z)$ может быть функцией погрешности интерполяции функции $f(x)$ полиномом третьей степени ($m=3$) на отдельном звене гладкого интерполяционного сплайна (1), поскольку ее значения в крайних точках отрезка интерполирования для $z=\pm h_1$ равны нулю с кратностью 2, а внутри отрезка $[-h_1,h_1]$ не принимают нулевых значений $\Delta_3(z)\ne 0$. Производная функции погрешности $\Delta_3(z)$ равна

$$\Delta_3'(z)=\frac{z(z^2-h_1^2)}{3!}f^{(4)}(\xi)+O(h^4). \tag{26}$$

Максимальное значение погрешности приближения производной функции производной сплайна (1) с кубическими полиномиальными звеньями равно

$$\varepsilon_{3,1}=\left|\Delta_3'\left(\pm\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right|=\frac{h^3}{2^2\cdot 3^{3/2}}\frac{|f^{(4)}(\xi)|}{3!},\ \xi\in[x_{k_j},x_{k_j+1}], \tag{27}$$

$z_{1,2}=\pm h/(2\sqrt{3})$ — точки экстремума функции погрешности $\Delta'_3(z)$.

Для полинома степени $m=4$ функция погрешности имеет вид

$$\Delta_4(z)=\frac{(h_1^2-z^2)^2 z}{5!}f^{(5)}(\xi),\ \xi\in[x_{k_j},x_{k_j+2}],\ z\in[-h_1,h_1], \tag{28}$$

где $h_1=h/2=(x_{k_j+2}-x_{k_j})/2$. Функция $\Delta_4(z)$ может быть функцией погрешности интерполяции функции $f(x)$ полиномом четвертой степени на отдельном звене гладкого интерполяционного сплайна (1), поскольку в крайних точках отрезка интерполирования (границах звена) при $z=\pm h_1$ функция $\Delta_4(z)$ и ее производная $\Delta_4'(z)$ принимают нулевое значение, в средней точке звена $x_{k_j+1}=(x_{k_j}+x_{k_j+2})/2$ ее значение равно нулю, а во всех других точках отрезка $[x_{k_j},x_{k_j+2}]$ не принимает нулевых значений $\Delta_4(z)\ne 0$.

Производная функции погрешности $\Delta_4(z)$ имеет вид

$$\Delta'_4(z) = \frac{(z^2 - h_1^2)(5z^2 - h_1^2)}{5!} f^{(5)}(\xi) + O(h^5).$$

Максимум функции $|\Delta'_4(z)|$ достигается в точке $z = 0$ и соответственно погрешность приближения производной равна

$$\varepsilon_{4,1} = |\Delta'_4(0)| = \frac{h^4}{2^4} \frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!}, \ \xi \in [x_{k_j}, x_{k_j+2}]. \tag{29}$$

Для полинома степени $m = 5$ функция погрешности определяется по формуле

$$\Delta_5(z) = \frac{(h_1^2 - z^2)^2 (z^2 - h_1^2/3)}{6!} f^{(6)}(\xi), \ \xi \in [x_{k_j}, x_{k_j+3}], \ z \in [-h_1, h_1],$$

где $h_1 = h/2 = (x_{k_j+3} - x_{k_j})/2$. Функция $\Delta_5(z)$ может быть функцией погрешности для сплайна (1) при $m = 5$, потому что в крайних точках интервала приближения (границах звена) при $z = \pm h_1$ она вместе со своей первой производной превращается в нуль, а также равна нулю в двух внутренних узлах x_{k_j+1} и x_{k_j+2}, т.е. при $z = \pm h_1/3$, во всех других точках отрезка $[x_{k_j}, x_{k_j+3}]$ функция погрешности не принимает нулевых значений: $\Delta_5(z) \neq 0$. Производная функции погрешности $\Delta_5(z)$ определяется по формуле

$$\Delta'_5(z) = \frac{2z(z^2 - h_1^2)\left(3z^2 - \frac{11}{9} h_1^2\right)}{6!} f^{(6)}(\xi) + O(h^6). \tag{30}$$

Максимальное по модулю значение функция $\Delta'_5(z)$ принимает в точках $z = \pm h_1/6$, соответственно наибольшее значение погрешности приближения производной функции $f(x)$ производной гладкого интерполяционного сплайна (1) с полиномиальными звеньями пятой степени равно

$$\varepsilon_{5,1} = \left| \Delta'_5\left(\pm \frac{h}{6}\right) \right| = \frac{2^2 h^5}{3^5} \frac{|f^{(6)}(\xi)|}{6!}, \quad \xi \in [x_{k_j}, x_{k_j+3}]. \tag{31}$$

В случае приближения гладким интерполяционным сплайном (1) погрешность приближения функции $f(x)$ на j-м звене сплайна выражением $F_m(a; x)$ определяется по формуле

$$\varepsilon_{m,0} = \frac{\eta_j(f, F_m)}{(m+1)!} \left(\prod_{i=0}^{m-2} (x - x_{k_j+i}) \right) (x - x_{k_j})(x - x_{k_j+m-2}), \tag{32}$$

где $\eta_j(f, F_m)$ — ядро погрешности приближения функции $f(x)$ выражением $F_m(a; x)$ [9]. Для ядра погрешности приближения функции $f(x)$ сумой полинома и экспоненты (5) на j-м звене сплайна $[x_{k_j}, x_{k_j+m-2}]$ в работе [10] получена формула

$$\eta_j(f, F_m) = f^{(m+1)}(\xi_j) - \frac{(f^{(m)}(\xi_j))^2}{f^{(m-1)}(\xi_j)}, \ \xi_j \in [x_{k_j}, \ x_{k_j+m-2}]. \tag{33}$$

Следовательно, с учетом формул (22), (24) и (25), если $f(x) \in C^{m+1}[\alpha, \beta]$, погрешность приближения функции $f(x)$ на j-м звене гладким интерполяционным сплайном суммой полинома и экспоненты (5) определяется по формуле

$$\varepsilon_{m,0} = Mh^{m+1}\eta_j(f, F_m) \text{ для } m = \overline{3,5}, \tag{34}$$

где

$$M = \frac{1}{2^{2(m-3)-\lambda}(m+1)^{(4+\lambda)/2}(m+1)!}, \quad \lambda = \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ четное,} \\ 0, & \text{если } m \text{ нечетное,} \end{cases}$$

$h = t_{j+1} - t_j$, $\xi_j \in [t_j, t_{j+1}]$, а $\eta_j(f, F_m)$ задается формулой (33).

Соответственно для погрешности приближения производной функции $f(x)$ на j-м звене производной гладкого интерполяционного сплайна суммой полинома и экспоненты справедливы такие оценки:

$$\varepsilon_{3,1} = \frac{h^3}{2^2 3^{3/2}} \frac{\eta_j(f, F_3)}{3!}, \; \varepsilon_{4,1} = \frac{h^4}{2^4} \frac{\eta_j(f, F_4)}{5!}, \; \varepsilon_{5,1} = \frac{4h^5}{3^5} \frac{\eta_j(f, F_5)}{6!}. \tag{35}$$

Поскольку ядро погрешности приближения функции $f(x)$ полиномом степени m равно $(m+1)$-й производной $f^{(m+1)}(x)$ $(\eta(f, P_m) = f^{(m+1)}(x))$, то оценки (34) и (35) справедливы также и для гладкого интерполяционного сплайна с полиномиальными звеньями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построение гладкого интерполяционного сплайна (1) с полиномиальными звеньями для непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ сводится к определению коэффициентов полиномов фиксированной степени на каждом из его звеньев из соответствующих систем линейных уравнений вида (2). Необходимым и достаточным условием существования гладкого интерполяционного сплайна суммой полинома и экспоненты является выполнение неравенств (6). Этому условию удовлетворяют, в частности, функции, непрерывно дифференцируемые до n-го порядка, n-я производная которых строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, за исключением полинома $(n+1)$-й степени. Для определения показателя экспоненты целесообразно применять итерационную формулу (18). Погрешность приближения функции $f(x)$ на j-м звене гладким интерполяционным сплайном определяется по формуле (34), а оценка погрешности приближения производной функции производной сплайна — по формулам (35).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. — М.: Радио и связь, 1985. — 304 с.
2. Малачівський П. Неперервна апроксимація характеристики термодіодного сенсора і його чутливості сумою многочлена й експоненти з нелінійним параметром // Вимірювальна техніка та метрологія. — 2008. — № 69. — С. 84–89.
3. Малачівський П., Пізюр Я., Андруник В. Неперервне й гладке рівномірне сплайн-наближення температурної характеристики сенсора та його чутливості // Там же. — 2007. — № 67. — С. 24–30.
4. Скопецький В.В., Малачівський П.С. Ермітова інтерполяція сумою поліному й нелінійного виразу // Доп. НАН України. — 2010. — № 9. — С. 34–39.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
6. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
7. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. — М.: Наука, 1984. — 352 с.
8. Лигун А.А., Шумейко А.А. Оптимальный выбор узлов при приближении функций сплайнами // Докл. АН УССР. — 1984. — Сер. А, № 6. — С. 18–22.
9. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. — Киев: Наук. думка, 1989. — 272 с.
10. Пізюр Я. Наближення функцій ермітовими сплайнами з експоненціальними ланками // Вісн. Нац. ун-ту «Львівська політехніка». — 2006. — № 566. — С. 68–75.

Поступила 25.06.2010