УДК 519.217; 519.718; 519.837

В.С. КОРОЛЮК, И.В. ЮРЧЕНКО, В.К. ЯСИНСКИЙ

АСИМПТОТИКА ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ СИСТЕМ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ключевые слова: *диффузионные динамические системы с запаздыванием, случайная структура, импульсные внешние возмущения, марковские цепи, устойчивость решения.*

ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость и оптимальная стабилизация для детерминированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с последействием нашли отражение в работах Н.Н. Красовского, А.М. Летова и Э.А. Лидского [1, 2], В.Б. Колмановского, В.Р. Носова и Л.Е. Шайхета [3, 4] и в других публикациях (см. также пристатейные списки литературы).

Возможность учета в дифференциальных уравнениях импульсных возмущений систематически изложена в монографии А.М. Самойленка, Н.А. Перестюка [5], а также предметно изучена не только для дифференциальных уравнений, но и для разностных уравнений в монографии Е.Ф. Царькова, М.Л. Свердана [6].

Влияние марковских возмущений на устойчивость динамических систем описано в [3, 7–17] и в фундаментальной монографии А.В. Скорохода [18]. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры описан в работе И.Я. Каца [19]. Устойчивость автономной динамической системы с быстрым марковским переключением изучалась в работах В.С. Королюка [20–22].

В данной статье рассмотрена и решена задача о поведении импульсной системы при наличии марковских возмущений (параметров), которая обладает свойством асимптотической устойчивости по вероятности в целом (для линейных систем свойством экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом).

Предложенная идея асимптотики решения названной выше задачи основана на методе функций и функционалов Ляпунова [11]. Для динамических систем с последействием эта идея воплощена в работах [3, 6, 12–14, 19].

Настоящая публикация развивает идеи и методы исследования асимптотической устойчивости в целом в интерпретации стохастики импульсных динамических систем, учитывающих марковские возмущения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ДИФФУЗИОННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ИМПУЛЬСНЫХ МАРКОВСКИХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\}, \boldsymbol{P})$ — вероятностный базис [15, 16]; $\{\xi(t), t \geq 0\}$ — феллеровский марковский процесс со значениями в метрическом пространстве $\boldsymbol{Y}$ с переходной вероятностью $\boldsymbol{P}(s, y, t, \Gamma)$; $(\eta_k, \ k \geq 0)$ — феллеровская цепь Маркова со значениями в метрическом пространстве $\boldsymbol{H}$ с переходной вероятностью на k-м шаге $\boldsymbol{P}_k(h, G)$ [17].

Далее, пусть переходной процесс $x \equiv x(t) \in \boldsymbol{R}^m$ случайной динамической системы задан диффузионным дифференциальным уравнением с постоянным запаздыванием (ДДУЗ) [13]

$$dx = a(t, \xi(t), x(t), x(t-\tau))dt + b(t, \xi(t), x(t), x(t-\tau))dw(t) \tag{1}$$

с импульсными марковскими воздействиями

$$\Delta x(t)\Big|_{t=t_k} = g(t_k -, \xi(t_k -), x(t_k -), \eta_k) \tag{2}$$

и с начальным условием

$$x(t_0+\theta) = x_0(\theta) \in \boldsymbol{D}([-\tau, 0], \boldsymbol{R}^m), \xi(t_0) = y \in \boldsymbol{Y},\ \eta_{k_0} = h \in \boldsymbol{H}, \tag{3}$$

где $t_k \in S \equiv \{t_n, n \in \boldsymbol{N}\}\uparrow$; $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, $\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}([-\tau, 0], \boldsymbol{R}^m)$ — пространство Скорохода непрерывных справа функций, имеющих левосторонние границы, $w(t) \equiv w(t, \omega) \in \boldsymbol{R}^m$ — m-мерный винеровский процесс [16].

Здесь вектор $x \equiv x(t) \in \boldsymbol{R}^m$ — отклонения действительных значений координат m-мерного случайного процесса от невозмущенного значения $x(t) \equiv 0\ \forall t \geq 0$. Отметим, что случайное изменение структуры динамической системы для упрощения исследования вызваны введением в число независимых переменных m-мерных коэффициентов $a(t, y, x^1, x^2) : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$, $b(t, y, x^1, x^2)$: $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^m \to M_{m\times m}(\boldsymbol{R})$ (пространство $(m\times m)$ действительных матриц) скалярного чистого разрывного марковского процесса $\xi(t) \in \boldsymbol{R}^1$, допускающего разложение [17]

$$\boldsymbol{P}\{\xi(t+\Delta t) \in (\beta, \beta+\Delta\beta) \,|\, \xi(t) = \alpha \neq \beta\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{P}\{\xi(\tau) = \alpha, t < \tau = t+\Delta t \,|\, \xi(t) = \alpha\} = 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t), \tag{5}$$

$$\alpha, \beta \in \boldsymbol{Y} = [\eta_1, \eta_2].$$

Здесь $\boldsymbol{P}\{A \,|\, B\}$ — условная вероятность события A при выполнении события B; $o(\Delta t)$ — бесконечно малая величина относительно Δt; функции $p(t, \alpha, \beta)$ и $p(t, \alpha)$ предполагаем заданными; $w(t) \equiv w(t, \omega)$ — m-векторный стандартный винеровский процесс [15].

Кроме (4), (5) рассмотрим простую марковскую цепь $\xi(t)$ с конечным числом состояний $\boldsymbol{Y} \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ и известными параметрами $\sum q_{ij} : q_i = \sum\limits_{j\neq i} q_{ij}$, при этом

$$\boldsymbol{P}\{\xi(t+\Delta t) = y_j \,|\, \xi(t) = y_i \neq y_j\} = q_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t),\ i, j = \overline{1, k}. \tag{6}$$

Поскольку в системе (1)–(3) исследуется тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, то правая часть этой системы удовлетворяет условиям

$$a(t, y, 0, 0) \equiv 0,\ b(t, y, 0, 0) \equiv 0_{m\times m}, g(t, y, h, 0) \equiv 0 \tag{7}$$

$$\forall t \geq t_0 \geq 0,\ \forall y \in \boldsymbol{Y},\ \forall h \in \boldsymbol{H}.$$

Предположим, что измеримые по совокупности переменных коэффициенты — отображения $a : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$, $b : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^m \to M_{m\times m}(\boldsymbol{R})$, удовлетворяют по третьему и четвертому аргументам условию Липшица

$$|a(t, y, x^1, y^1) - a(t, y, x^2, y^2)| + \| b(t, y, x^1, y^1) - b(t, y, x^2, y^2) \| \leq$$

$$\leq \Lambda_1[|x^1 - x^2| + |y^1 - y^2|], \tag{8}$$

отображения $g : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ по четвертому аргументу удовлетворяет условию Липшица

$$|g(t, y, h, x^1) - a(t, y, h, x^2)| \leq \Lambda_2 |x^1 - x^2| \tag{8'}$$

равномерно по всем другим аргументам $\forall\, t \ge t_0 \ge 0$, $\forall y \in \boldsymbol{Y}$ $\forall h \in \boldsymbol{H}$, и условию равномерной ограниченности на тривиальном решении $x(t) \equiv 0$ задачи (1)–(3)

$$\sup_{\substack{t \ge 0,\; y \in \boldsymbol{Y},\\ h \in \boldsymbol{H}}} (|a(t, y, 0, 0)| + \| b(t, y, 0, 0)\| + |g(t, y, h, 0)| \equiv \alpha < +\infty \tag{9}$$

$\forall t \ge t_0 \ge 0$, $\forall y \in \boldsymbol{Y}$, $\forall h \in \boldsymbol{H}$.

Определение 1. Случайный процесс $x \equiv x(t, \omega) \in \boldsymbol{R}^m$ назовем сильным решением задачи Коши (1), (3) с импульсным воздействием (2), если $x \in \boldsymbol{R}^m$ согласован с потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \ge t_0 \ge 0\}$; $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, и удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x(s) + \int_s^t a(z, \xi(z), x(z), x(z-\tau))dz + \int_0^t b(z, \xi(z), x(z), x(z-\tau))dw(z) \tag{10}$$

при всех $s \in [t_k, t_{k+1})$; $t \in (s, t_{k+1})$, $t_k \ge t_0$, и при этом

$$x(t_k) = x(t_k -) + g(t_k -, \xi(t_k -), \eta_k, x(t_k -)) \tag{11}$$

при всех $t_k \ge t_0$ и $k \equiv \inf\{n : t_n \ge t_0\}$.

Таким образом, определенные выше условия на отображения a, b и g гарантируют существование сильного решения задачи (1)–(3) согласно определению 1 с точностью до стохастической эквивалентности при $\forall t_0 \ge 0$, $x_0 \in \boldsymbol{R}^m$; $u \in \boldsymbol{R}^r$ и заданных реализациях марковского процесса $\{\xi(t), t \ge t_0\} \subset \boldsymbol{Y}$ и цепи Маркова $\{\eta_k, k \ge k_0\} \subset \boldsymbol{H}$ [13, 18].

Поскольку сильное решение $x \equiv x(t) \in \boldsymbol{R}^m$ однозначно определяется с помощью начальных данных (3), его в дальнейшем удобно обозначать $x(t, t_0, x_0, y, h)$.

Значит, ДДУЗ (1), марковские процессы $\xi(t)$ и η_k, $k \ge k_0$, и начальные условия (3) определяют [13, 17, 18] $(m+2)$-мерный марковский процесс $(x(t), \xi(t), \eta_k)$ в произведении пространств $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H}$. При этом $x \in \boldsymbol{R}^m$ характеризует состояние системы в момент времени t, а $\xi(t)$ и η_k — структуру, в которой находится система в этот же момент времени $t \in S$.

Заметим, что почти все реализации марковских процессов $\xi(t)$ и η_k, $k \ge k_0$, постоянные, а переключения происходят в случайные моменты времени $t^* = t(\omega)$. Поэтому естественно предположить, что на каждом случайном интервале времени $t^* - \tau \le t < t^*$ движение будет происходить в силу системы (1) при фиксированном значении параметра $\xi(t) \equiv y_s$. При этом в момент t^* переключение системы (1) следует задать для нового состояния системы (1) (структуры) начальные условия. Как правило, они выбираются из требований непрерывного продолжения траектории $x \in \boldsymbol{R}^m$ как решения ДДУЗ (1)–(3).

Например [19], случайный параметр $\xi(t)$ может характеризовать упругие свойства системы или силы сопротивления окружающей среды. Другой пример $\xi(t)$ может служить характеристикой случайного скачкообразного изменения массы или геометрического устройства изучаемой системы. Тогда верна теорема об изменении количества движения или кинетического момента, а значит, фазовый вектор $x \in \boldsymbol{R}^m$ должен изменяться скачкообразно.

Для учета приведенных ситуаций будем считать, что для случайного момента времени t^* переключения системы (1) (за счет перехода $\xi(t)$ из состояния $\xi(t^* - 0) = y_i$ в состояние $\xi(t^*) = y_j$, $i \ne j$) задан условный закон распределения начального состояния $x(t^*)$ для изменившейся структуры системы [19]:

$$\boldsymbol{P}\{x(t^*) \in (z, z+dz) \,|\, x(t^* - 0) = x(t^*)\} = p_{ij}(t^*, z/x)dz + o(dz), \tag{12}$$

где $p_{ij}(s, z/x)$ — условная плотность заданного распределения.

Естественно предположить, что почти все реализации процесса $(x(t), \xi(t))$ непрерывны справа. При этом выделим три наиболее часто встречающиеся ситуации [19]:

• если в момент скачка t^* марковского процесса $\xi(t)$ фазовый вектор $x \in \boldsymbol{R}^m$ изменяется непрерывно, то условная плотность равна

$$p_{ij}(t^*, z/x) = \delta(z - x); \tag{13}$$

• если в ситуациях, подобных скачкообразному изменению массы, фазовый вектор изменяется по неслучайному закону $x(t^*) = \varphi_{ij}(x(t^* - 0))$, то

$$p_{ij}(t^*, z/x) = \delta(z - \varphi_{ij}(x)); \tag{14}$$

• по-видимому, наиболее правдоподобно следует принимать в механических задачах линейное условие скачка

$$x(t^*) = K_{ij} \cdot x(t^* - 0), \tag{15}$$

где K_{ij} — заданная $m \times m$-матрица.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ ДДУЗ

Пусть $\boldsymbol{P}_k((y,h), \Gamma \times G)$ — переходная вероятность цепи Маркова $\{\xi(t_k), \eta_k\}$ на k-м шаге. В соответствии с принятыми в теории марковских процессов обозначениями вероятностных событий [17], связанных с этой цепью, присвоим индексы этим вероятностям так, чтобы выполнялись равенства $\boldsymbol{P}_{y,h}^{t_k}(\xi(t_k) \in \Gamma, \eta_k \in G) = \boldsymbol{P}_k((y,h), \Gamma \times G)$ при всех $t_k \geq t_0$, $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}$ и борелевских $\Gamma \subset \boldsymbol{Y}$, $G \subset \boldsymbol{H}$.

Теперь введем функцию [17]

$$\boldsymbol{P}_k((y,h,x), \Gamma \times G \times C) = \boldsymbol{P}_{y,h}^{t_k}(x(t_{k+1}, t_k, y, h, x) \in C,\ \xi(t_{k+1}) \in \Gamma,\ \eta_{k+1} \in G) \tag{16}$$

при всех $t_k \in S \cup \{t_k\}, k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}, x \in \boldsymbol{R}^m$, $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}$ и борелевских $C \subset \boldsymbol{R}^m$, $\Gamma \subset \boldsymbol{Y}$, $G \subset \boldsymbol{H}$.

Определение 2. Дискретный оператор Ляпунова $\boldsymbol{L}v_k(y,h,x)$ на последовательности измеримых скалярных функций $v_k(y,h,x)$: $\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^1$, $k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ для ДДУЗ (1) с импульсным воздействием (2) определяется соотношением

$$\boldsymbol{L}v_k(y,h,x) \equiv \int\limits_{\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{R}^m} \boldsymbol{P}_k(y,h,x)(du \times dz \times dl) v_{k+1}(u,z,l) - v_k(y,h,x). \tag{17}$$

Определение 3. Если $t_k = k\beta$ при всех $k \in \boldsymbol{N}$ и некотором $\beta > 0$ отображения a, b и g не зависят от t, процесс $\xi(t)$ и цепь Маркова ξ_k однородные, то систему (1), (2) назовем автономной.

В случае автономной системы (1), (2) индекс k функции $\boldsymbol{P}_k((y,h,x), \Gamma \times G \times C)$ можно опустить и дискретный оператор Ляпунова следует определить равенством

$$\boldsymbol{L}v(y,h,x) \equiv \int\limits_{\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{D}([-\tau,0])} \boldsymbol{P}(y,h,x)(du \times dz \times dl) v(u,z,l) - v(y,h,x). \tag{18}$$

При развитии второго метода Ляпунова для ДДУЗ (1) с импульсным воздействием (2) понадобятся специальные последовательности функций $v_k(y,h,x)$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Определение 4. Функционалом Ляпунова–Красовского для системы случайной структуры (1), (2) назовем последовательность неотрицательных функций $\{v_k(y, h, x), k \geq 0\}$, если:

1) при всех $k \geq 0$, $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}, x \in \boldsymbol{R}^m$ определено выражение (17);

2) $$\bar{v}(r) \equiv \inf_{\substack{k \in N,\ y \in \boldsymbol{Y} \\ \forall h \in \boldsymbol{H},\ \|x\| \geq r}} v_k(y, h, x) \to \infty \text{ при } r \to \infty; \qquad (19)$$

3) $$\underline{v}(r) \equiv \sup_{\substack{k \in N,\ y \in \boldsymbol{Y}, \\ h \in \boldsymbol{H},\ \|x\| \leq r}} v_k(y, h, x) \to 0 \text{ при } r \to 0, \qquad (20)$$

причем $\bar{v}(r)$ и $\underline{v}(r)$ непрерывны и монотонны.

Заметим, что если речь идет об устойчивости (1)–(3), то будем считать в (9) $\alpha = 0$, и, следовательно, говорить об устойчивости тривиального решения.

Определение 5. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ ДДУЗ (1)–(3) (систему (1)–(3)) назовем:

• устойчивым по вероятности, если $\forall \varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $\| x_0(\theta) \| < \delta$, $-h \leq \theta \leq 0$, следует неравенство

$$\boldsymbol{P}\left\{ \sup_{t \geq t_0} | x(t, t_0, y, x_0, h) | > \varepsilon_1 \right\} < \varepsilon_2 \qquad (21)$$

при всех $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}$ и $t_0 \geq 0$;

• асимптотически устойчивым по вероятности, если выполнено (21) и можно указать такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что для почти всех реализаций, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{t \geq t_0} \boldsymbol{P}\{| x(t, t_0, y, x_0, h) |\} < \delta_1,$$

имеет место соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{P}\{| x(t, t_0, y, x_0, h) |\} = 0 \qquad (22)$$

при всех $t_0 \geq 0$, $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}$ и $\| x_0(\theta) \| < \delta_2$;

• асимптотически стохастически устойчивым, если оно устойчиво по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\lim_{\tau \to \infty} \boldsymbol{P}\{\sup_{t \geq \tau} | x(t, t_0, y, x_0, h) | > \varepsilon\} = 0 \qquad (23)$$

при всех $\| x_0(\theta) \| < \delta_1$, $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}$ и $t_0 \geq 0$.

Определение 6. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ ДДУЗ (1)–(3) (систему (1)–(3)) назовем:

• p-устойчивым (при $p > 0$), если $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $\| x_0(\theta) \| < \delta$ следует неравенство

$$\boldsymbol{E}\{| x(t, t_0, y, x_0, h) |^p\} < \varepsilon \qquad (24)$$

при всех $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}$, $t_0 \geq 0$, $t \geq t_0$, $x_0 \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^m)$ — пространство непрерывных справа вектор-функций, которые имеют левосторонние пределы;

• асимптотически p-устойчивым (при $p > 0$), если оно p-устойчиво и существует такое $\delta_1 > 0$, что из неравенства $\| x_0(\theta) \| < \delta_1$ следует

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{y \in \boldsymbol{Y},\, h \in \boldsymbol{H}} E\{| x(t, t_0, y, x_0, h) |^p\} = 0 \qquad (25)$$

при всех $t_0 \geq 0$, $x_0(\theta) \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^m)$.

Замечание 1. При $p=2$ будем иметь устойчивость в среднем квадратическом (l.i.m) (24) и асимптотическую устойчивость в l.i.m.

Определение 7. Тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ ДДУЗ (1)–(3) (систему (1)–(3)) назовем экспоненциально p-устойчивым при некотором $p>0$, если существует такое $\delta>0$, что из неравенства $\|x_0(\theta)\|<\delta$ следует неравенство

$$\boldsymbol{E}\{|x(t,t_0,y,h,x)|^p\}\le Me^{-\gamma(t-t_0)}\|x_0(\theta)\|^p \tag{26}$$

при некоторых $M>0,\gamma>0$ для $y\in\boldsymbol{Y},\ h\in\boldsymbol{H},\ t_0\ge 0,\ t\ge t_0$.

Замечание 2. Заметим, что при $p=2$ будем иметь экспоненциальную устойчивость в l.i.m.

Замечание 3. Если (22), (23) или (25) выполняется для всех $x_0(\theta)\in\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^m)$, то к соответствующему названию устойчивости будем добавлять выражение «в целом».

3. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ ДДУЗ

Для дальнейших выкладок приведем вначале оценку решения задачи (1), (2) на интервалах (t_k,t_{k+1}) через значения решения в точках t_k, $k\ge 0$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия Липшица (8), (8$'$) и неравенства равномерной ограниченности по третьему и четвертому аргументам для a и b:

$$|a(t,y,x^1,x^2)|+\|b(t,y,x^1,x^2)\|\le\Lambda_1[\|x^1\|+\|x^2\|], \tag{27}$$

и по четвертому аргументу для g:

$$|g(t,y,h,x^1)|\le\Lambda_2\|x^1\| \tag{27$'$}$$

$$\forall\ t\in[0,T],\ y\in\boldsymbol{Y},\ h\in\boldsymbol{H}.$$

Тогда для сильного решения задачи Коши для ДДУЗ (1)–(3) при всех $k\ge 0$ имеет место неравенство

$$\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]}\|x(t+\theta)\|\le(1+\Lambda)\exp\{\Lambda(t_{k+1}-t_k)(|x(t_k)|+|x(t_k-\tau)|+\alpha(t_{k+1}-t_k)). \tag{28}$$

Доказательство. При $\forall t\in[t_k,t_{k+1})$ по определению сильного решения (10), (11) для исходной стохастической задачи Коши (1)–(3) легко записать неравенство

$$\begin{aligned}|x(t)|\le|x(t_k)|&+\int_{t_k}^{t}|a(s,\xi(s),x(s),x(s-h))-a(s,\xi(s),0,0)|\,ds+\\&+\int_{t_k}^{t}|b(s,\xi(s),x(s),x(s-h))-b(s,\xi(s),0,0)|\,ds+\int_{t_k}^{t}|a(s,\xi(s),0,0)|\,ds+\\&+\int_{t_k}^{t}|b(s,\xi(s),0,0)|\,ds\le|x(t_k)|+\alpha(t_{k+1}-t_k)+\Lambda\int_{t_k}^{t}|x(s+\theta)|\,ds.\end{aligned} \tag{29}$$

Учитывая определение нормы $\|x(t+\theta)\|\equiv\sup\limits_{-h\le\theta\le 0}|x(t+\theta)|$, из (29) можно получить

$$\|x(t+\theta)\|\le\|x(t_k+\theta)\|+\alpha(t_{k+1}-t_k)+\Lambda\int_{t_k}^{t}\|x(s+\theta)\|\,ds. \tag{30}$$

Используя лемму Гроноулла, получим

$$\sup_{t_k\le t\le t_{k+1}}\|x(t+\theta)\|\le e^{\Lambda(t_{k+1}-t_k)}(\|x(t_k+\theta)\|+\alpha(t_{k+1}-t_k)). \tag{31}$$

При $t=t_{k+1}$ решение импульсной системы (1)–(3) должно удовлетворять неравенству

$$|x(t_{k+1})| \le |x(t_{k+1}-)| + |g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}-)) - g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, 0)| +$$

$$+|g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, 0)| \le (1+\Lambda)|x(t_{k+1}-)| + \alpha \le$$

$$\le (1+\Lambda) \sup_{t_k \le t \le t_{k+1}} |x(t+\theta)| + \alpha . \qquad (32)$$

С учетом полученных неравенств легко видеть, что справедливо неравенство (28).

Замечание 4. В дальнейшем будем считать, что $\alpha = 0$ в (9), а также что

$$k_0 = \begin{cases} \sup\{k \in \boldsymbol{N} : t_k \le t_0\}, & t_0 \ge t_1, \\ 0, & t \in [0, t_1]. \end{cases} \qquad (33)$$

Теорема 1. Пусть:

1) $0 < |t_{k+1} - t_k| \le \Delta,\ \Delta > 0,\ k \in \boldsymbol{N}$;

2) выполнено условие Липшица (8);

3) существуют последовательности функционалов Ляпунова $\{v_k(y, h, x)\}$ и функционалов $\{a_k(y, h, x)\},\ k \in \boldsymbol{N}$, такие, что в силу системы (1)–(3)

$$(\boldsymbol{L}v_k)(y, h, x) \le -a_k(y, h, x) . \qquad (34)$$

Тогда тривиальное решение ДДУЗ (1)–(3) асимптотически стохастически устойчиво в целом.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_{t_k}$ – минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы $\xi(t)$ при всех $t \in [t_0, t_k]$ и η_n при $n \le k$.

Тогда условное математическое ожидание $\boldsymbol{E}\{\cdot|\mathcal{F}_{t_k}\}$ следует вычислить согласно [17] по формуле

$$E\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\ \eta_{k+1},\ x(t_{k+1}),\ x(t_{k+1}-\tau))|\mathcal{F}_{t_k}\} \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{R}^m} \boldsymbol{P}_k((y, \eta, x)(du \times dz \times dl) v_{k+1}(u, z, l))\Big|_{\substack{y=\xi(t_k) \\ \eta=\eta_k \\ x=x_{t_k}}} . \qquad (35)$$

В этом случае по определению дискретного оператора Ляпунова $(\boldsymbol{L}v_k)(y, h, x)$ из равенства (35), учитывая (34), получим неравенство

$$\boldsymbol{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}), x(t_{k+1}-\tau))|\mathcal{F}_{t_k}\} = v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau)) +$$

$$+\boldsymbol{L}v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau)) \le \bar{v}(|x(t_k)| + |x(t_k-\tau)|) . \qquad (36)$$

В силу леммы 1 с учетом свойств функционала $\bar{v}$ следует существование условного математического ожидания левой части неравенства (36), ибо для нормы $||x(t_k+\theta)||$ выполнено нераванство $||x(t_k+\theta)|| \le \|x\|(1+\Lambda)^{k-k_0} e^{\Lambda(t_{k+1}-t_{k_0})}$, которое при каждом $t_k \ge t_0$ в силу (32) ограничено константой, пропорциональной $\|x\|$, равномерно по $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}$ и $t_0 \ge 0$.

Теперь с учетом (35) на основании решений (1)–(3) можно записать следующее равенство:

$$(\boldsymbol{L}v_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_{k+1}-\tau)) =$$

$$= \boldsymbol{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}), x(t_{k+1}-\tau))|\mathcal{F}_{t_k}\} -$$

$$-v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau)) \le -a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau)) \le 0 . \qquad (37)$$

Тогда при $k \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство

$$\boldsymbol{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}), x(t_{k+1}-\tau))|\mathcal{F}_{t_k}\} \le v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau)) ,$$

а значит, последовательность случайных величин $\{v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau))\}$ при $k \in \boldsymbol{N}$ образует супермартингал относительно $\mathcal{F}_{t_k - \tau}$ [15].

Далее, взяв математическое ожидание от обеих частей неравенства (37) и просуммировав по k от $n \geq k_0$ до N, полученное выражение запишем в виде

$$\boldsymbol{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}), x(t_{N+1}-\tau))\} -$$
$$-\boldsymbol{E}\{v_n(\xi(t_n), \eta_n, x(t_k), x(t_k-\tau))\} = \sum_{k=n}^{N} \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{L}v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau))\} \leq$$
$$\leq -\sum_{k=n}^{N} \boldsymbol{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau))\} \leq 0\,. \tag{38}$$

Поэтому в силу леммы 1 легко записать цепочку неравенств $\forall \varepsilon_1 > 0$:

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{t \geq t_0} |x(t+\theta, t_0, y, h, x)| > \varepsilon_1\right\} = \boldsymbol{P}\left\{\sup_{n \in N} \sup_{t_{k_0+n-1} \leq t \leq t_{k_0+n}} |x(t+\theta, t_0, y, h, x)|\right\} \leq$$
$$\leq \boldsymbol{P}\left\{\sup_{n \in N} (1+\Lambda) e^{\Lambda(t_{k_0+n-1}-t_{k_0+n})} |x(t_{k_0+n-1}+\theta, t_0, y, h, x)| > \varepsilon_1\right\} \leq$$
$$\leq \boldsymbol{P}\left\{\sup_{n \in N} |x(t_{k_0+n-1}+\theta, t_0, y, h, x)| > \frac{\varepsilon_1}{1+\Lambda} e^{-\Lambda\Delta}\right\} \leq$$
$$\leq \boldsymbol{P}\left\{\sup_{n \in N} v_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}, x(t_{k_0+n-1})) \geq \bar{v}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+\Lambda} e^{-\Lambda\Delta}\right)\right\}. \tag{39}$$

Действительно, если $\sup \| x(t_k+\theta) \| \geq r$, то на основании (19) должно выполняться неравенство

$$\sup_{k \geq k_0} v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau)) \geq \inf_{\substack{k \geq k_0,\ y \in \boldsymbol{Y}, \\ h \in \boldsymbol{H}, |x| \geq r}} v_k(y, h, x) = \bar{v}(r)\,. \tag{40}$$

Далее следует воспользоваться известным неравенством для неотрицательных супермартингалов [16, 17] для оценки правой части (39):

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{n \in N} v_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}, x(t_{k_0+n-1}), x(t_{k_0+n-1}-\tau)) \geq \bar{v}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+\Lambda} e^{-\Lambda\Delta}\right)\right\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\bar{v}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+\Lambda} e^{-\Lambda\Delta}\right)} v_{k_0}(y, h, x) \leq \frac{\bar{v}(\|x\|)}{\bar{v}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+\Lambda} e^{-\Lambda\Delta}\right)}\,. \tag{41}$$

С учетом неравенства (39), исходя из (41), можно утверждать, что выполняется (25), а значит, тривиальное решение ДДУЗ (1)–(3) устойчиво по вероятности в целом.

Докажем асимптотическую устойчивость по вероятности в целом для сильного решения ДДУЗ (1)–(3).

Неравенство (38) дает оценки

$$\boldsymbol{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}), x(t_{N+1}-\tau))\} \leq v_{k_0}(y, h, x) -$$
$$-\sum_{k=n}^{N} \boldsymbol{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau))\} \leq v_{k_0}(y, h, x) \tag{42}$$

при всех $N \geq k_0$, $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}, x \in \boldsymbol{R}^m$.

В силу того, что последовательность $\{a_k\}$, $k \in N$, образует функционал Ляпунова, должны существовать непрерывные строго монотонные функции $\underline{a}(r)$ и $\bar{a}(r)$, равные нулю в нуле и такие, что

$$\bar{a}(\|x\|) \leq a_k(y, h, x) \leq \underline{a}(\|x\|) \tag{43}$$

$\forall k \in N$, $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}$ и $x \in \boldsymbol{R}^m$.

Таким образом, из сходимости ряда в левой части неравенства (42) следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \boldsymbol{E}\{\bar{a}(|x(t_k, t_0, y, h, x)|\}$ для $t_0 \ge 0$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}$, $x(t) \in \boldsymbol{R}^m$, $x(t-\tau) \in \boldsymbol{R}^n$. Тогда в силу непрерывности $\underline{a}(r)$ и равенства $\underline{a}(0)=0$ имеем

$$\lim_{k \to \infty} |x(t_k, t_0, y, h, x)| = 0. \tag{44}$$

Из сказанного следует стремление к нулю по вероятности последовательности $\bar{v}(\|x(t_k, t_0, y, h, x)\|)$ при $k \to \infty$ для всех $t_0 \ge 0$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}$, $x(t) \in \boldsymbol{R}^m$, $x(t-\tau) \in \boldsymbol{R}^m$.

Значит, из свойств функционала Ляпунова–Красовского заключаем, что неотрицательный супермартингал $v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))$ при $k \to \infty$ стремится к нулю по вероятности на всех реализациях процесса $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega)$ и последовательности значений цепи Маркова η_k.

Далее, неотрицательный ограниченный сверху супермартингал имеет предел с вероятностью единица [16]. Тогда, используя результат леммы 1, получим асимптотическую стохастическую устойчивость в целом импульсной ДДУЗ (1)–(3) в силу определения 6. ■

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1), 2) теоремы 1, а в силу системы (1)–(3) для последовательности функционалов Ляпунова–Красовского $\{v_k, k \ge 0\}$ имеет место $\boldsymbol{L}v_k(t, y, h, x) < 0$ для $k \in N$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}$, $x \in \boldsymbol{R}^m$. Тогда сильное решение импульсной ДДУЗ (1)–(3) устойчиво по вероятности в целом.

Доказательство. При получении цепочки неравенств (38)–(40) в теореме 1 существенно использовалась неположительность $\boldsymbol{L}v_k$, а не неравенство (34). Поэтому выполнены все условия определения 6 устойчивости тривиального решения ДДУЗ (1)–(3) по вероятности в целом (21). Значит, сильное решение импульсной ДДУЗ (1)–(3) устойчиво по вероятности в целом. ■

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 1, причем функции Ляпунова $\{v_k\}, \{a_k\}, k \ge 0$, удовлетворяют неравенствам для некоторых $p > 0$:

$$c_1 |\varphi(0)|^2 \le v_k(y, h, x(t), x(t-\tau)) \le c_2 \|\varphi(\theta)\|^p, \tag{45}$$

$$c_3 |\varphi(\theta)|^2 \le a_k(y, h, x(t), x(t-\tau)) \le c_4 \|\varphi(\theta)\|^p \tag{46}$$

при $c_i > 0, i = \overline{1, 4}$, и для всех $k \in N$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}$, $x(t) \in \boldsymbol{R}^m$, $x(t-\tau) \in \boldsymbol{R}^m$.

Тогда тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ импульсной ДДУЗ (1)–(3) асимптотически p-устойчиво в целом.

Доказательство. Используя неравенство (37) при $n = k_0$, на основании (45) легко записать неравенство

$$\boldsymbol{E}\{\|x(t_{N+1})\|^p\} \le \frac{1}{c_1} \boldsymbol{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}), x(t_{N+1}-\tau))\} \le$$

$$\le \frac{1}{c_1} \boldsymbol{E}\{v_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, x_0, x_0 - \tau)\} \le \frac{c_2}{c_1} \|x_0\|^p \tag{47}$$

для всех $N \ge k_0, k_0 \in N$, $x_0 \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^m)$ и начальных распределениях случайного вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$. Отсюда по определению 7 непосредственно следует p-устойчивость системы (1)–(3).

Далее, используя неравенства (38), (45) и (46), получаем

$$\sum_{k=k_0}^{N} \boldsymbol{E}\{\|x(t_0)\|^p\} \le \frac{1}{c_3} \sum_{k=k_0}^{N} \boldsymbol{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k - \tau))\} \le$$

$$\le \frac{1}{c_3} \boldsymbol{E}\{v_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, x_0, x_0 - \tau)\} \le \frac{c_4}{c_3} \|x_0\|^p. \tag{48}$$

Это неравенство гарантирует сходимость ряда, членами которого выступают $\boldsymbol{E}\{\|x(t_k)\|^p\}$ для любых начальных данных $x(t_{k_0}+\theta)=x_0(\theta)$ и начальных распределений случайного вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$.

Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in \boldsymbol{Y},\, h\in \boldsymbol{H}} \boldsymbol{E}\{\|x(t_k, t_0, y, h, x_0(\theta))\|^p\}=0$$

при всех $t_0\ge 0$, что и доказывает теорему 3. ■

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 2 и имеет место неравенство (45), то тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ импульсной ДДУЗ (1)–(3) p-устойчиво в целом.

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и существует такое число $\Delta_1>0$, что

$$|t_{k+1}-t_k|\ge \Delta_1 \tag{49}$$

при всех $k\in N$.

Тогда тривиальное решение импульсной системы (1)–(3) экспоненциально p-устойчиво в целом.

Доказательство. В силу неравенства (32) (при $\alpha=0$) достаточно доказать, что неравенство (30) выполняется для всякого $x_0(\theta)\in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^m)$ при всех $t\in S$. Действительно, для $t\in(t_k, t_{k+1})$, $k>n$, из определения (33) для k_0 следует неравенство

$$e^{-\gamma(t_k-t_{k_0})}\le e^{-\gamma(t_k-t_0)}e^{\gamma\Delta}. \tag{50}$$

Воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 1 и доказанным ранее равенством

$$\boldsymbol{E}\{(v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}), x(t_{k+1}-\tau))|\mathcal{F}_{t_k}\}=$$
$$=v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau))+(\boldsymbol{L}v_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau)) \tag{51}$$

для $k\in N$, $t\ge t_0\ge 0$ и всех начальных значений $x_0(\theta)\in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^m)$, $\xi(t_0)\in \boldsymbol{Y}$, $\eta_{k_0}\in \boldsymbol{H}$.

Из условий теоремы 4 следует неравенство

$$(\boldsymbol{L}v_k)(y, h, x)\le -a_k(y, h, x)\le -c_3|x|^p\le -\frac{c_3}{c_2}v_k(y, h, x). \tag{52}$$

Тогда из (50) легко получить неравенство для математического ожидания от условного математического ожидания, а именно:

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}), x(t_{k+1}-\tau))|\mathcal{F}_{t_k}\}\}\le$$
$$\le(1-\frac{c_3}{c_2})\boldsymbol{E}\{v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau))\}. \tag{53}$$

Пусть $k_0\ge 1$, тогда оценка (53) для $k\ge k_0$ примет вид

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{E}\{v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k), x(t_k-\tau))|\mathcal{F}_{t_k}\}\}\le$$
$$\le(1-\frac{c_3}{c_2})^{k-k_0}\boldsymbol{E}\{v_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, x(t_{k_0}), x(t_{k_0}-\tau))\}. \tag{54}$$

Отсюда в силу условий теоремы 4 легко записать

$$\boldsymbol{E}\{\|x(t_k, t_{k_0}, y, h, x_0(\theta))\|^p\}\le\frac{1}{c_1}\boldsymbol{E}\{v(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k, t_{k_0}, y, h, x_0))\}\le$$
$$\le\frac{c_2}{c_1}\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0}\|x_0(\theta)\|^p. \tag{55}$$

Не теряя общности, можно считать $c_2 > c_3$, тогда $\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right) \in (0,1)$.

Осталось воспользоваться неравенством (50), что и доказывает теорему 4. ■

4. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Проиллюстрируем теоретическую часть работы на конкретных стохастических моделях, которые описывают многие реальные системы.

Модельная задача 1. Рассмотрим на вероятностном базисе (Ω, $\mathcal{F}$, $F \equiv \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq t_0 \geq 0\}, \boldsymbol{P}$) линейное ДСДУ с запаздыванием, которое является математической моделью регулируемого объекта, управление которым осуществляется на расстоянии по звуку [10] (например, управление автоматом по звуку на расстоянии) и которое содержит марковский процесс в качестве параметра

$$dx(t) = [\xi(t)x(t) + bx(t-h)]dt + cx(t)dw(t) \tag{56}$$

с начальным условием

$$x(t+\theta)|_{t=0} = \varphi(\theta), \theta \in [-h,0], \tag{57}$$

где b, c — действительные параметры, $h > 0$ — постоянное заданное запаздывание; $\varphi(\theta) \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^1)$ — пространство непрерывных справа функций, имеющих левосторонние пределы (пространство Скорохода [18]); $\xi(t)$ — однородный марковский процесс с двумя состояниями: y_1 и y_2 с переходными вероятностями [19]:

$$\boldsymbol{P}\{\xi(t) = y_j, \xi(s) = y_i\} = q_{ij}(t-s) + o(t-s), \quad i, j = 1,2,$$

$$\boldsymbol{P}\{\xi(z) \equiv y_j, s \leq z \leq 1 | \xi(z) = y_i\} = 1 - q_i(t-s) + o(t-s); \tag{58}$$

где $q_i = \sum\limits_{j \neq i} q_{ij}$. Необходимо определить достаточные условия экспоненциальной p-устойчивости в целом на коэффициенты ДДУЗ с марковским возмущением — параметром, описываемым переходными вероятностями (58).

Решение. Используем стохастический функционал Ляпунова–Красовского [3, 4, 12, 20]

$$v(t, y_k, x(t), x(t-h)) \equiv |y_k| x^2(t) + y_1 b \int\limits_{t-h}^{t} x^2(\theta) d\theta, \tag{59}$$

где $k = 1,2$, а y_1 и b имеют один знак, поскольку $v(t, x(t), x(t-h), y_k) > 0$.

Отметим [12, 19], что слабый инфинитезимальный оператор $\boldsymbol{L}(\cdot)$ для $g(s, \varphi(0))$ в силу ДДУЗ (1)–(3) вычисляется по формуле

$$(\boldsymbol{L}g)(s,\varphi) = \frac{\partial g(s,\varphi(0))}{\partial s} + ((\nabla g)(s,\varphi(0)), a(s,\varphi)) +$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{sp}((\nabla^2 g)(s,\varphi(0)))b(s,\varphi)b^T(s,\varphi) +$$

$$+\sum_{j \neq i}^{k} [v(s, y_j, \varphi(0), \varphi(-h)) - v(s, y_i, \varphi(0), \varphi(-h))] q_{ij}. \tag{60}$$

В данном примере рассматривается частный случай, когда в моменты изменения структуры динамической системы (1), (2) $y_i \to y_j$ решение (1), (2) (фазовый вектор) изменяется непрерывно

$$x(\tau-) = x(\tau) = x. \tag{61}$$

Если же в момент $\tau > t_0$ скачкообразного изменения структуры решение $x(\tau)$ однозначно определяется состоянием, в котором находилась система непосредственно перед изменением структуры, вызванным переходом $\xi(\tau-) = y_j$ в

$\xi(\tau)=y_j \neq y_i$, то будем предполагать $x(\tau)=k_{ij}(x(\tau-)), i\neq j$, где $k_{ij}(\cdot)$ — непрерывная n-векторная функция, причем $k_{ij}(0)=0$.

Тогда в формуле (60) для $\boldsymbol{L}g(\cdot,\varphi)$ четвертое слагаемое имеет вид

$$\sum_{j\neq i}^{k}[v(s,y_j,k_{ij}(x(s-)),k_{ij}(x(s-h-0)))-v(s,y_i,x(s-),x(s-h-0))q_{ij}] .$$

Особый интерес на практике имеет случай, когда $k_{ij}(\cdot)$ — линейная функция. Тогда существует такая матрица k_{ij}, что

$$x(\tau)=k_{ij}x(\tau-) . \tag{62}$$

При этом в частном случае непрерывного изменения решения (1), (2), т.е. выполнения (61), в (62) следует $k_{ij}=I$ (I — единичная диагональная матрица).

Функционалы, которые наиболее часто встречаются в приложениях, имеют вид

$$v(s,\varphi)\equiv\int_{-h}^{0}l(\theta)\boldsymbol{H}(s,\varphi(\theta),\varphi(0))d\theta , \tag{63}$$

где $l\in C'(\boldsymbol{R}_+)$, функционал $\boldsymbol{H}(s,\varphi(\theta),\varphi(0))$ — один раз непрерывно-дифференцированный по $s\in\boldsymbol{R}_+$, дважды непрерывно дифференцированный по третьему аргументу и существуют первая и вторая производные Фреше по второму аргументу.

Тогда в силу ДДУЗ (1), (3) существует $\boldsymbol{L}v(s,\varphi)$ и вычисляется согласно [12, 19] по формуле $(\varphi\equiv\varphi(\theta)\in C([-h,0]))$:

$$\boldsymbol{L}v(s,\varphi)=l(0)\boldsymbol{H}(s,\varphi(0),\varphi(0))-l(-h)\boldsymbol{H}(s,\varphi(-h),\varphi(0))-$$

$$-\int_{-h}^{0}\frac{dl(\theta)}{d\theta}\boldsymbol{H}(s,\varphi(\theta),\varphi(0))d\theta+\int_{-h}^{0}l(\theta)(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{H})(s,\varphi(\theta),\varphi(0))d\theta , \tag{64}$$

где оператор $\boldsymbol{L}_1$ действует на $\boldsymbol{H}(s,\varphi(\theta),\varphi(0))$ по первому и третьему аргументам по правилу (60) при фиксированном втором аргументе.

Исходя из теоретических результатов (формулы (60) и (63)) и вычисления $\boldsymbol{L}v(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ на решениях ДДУЗ (56)–(58) [12, 18], слабый инфинитезимальный оператор (СИО) примет вид квадратичной формы относительно $x(t-h), x(t)$, а именно

$$\boldsymbol{L}v(t,y_k,x(t),x(t-h))=x^2(t)[2y_k|y_k|+by_1+\frac{1}{2}c^2+q_{12}(|y_2|-y_1)+q_{21}(y_1-|y_2|)]-$$

$$-y_1bx^2(t-h)+2x(t)x(t-h)b|y_k| . \tag{65}$$

СИО в силу теоремы 4 для экспоненциальной p-устойчивости в целом требует выполнения условия

$$\boldsymbol{L}v(t,y_k,x(t),x(t-h))<0 . \tag{66}$$

Для выполнения (66) согласно принципу Сильвестра матрица A квадратичной формы (65)

$$A\equiv\begin{bmatrix}-y_1b & b|y_k| \\ b|y_k| & 2y_k|y_k|+by_1+(q_{12}-q_{21})(|y_2|-y_1)+\frac{1}{2}c^2\end{bmatrix}$$

должна быть отрицательно-определенной. Значит, главным минорам матрицы A необходимо менять знак − на +, т.е.

$$\Delta_1\equiv-y_1b<0 ;$$

$$\Delta_2\equiv-y_1b\left[2y_k|y_k|+by_1+\frac{1}{2}c^2+(q_{12}-q_{21})(|y_2|-y_1)\right]-b^2y_k^2>0,\ k=1,2 . \tag{67}$$

Упростив (67), получим достаточные условия экспоненциальной p-устойчивости в целом:

$$y_1\left[2y_k|\,y_k|+by_1+\frac{1}{2}c^2+(q_{12}-q_{21})(|\,y_2|-y_1)\right]<-by_k^2\,,\ \ k=1,2\,. \tag{68}$$

Рассмотрим два случая:

1) пусть $k=1$, тогда условие (68) имеет вид

$$2y_1^2+2by_1+(q_{12}-q_{21})(|\,y_2|-y_1)<0\,. \tag{69}$$

2) пусть $k=2$, тогда условие (68) выразим как

$$2y_2|\,y_2|+by_1+(q_{12}-q_{21})(|\,y_2|-y_1)<-\frac{by_2^2}{y_1}\,. \tag{70}$$

Модельная задача 2. В качестве второй модельной задачи также рассмотрим математическую модель регулируемого объекта, управление которым осуществляется на расстоянии по звуку.

На вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{F}\equiv\{\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F},\, t\ge t_0\ge 0\}, \boldsymbol{P})$ задан случайный процесс линейного ДСДУ вида

$$dx(t)=-[bx(t)+\xi(t)\,x(t-h)]dt+cx(t)dw(t) \tag{71}$$

с начальным условием (57), где b, c, h, φ и $\xi(t)$ такие же, как и в модельной задаче 1.

Необходимо найти b, c и $\xi(t)$ из достаточных условий экспоненциальной p-устойчивости в целом теоремы 4. Эти параметры будут найдены из решения соответствующих неравенств типа (69), (70).

Решение. Используем стохастический функционал Ляпунова–Красовского

$$v(t, y_k, x(t), x(t-h))=|\,y_k|x^2(t)+y_1b\int\limits_{t-h}^{t}x^2(\theta)d\theta\,,\ \ k=1,2\,. \tag{72}$$

Согласно теореме 4 $v\in\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L})$, поскольку $v(t, y_k, x(t), x(t-h))\ge|\,y_k|x^2(t)$ и

$$v(t, y_k, x(t), x(t-h))\le|\,y_k|\,\|x(t+\theta)\|^2+y_1bh\|x(t+\theta)\|^2=\|x(t+\theta)\|^2\,(|\,y_1|+y_1bh)\,,$$

а СИО после вычисления примет вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}v(t, y_k, x(t), x(t-h))&=x^2(t)[-2by_k+by_1+(q_{12}-q_{21})(|\,y_2|-y_1)]-\\&-y_1bx^2(t-h)-2|\,y_k|\,y_kx(t)x(t-h)<0\,.\end{aligned} \tag{73}$$

СИО представляет собой квадратичную форму относительно $x(t), x(t-h)$, которая характеризуется матрицей A квадратичной формы:

$$A=\begin{bmatrix}-y_1b & -y_k|\,y_k|\\ -y_k|\,y_k| & -2b|\,y_k|+by_1+\dfrac{1}{2}c^2+(q_{12}-q_{21})(|\,y_2|-y_1)\end{bmatrix}. \tag{74}$$

Согласно принципу Сильвестра матрица A отрицательно определена, а значит, соответствующая квадратичная форма $\boldsymbol{L}v<0$, если главные ее миноры меняют знак, т.е.

$$\Delta_1\equiv-y_1b<0\,;$$

$$\Delta_2\equiv y_1b[2b|\,y_k|-by_1-(q_{12}-q_{21})(|\,y_2|-y_1)]-y_k^4>0,\ \ k=1,2\,. \tag{75}$$

Упростив это неравенство, получим

$$y_1b[2b|\,y_k|-by_1-(q_{12}-q_{21})(|\,y_2|-y_1)]>y_k^4,\ \ k=1,2\,, \tag{76}$$

что и является достаточным условием экспоненциальной p-устойчивости.

Модельная задача 3. Исследуем на экспоненциальную *p*-устойчивость в целом динамическую систему случайной структуры второго порядка для $t>0$, которую запишем в виде системы ДДУЗ

$$dx(t)=x_1(t)dt\,,$$
$$dx_1(t)=[-a\xi(t)x(t)+bx(t-h)]dt+cx(t-h)dw(t)\,, \tag{77}$$

где a, b, h — положительные константы, которые нужно определить из условия $\boldsymbol{L}v<0$ согласно теореме 4, $\xi(t)$ — однородный марковский процесс с двумя состояниями: y_1, y_2 и переходными вероятностями (58).

Решение. Из результатов монографии [11, с. 123, 133, 134] следует, что тривиальное решение $x(t)\equiv 0$, $x_1(t)\equiv 0$ детерминированной системы второго порядка (система (77) для $y_1 = y_2 = 1$ и $c=0$)

$$dx(t)=x_1(t)dt\,,$$
$$dx_1(t)=[-ax(t)+bx(t-h)]dt \tag{78}$$

асимптотически устойчиво, если выполнены условия

$$2a<2b\,;\ 0<h<\sqrt{\frac{b}{a+2b}}\,.$$

Интересный результат получили В.Б. Колмановский и В.Р. Носов при введении в детерминированную систему (78) второго порядка запаздывания, которое может оказывать стабилизирующее влияние, т.е. система (78) с неасимптотической устойчивостью (для $b=0$) становится асимптотически устойчивой.

Рассмотрим поведение решения $x(t)\equiv 0$, $x_1(t)\equiv 0$ системы ДДУЗ (77) при наличии марковского параметра $\xi(t)$. Для этого введем функционал Ляпунова–Красовского на решениях (77) вида

$$v(x(t+\theta),\, y_k)\equiv |\,y_k|(x^2(t)+x_1^2(t))+y_1 b\int\limits_{t-h}^{t}[x^2(\theta)+x_1^2(\theta)]d\theta\,. \tag{79}$$

СИО вычисляем по формулам (60), (64), которые имеют вид

$$\boldsymbol{L}v(x(t+\theta),\, y_k)\equiv (A(y_i)x(t+\theta),\nabla v(x(t+\theta),\, y_i))+$$
$$+\sum_{j\neq i}^{2}q_{ij}[v(x(t+\theta),\, y_j)-v(x(t+\theta),\, y_i)]\,, \tag{80}$$

где

$$A(y_i)x(t+\theta)\equiv\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -ay(t) & 0 & b+\frac{1}{2}c^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_1(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}. \tag{81}$$

Значит, СИО на решениях $\{x(t), x(t-h), x_1(t)\}$ системы ДДУЗ (77) примет вид

$$\boldsymbol{L}v(x(t+\theta),\, y_k)=2|\,y_k|(1-2ay_k)x_1(t)x(t)+2bx_1(t)x(t-h)|\,y_k|+$$
$$+[q_{12}(|\,y_2|-y_1)+q_{21}(y_1-|\,y_2|)]x^2(t)+y_1 b+\frac{1}{2}c^2x^2(t)-$$
$$-y_1\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)x^2(t-h)+y_1\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)x_1^2(t)-y_1\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)x_1^2(t-h)+$$
$$+[q_{12}(|\,y_2|-y_1)+q_{21}(y_1-|\,y_2|)]x_1^2(t)=$$
$$=\left[y_1\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)+(|\,y_2|-y_1)(q_{12}-q_{21})\right]x^2(t)+$$

$$+\left[y_1(b+\frac{1}{2}c^2)+(|y_2|-y_1)(q_{12}-q_{21})\right]x_1^2(t)-$$

$$-y_1\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)x_1^2(t)-y_1\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)x_1^2(t-h)+$$

$$+2|y_k|(1-2ay_k)x(t)x_1(t)+(2b+c^2)|y_k|x(t-h)x_1(t)<0\,. \qquad (82)$$

СИО $\boldsymbol{L}v(x(t+\theta), y_k)$, который определен с помощью (82), представляет собой квадратичную форму относительно фазовых переменных $x(t), x_1(t)$ и фиктивных переменных $x(t-h), x_1(t-h)$, относительно которых квадратичная форма определена матрицей A, а именно

$$A\equiv\begin{bmatrix} y_1\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)+Q_{12} & |y_k|(1-2ay_k) & 0 & 0 \\ |y_k|(1-2ay_k) & y_1\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)+Q_{12} & b|y_k| & 0 \\ 0 & b|y_k| & -y_1b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_1b \end{bmatrix},$$

где $Q_{12}\equiv(|y_2|-y_1)(q_{12}-q_{21})$.

Матрица A отрицательно определена, а значит, $\boldsymbol{L}v(x(t+\theta), y_k)<0$ тогда и только тогда, когда ее главные миноры изменяют знаки – на + последовательно:

$$\Delta_1\equiv y_1\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)+Q_{12}<0\,,$$

$$\Delta_2\equiv\left(y_1\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)+Q_{12}\right)^2-y_k^2(1-2ay_k)^2>0\,,$$

$$\Delta_3\equiv y_1b\left[y_k^2(1-2ay_k)^2-Q_{12}-\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)y_1\right]-b^2y_k^2\left(y_1\left(b+\frac{1}{2}c^2\right)+Q_{12}\right)<0\,,$$

$$\Delta_4\equiv-\Delta_3\,y_1b>0,\ \ k=1,2\,. \qquad (83)$$

Неравенства (83) — достаточные условия экспоненциальной *p*-устойчивости в целом тривиального решения $x(t)\equiv0$, $x_1(t)\equiv0$ динамической системы ДДУЗ (78).

Отметим следующий факт. В случае возмущения параметра *a* детерминированной системы дискретным марковским процессом $\xi(t)$ с двумя состояниями: y_1 и y_2 методом Ляпунова–Красовского удается получить условия на параметры a, b и c (кроме условия (78) на запаздывание *h*).

Замечание 5. В приведенных выше модельных задачах 1–3 имеет место только внутренний марковский процесс $\xi(t)$ с двумя состояниями: y_1 и y_2. Если ввести внешнее возмущение в виде марковской цепи $\{\eta_k, k\ge0\}$ со значениями в метрическом пространстве $\boldsymbol{H}$ с переходной вероятностью на k-м шаге $\boldsymbol{P}_k(h,G)$, то следует рассмотреть дискретный оператор Ляпунова $\boldsymbol{L}v_k(y,h,x(t),x(t-h))$ на последовательности измеримых скалярных функций v_k в силу (1), определенных соотношением (17). Проверка условий теоремы 4 в этом случае для модельных задач 1–3 приведет к более громоздким выкладкам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Летов А.М. К теории аналитического конструирования регуляторов // Автоматика и телемеханика. — 1962. — № 6. — С. 11–18.
2. Красовский Н.Н., Лидский Э.А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами // Там же. — 1961. — **22**, № 9. — С. 1145–1150; № 10. — С. 1273–1278; № 11. — С. 1425–1431.
3. Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992. — 336 с.
4. Колмановский В. Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.— 448 с.
5. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 287 с.
6. Свердан М.Л., Царьков Е.Ф. Устойчивость стохастических импульсных систем. — Рига: РТУ, 1994. — 300 с.
7. Korolyuk V.S., Limnios W. Stochastic systems in merging Phase Space. — London: World Sci., 2006. — 331 p.
8. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях от параметров. — М.: Наука, 1969. — 369 с.
9. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // ПММ. — 1960. — **24**, вып. 5 — С. 809–823.
10. Горелик Г.С. К теории запаздывающей обратной связи // Журн. техн. физики. — 1939. — **9**(50). — С. 453–464.
11. Колмановский В.Б., Хасьминский Р.З. Устойчивости линейных систем с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. — 1966. — № 4. — С. 59–65.
12. Ясинський В.К., Ясинський Є.В. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. — Київ: Вид-во ТВіМС, 2005. — 586 с.
13. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально функциональные уравнения. — Рига: Ориентир, 1992. — 328 с.
14. Королюк В.С., Мусуривский В.И., Юрченко И.В. Устойчивость динамических систем с последействием с учетом марковских возмущений // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — С. 134–146.
15. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. — М.: Физматгиз, 1994. — Т. 1. — 544 с.
16. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. — М.: Физматгиз, 1994. — Т. 2. — 473 с.
17. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1969. — 859 с.
18. Скороход А.В. Стохастические дифференциально-функциональные уравнения и их применение. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.
19. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной струкутры. — Екатеринбург: Изд-во Урал. госакадемии путей сообщения, 1998. — 222 с.
20. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х т. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. — Чернівці: Золоті литаври, 2009. — 798 с.
21. Королюк В.С. Стабильность автономной динамической системы с быстрым марковским переключением // Докл. АН УССР. Сер.А. — 1990. — № 6. — С. 16–19.
22. Королюк В.С. Устойчивость автономной динамической системы с быстрым марковским переключением // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, № 9. — С. 1176–1181.

Поступила 11.05.2010