СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 519.6

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЛИПТИКО-ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Ключевые слова: *идентификация параметров, градиентные методы, эллиптико-псевдопараболические системы, явные выражения градиентов функционалов-невязок.*

В работах [1–4] на основании результатов теории оптимального управления [5, 6] рассмотрены вопросы построения явных выражений градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами [7] различных параметров параболических, псевдопараболических и эллиптико-параболических многокомпонентных распределенных систем соответственно.

В данной статье аналогичные вопросы рассмотрены для эллиптико-псевдопараболической системы с условиями сопряжения неидеального контакта.

1. ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ/СТОКОВ

Пусть на области $\Omega_{1T} = \Omega_1 \times (0,T)$ определено линейное псевдопараболическое уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} \right) + \bar{a} \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = u_1(x,t), \tag{1}$$

а на области $\Omega_{2T} = \Omega_2 \times (0,T)$ — эллиптическое уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = u_2(x,t), \tag{2}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $k_{ij} = k_{ji}$,

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i \xi_j \le \alpha'_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 ,$$

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\, \xi_i \xi_j \le \alpha'_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 , \quad 0 < \bar{a}_0 \le \bar{a} \le \bar{a}_1 ,$$

$$\alpha_i,\ \alpha'_i,\ \bar{a}_0,\ \bar{a}_1 = \mathrm{const} > 0, \quad i = 0,1;$$

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing, \quad \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \gamma \ne \varnothing; \tag{2$'$}$$

Ω_1, Ω_2 — связные ограниченные строго липшицевы области из R^n.

На границе $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$ $(\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma)$ заданы смешанные краевые условия

$$y|_{\Gamma_{1T}} = \varphi, \tag{3}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\chi(\partial\Omega_1)a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=g,\quad (x,t)\in\Gamma_{2T},\tag{4}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\chi(\partial\Omega_1)a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=-\alpha y+\beta,\quad (x,t)\in\Gamma_{3T},\tag{5}$$

где $\chi(\partial\Omega_1)=1$ при $x\in\partial\Omega_1$, $\chi(\partial\Omega_1)=0$ при $x\notin\partial\Omega_1$, $\Gamma_{iT}=\Gamma_i\times(0,\ T)$, $\Gamma_i\subset\Gamma$, $\Gamma_i\cap\Gamma_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $i,j=\overline{1,3}$, $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{3}\Gamma_i$, $\alpha=\alpha(x)\geq\overline{\alpha}_0=\text{const}\geq 0$, $\alpha,\beta\in L_2(\Gamma_3)$, $g=g(x)\in L_2(\Gamma_2)$, $\varphi\in C(\Gamma_{1T}^i)$, $\Gamma_{1T}^i=\Gamma_1^i\times(0,\ T)$, $\Gamma_1^i=\Gamma_1\cap\partial\Omega_i$, $i=1,2$, ν — орт внешней нормали к Γ.

На участке $\gamma_T=\gamma\times(0,T)$ условия сопряжения составного тонкого прослоя имеют вид

$$R_1\,q_y^-+R_2\,q_y^+=[y]+\delta,\tag{6}$$

$$[q_y]=\omega,\tag{7}$$

где $\delta,\omega\in L_2(\gamma)$, $R_1,R_2\in C(\gamma)$, $R_1,R_2\geq 0$, $0<R_0\leq R_1+R_2<\infty$, $R_0=\text{const}$, $[\varphi]=\varphi^+-\varphi^-$, $\varphi^+=\{\varphi\}^+=\varphi(x,\ t)$ при $(x,\ t)\in\gamma_T^+=(\partial\Omega_2\cap\gamma)\times(0,T)$, $\varphi^-=$ $=\{\varphi\}^-=\varphi(x,\ t)$ при $(x,t)\in\gamma_T^-=(\partial\Omega_1\cap\gamma)\times(0,T)$,

$$q_y=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i),\tag{7$'$}$$

ν — орт нормали к γ, направленной в область Ω_2.

При $t=0$ задано начальное условие

$$y(x,0)=y_0(x),\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2,\tag{8}$$

где $y_0\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i)$, $i=1,2$, $y_0\big|_{\Gamma_1}=\varphi\big|_{\Gamma_1}(0)$.

Предполагаем, что на N $(n-1)$-мерных поверхностях γ_i, разбивающих область Ω на $\overline{N+2}$ связные ограниченные строго липшицевы области Ω_j $(\gamma_i\in\Omega,\ i=\overline{1,N})$, известны следы решения $y=y(x,t)$ начально-краевой задачи (1)–(8):

$$y=f_i(x,t),\quad (x,t)\in\gamma_{iT},\quad i=\overline{1,N},\tag{9}$$

где $\gamma_{iT}=\gamma_i\times(0,T)$, $i=\overline{1,N}$.

Задача (1)–(9) состоит в нахождении функции $u=u(x,t)=(u_1,u_2)\in\mathcal{U}$, при которой решение $y=y(u)=y(u;\ x,t)$ начально-краевой задачи (1)–(8) удовлетворяет равенствам (9), где $\mathcal{U}=L^2(0,T;\ L_2(\Omega_1))\times L^2(0,T;\ L_2(\Omega_2))$.

При решении задачи (1)–(9) вместо классического решения $y=y(u)$ начально-краевой задачи (1)–(8) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 1. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (1)–(8) называется функция $y=y(u)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0=\{v(x):v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1{,}2;\ v\big|_{\Gamma_1}=0\}$ удовлетворяет системе тождеств

$$a_0\left(\frac{\partial y}{\partial t},w\right)+a(y,w)=l(u;w),\quad t\in(0,T),\tag{10}$$

$$y(x,0)=y_0(x),\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2,\tag{11}$$

где $W(0,T)=\left\{ v(x,t): v\in L^2(0,T;\ V),\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\Omega_{1T}} \in L^2(0,T;\ \bar V_1)\right\}$, $V=\{v(x,t)\in \bar V:$ $v|_{\Gamma_{1T}}=\varphi\}$, $\bar V=\{v(x,t): v|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,2,\ t\in(0,T)\}$, $\bar V_1=\{v(x,t):\ v|_{\Omega_1}\in$ $\in W_2^1(\Omega_1),\ t\in(0,T)\}$, $W_2^1(\Omega_i)$ — пространство функций Соболева на области Ω_i, $i=1,2,$

$$a_0(y,w)=\int_{\Omega_1}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}+\bar a y w\right)dx, \tag{11'}$$

$$a(y,w)=\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}dx+\int_{\gamma}\frac{[y][w]}{R_1+R_2}d\gamma+\int_{\Gamma_3}\alpha y w d\Gamma_3, \tag{12}$$

$$l(u;w)=(u,w)+\int_{\gamma}\frac{R_2\omega-\delta}{R_1+R_2}[w]\,d\gamma-\int_{\gamma}\omega w^+\,d\gamma+\int_{\Gamma_2} g w\,d\Gamma_2+\int_{\Gamma_3}\beta w d\Gamma_3 .$$

Исходя из [5, 6], легко установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ начально-краевая задача (1)–(8) имеет единственное обобщенное решение.

Для каждого $u\in\mathcal{U}$ составим функционал-невязку

$$J(u)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^T \rho_i(t)\|A_i u-f_i\|^2_{L_2(\gamma_i)}\,dt, \tag{13}$$

где $Au=\{A_i u\}_{i=1}^N$, $A_i u=y(u;x,t)\big|_{\gamma_{iT}}$, $y=y(u)=y(u;\ x,t)$ — решение задачи (10), (11) при фиксированном $u\in\mathcal{U}$, ρ_i — весовые коэффициенты.

Вместо задачи (1)–(9) будем рассматривать задачу (10), (11), (13), состоящую в нахождении элемента $u\in\mathcal{U}$, который минимизирует на $\mathcal{U}$ значение функционала (13) при ограничениях (10), (11).

Приближение u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (10), (11), (13) находим с помощью итерационного процесса

$$u_{n+1}=u_n-\beta_n p_n,\quad n=0,\ 1,\dots,n^*, \tag{14}$$

начиная с некоторого начального приближения $u_0\in\mathcal{U}$, где направление спуска p_n и коэффициент β_n, следуя [7], определим одним из выражений:

- для метода минимальных ошибок

$$p_n=J'_{u_n},\ \beta_n=\frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}, \tag{15}$$

- для метода скорейшего спуска

$$p_n=J'_{u_n},\ \beta_n=\frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}, \tag{16}$$

- для метода сопряженных градиентов

$$p_n=J'_{u_n}+\gamma_n p_{n-1},\ \gamma_0=0,\ \gamma_n=\frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2},\ \beta_n=\frac{(J'_{u_n},p_n)}{\|Ap_n\|^2}, \tag{17}$$

где $e_n=Au_n-f$, $f=\{f_i\}_{i=1}^N$, J'_{u_n} — градиент функционала $J(u)$ при $u=u_n$.

Для определения каждого приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (10), (11), (13), следуя [1, 8], рассмотрим сопряженную начально-краевую задачу

$$\chi(\Omega_1)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}\right)-\bar{a}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)=0,\quad (x,t)\in\Omega_T\setminus\gamma_{dT},$$

$$\psi|_{\Gamma_{1T}}=0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\partial\Omega_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\Big|_{\Gamma_{2T}}=0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\partial\Omega_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=-\alpha\psi,\quad (x,t)\in\Gamma_{3T},$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\partial\Omega_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=0,\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\partial\Omega_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right\}^{\pm}=\frac{[\psi]}{R_1+R_2},\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$[\psi]=0,\quad \left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\partial\Omega_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=$$

$$=-\rho_l(y(u_n)-f_l),\quad (x,t)\in\gamma_{lT},\quad l=\overline{1,N},$$

$$\psi(x,T)=0,\ x\in\Omega. \tag{18}$$

Определение 2. Обобщенным решением начально-краевой задачи (18) называется функция $\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств

$$-a_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},w\right)+a(\psi,w)=l_\psi(y(u_n);w),\ t\in(0,T), \tag{19}$$

$$\psi|_{t=T}=0,\quad x\in\Omega, \tag{20}$$

где

$$W_d(0,T)=\left\{v(x,t)\in L^2(0,T;\ V_d):\frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{\Omega_{1dT}}\in L^2(0,T;\bar{V}_{1d})\right\},$$

$$V_d=\{v(x,t)\in\bar{V}_d:\ v|_{\Gamma_{1T}}=0,\ [v]|_{\gamma_{jT}}=0,\quad j=\overline{1,N},\quad t\in(0,T)\},$$

$$\bar{V}_d=\{v(x,t):v|_{\Omega_{jd}}\in W_2^1(\Omega_{jd}),\ j=\overline{0,N+1},\quad t\in(0,T)\},$$

$$\bar{V}_{1d}=\{v(x,t):v|_{\Omega_{1jd}}\in W_2^1(\Omega_{1jd}),\ j\in\overline{0,N+1},\ t\in(0,T)\},$$

$$\Omega_{1jd}\in(\Omega_1\setminus\gamma_d),\quad \Omega_{jd}\in(\Omega\setminus\gamma_d),$$

$$\gamma_d=\bigcup_{j=1}^{N}\gamma_j,\quad V_{d_0}=\{v(x):v|_{\Omega_{jd}}\in W_2^1(\Omega_{jd}),\ j=\overline{0,N+1},\ [v]|_{\gamma_j}=0,\ j=\overline{1,N},\ v|_{\Gamma_1}=0\},$$

$$l_\psi(y(u_n);w)=\sum_{j=1}^{N}\rho_j(t)(y(u_n)-f_j,w)_{L_2(\gamma_j)}. \tag{21}$$

Введем обозначения

$$\pi(u,v)=(Y(u)-Y(0),Y(v)-Y(0))_\rho,\quad L(v)=(f-Y(0),Y(v)-Y(0))_\rho, \tag{22}$$

где $Y(v)=\{A_i(v)\}_{i=1}^N$, $(\varphi,\psi)_\rho=\int_0^T\sum_{i=1}^N\int_{\gamma_i}\rho_i\varphi_i\psi_i\,d\gamma_i\,dt$, $f=\{f_i\}_{i=1}^N$. Тогда

$$2J(v)=\pi(v,v)-2L(v)+\|f-Y(0)\|_\rho^2. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle=\lim_{\lambda\to 0}\frac{J(u_n+\lambda\Delta u_n)-J(u_n)}{\lambda}=$$

$$=\pi(u_n,\Delta u_n)-L(\Delta u_n)=(Y(u_n)-f,\ \ Y(u_{n+1})-Y(u_n))_\rho. \tag{24}$$

Выбирая в тождестве (19) вместо функции w разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (10), (11), (20), (24) получаем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle=\int_0^T\left\{-a_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},\ y(u_{n+1})-y(u_n)\right)+a(\psi,\ y(u_{n+1})-y(u_n))\right\}dt=$$

$$=\int_0^T\left\{a_0\left(\frac{\partial}{\partial t}(y(u_{n+1})-y(u_n)),\psi\right)+a(y(u_{n+1})-y(u_n),\psi)\right\}dt=$$

$$=\int_0^T(l(u_{n+1};\ \psi)-l(u_n;\psi))dt=\sum_{i=1}^2\int_0^T\int_{\Omega_i}\Delta u_n^i\psi\,d\Omega_i\,dt. \tag{25}$$

Следовательно,

$$J'_{u_n}=\tilde\psi_n, \tag{26}$$

где $\tilde\psi_n=\{\tilde\psi_n^i\}_{i=1}^2$, $\tilde\psi_n^i=\psi\big|_{\Omega_{iT}}$, $i=1,2$, $\|J'_{u_n}\|^2=\int_0^T\sum_{i=1}^2\int_{\Omega_i}(\tilde\psi_n^i)^2\,d\Omega_i\,dt$.

Наличие градиента J'_{u_n} позволяет использовать градиентные методы (14) для идентификации распределенных источников/стоков.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИСТОЧНИКОВ/СТОКОВ

Рассмотрим задачу (1)–(9), т.е. задачу (10), (11), (13), где составляющие вектор-функции $u=(u_1,u_2)\in\mathcal{U}=C(\Omega_{1T})\times C(\Omega_{2T})$ ищутся в виде

$$u_i(x,t)=\sum_{l=1}^{m_i}\alpha_l^i(t)\varphi_l^i(x),\ \ x\in\Omega_i,\ \ i=1,2,\quad t\in(0,T), \tag{27}$$

где $\{\varphi_l^i(x)\}_{l=1}^{m_i}$ — система линейно независимых функций.

Учитывая (27), на основании (25) получаем $J'_{u_n}=\tilde\psi_n$, где

$$\tilde\psi_n=\{\tilde\psi_n^i\}_{i=1}^2,\ \ \tilde\psi_n^i=\{\tilde\psi_{n_l}^i\}_{l=1}^{m_i},$$

$$\tilde\psi_{n_l}^i=\int_{\Omega_i}\varphi_l^i(x)\,\psi(x,t)\,dx,\ \ \|J'_{u_n}\|^2=\sum_{i=1}^2\sum_{l=1}^{m_i}\int_0^T(\tilde\psi_{n_l}^i)^2\,dt.$$

Замечание 1. Если в задаче (10), (11), (13)

$$u_i(x,t)=\sum_{l=1}^{m_i}\alpha_l\ \varphi_l^i(x,t),\quad i=1,2, \tag{28}$$

где $\{\varphi_l^i(x,t)\}_{l=1}^{m_i}$ — система линейно независимых функций, то на основании (25) получаем

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n, \quad \widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}^i_n\}^2_{i=1}, \widetilde{\psi}^i_n = \{\widetilde{\psi}^i_{n_l}\}^{m_i}_{l=1}, \widetilde{\psi}^i_{n_l} = \int_0^T \int_{\Omega_i} \varphi^i_l(x,t)\, \psi(x,t) d\Omega_i dt,$$

$$\| J'_{u_n} \|^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{l=1}^{m_i} (\widetilde{\psi}^i_{n_l})^2.$$

Замечание 2. На основе (25) можно легко получить выражения представления градиента J'_{u_n} при других предположениях о восстанавливаемых функциях. Например, если $u_1(x,t) \in C(\Omega_{1T})$, а $u_2(x,t) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_l(t)\, \varphi_l(x)$, то $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}^i_n\}^2_{i=1}, \quad \widetilde{\psi}^1_n = \psi\big|_{\Omega_{1T}}, \quad \widetilde{\psi}^2_n = \{\widetilde{\psi}^2_{n_l}\}^m_{l=1}, \quad \widetilde{\psi}^2_{n_l} = \int_{\Omega_2} \varphi_l(x)\, \psi(x,t) d\Omega_2,$$

$$\| J'_{u_n} \|^2 = \int_0^T \int_{\Omega_1} (\widetilde{\psi}^1_n(x,t))^2 \, d\Omega_1 dt + \sum_{l=1}^{m} \int_0^T (\widetilde{\psi}^2_{n_l})^2 dt.$$

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРА СЛАБОПРОНИЦАЕМОГО ПРОСЛОЯ

Пусть на области Ω_{1T} определено линейное псевдопараболическое уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} \right) + \bar{a} \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = f_1, \tag{29}$$

а на области Ω_{2T} — эллиптическое уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = f_2. \tag{30}$$

На границе Γ_T заданы смешанные краевые условия (3)–(5). На участке γ_T условия сопряжения слабопроницаемого прослоя имеют вид

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) \right] = 0, \tag{31}$$

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) \right\}^{\pm} = u[y]. \tag{32}$$

При $t = 0$ задано начальное условие (8).

Предполагаем, что на N $(n-1)$-мерных поверхностях γ_i известны следы решения начально-краевой задачи (29)–(32), (3)–(5), (8), заданные равенствами (9). Полученная задача (29)–(32), (3)–(5), (8), (9) состоит в определении функции $u \in \mathcal{U} = C_+(\gamma_T) = \{v(x,t) \in C(\gamma_T) : v > 0\}$, при которой решение $y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (29)–(32), (3)–(5), (8) удовлетворяет равенствам (9).

Определение 3. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (29)–(32), (3)–(5), (8) называется функция $y(u; x, t) \in W(0,T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}, w \right) + a(u;\, y, w) = l(w), \quad t \in (0,T), \tag{33}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \tag{34}$$

где множества $W(0,T), V_0$, форма $a_0(\cdot,\cdot)$ определены в разд. 1,

$$a(u;y,w)=\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}dx+\int_{\gamma}u[y][w]\,d\gamma+\int_{\Gamma_3}\alpha yw d\Gamma_3,$$

$$l(w)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}f_i(x,t)\,w(x)dx+\int_{\Gamma_2}gw\,d\Gamma_2+\int_{\Gamma_3}\beta wd\Gamma_3. \tag{35}$$

Функционал-невязка определен выражением (13). Задачу (13), (33), (34) будем решать с помощью градиентных методов (14).

Для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ рассматриваемой задачи используется сопряженная задача вида (18), в которой вместо второго ограничения на участке γ_T имеем

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right\}^{\pm}=u_n[\psi],\quad (x,t)\in\gamma_T.$$

Для полученной начально-краевой задачи обобщенная задача состоит в определении функции $\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет равенствам

$$-a_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},w\right)+a(u_n;\psi,w)=l_\psi(y(u_n);w),\quad t\in(0,T), \tag{36}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0,\ \ x\in\Omega, \tag{37}$$

где множества $W_d(0,T)$, V_{d_0} и форма $l_\psi(\cdot,\cdot)$ определены в разд. 1.

Пренебрегая членами второго порядка малости, на основе задачи (33), (34) получим задачу определения функции $\widetilde{y}(u_{n+1};x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$a_0\left(\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t},w\right)+a(u_n;\widetilde{y},w)=l(w)-\int_{\gamma}\Delta u_n[y(u_n)][w]\,d\gamma,\quad t\in(0,T), \tag{38}$$

$$\widetilde{y}\big|_{t=0}=y_0,\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2. \tag{39}$$

Следовательно, $\widetilde{y}(u_{n+1})=y(u_n)+\theta$, где $\theta(x,t)$ — функция из $W_0(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$a_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial t},w\right)+a(u_n;\theta,w)=l_\theta(\Delta u_n;w],\ \ t\in(0,T), \tag{40}$$

$$\theta|_{t=0}=0,\quad x\in\overline{\Omega}. \tag{41}$$

Здесь $l_\theta(\Delta u_n;w)=-\int_{\gamma}\Delta u_n[y(u_n)][w]\,d\gamma$.

Введем обозначения

$$\pi(u,v)=(Y(u)-Y(u_n),\ Y(v)-Y(u_n))_\rho,$$

$$L(v)=(\bar{f}-Y(u_n),\ Y(v)-Y(u_n))_\rho, \tag{42}$$

где $Y(v)=\{A_iv\}_{i=1}^{N}$, $\bar{f}=\{f_i\}_{i=1}^{N}$. Тогда

$$2J(v)=\pi(v,v)-2L(v)+||\bar{f}-Y(u_n)||_\rho^2. \tag{43}$$

Пусть $u_n+\Delta u_n\in\mathcal{U}$. Тогда $\forall\lambda\in(0,\ 1)$ имеет место $u_n+\lambda\Delta u_n\in\mathcal{U}$,

$$y(u_n+\lambda\Delta u_n)\approx\widetilde{y}(u_n)+\lambda y_0(\Delta u_n), \tag{44}$$

где $y_0(\Delta u_n)=\theta$ — решение задачи (40), (41) при $u=u_n$. Поскольку

$$\lambda y_0(\Delta u_n)=\lambda(\widetilde{y}\,(u_{n+1})-y(u_n)),$$

имеем

$$Y(u_n+\lambda\Delta u_n)-Y(u_n)\approx\lambda(\widetilde{Y}\,(u_{n+1})-Y(u_n)), \tag{45}$$

где $\widetilde{Y}\,(u_{n+1})=\{\widetilde{y}_i\,(u_{n+1};x,t)\}_{i=1}^N,\quad \widetilde{y}_i\,(u_{n+1};x,t)=\widetilde{y}\,(u_{n+1};x,t)\big|_{\gamma_{iT}}$.

С учетом (42)–(45) получаем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle=\lim_{\lambda\to 0}\frac{J(u_n+\lambda\Delta u_n)-J(u_n)}{\lambda}\approx(Y(u_n)-\bar{f},\ \widetilde{Y}\,(u_{n+1})-Y(u_n))_\rho. \tag{46}$$

Выбирая в тождестве (36) вместо функции w разность $\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (40), (41), (46) имеем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle\approx\int_0^T\left\{-a_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)\right)+a(u_n;\psi,\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))\right\}dt\approx$$

$$\approx-\int_0^T\int_\gamma\Delta u_n[y(u_n)][\psi]\,d\gamma dt,$$

или

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle\approx-\int_0^T\int_\gamma\Delta u_n[y(u_n)][\psi]\,d\gamma dt. \tag{47}$$

Следовательно, $J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n=-[y(u_n)][\psi]|_{\gamma T}\,,\ \ ||J'_{u_n}||^2\approx\int_0^T\int_\gamma\widetilde{\psi}_n^{\,2}\,d\gamma dt.$$

Замечание 3. Если $\mathcal{U}=C_+([0,T])$, то на основании (47) имеем

$$J'_{u_n}=-\int_\gamma[y(u_n)][\psi]\,d\gamma,\quad ||J'_{u_n}||^2\approx\int_0^T\left(\int_\gamma[y(u_n)][\psi]\,d\gamma\right)^2 dt.$$

Замечание 4. Если $\mathcal{U}=C_+(\gamma)$, то

$$J'_{u_n}=-\int_0^T[y(u_n)][\psi]\,dt,\ ||J'_{u_n}||^2\approx\int_\gamma\left(\int_0^T[y(u_n)][\psi]dt\right)^2 d\gamma.$$

4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРА СЛАБОПРОНИЦАЕМОГО ПРОСЛОЯ

Рассмотрим задачу (29)–(32), (3)–(5), (8), (9), т.е. задачу идентификации (33), (34), (13), в которой восстанавливаемый параметр $u=u(x,t)\in\mathcal{U}=C_+(\gamma_T)$ ищется в виде

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^m\alpha_i(t)\,\varphi_i(x)>0,\quad (x,t)\in\gamma_T, \tag{48}$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых функций.

Учитывая (48), на основании (47) получаем $J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^{\,i}\}_{i=1}^m,\quad \widetilde{\psi}_n^{\,i}=-\int_\gamma\varphi_i[y(u_n)][\psi]\,d\gamma,\quad ||J'_{u_n}||^2\approx\int_0^T(\widetilde{\psi}_n^{\,i})^2\,dt.$$

Замечание 5. Если в представлении (48) $\alpha_i=\text{const}$, то $J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^{\,i}\}_{i=1}^m,\ \widetilde{\psi}_n^{\,i}=-\int_0^T\int_\gamma\varphi_i[y(u_n)][\psi]\,d\gamma dt,\ ||J'_{u_n}||^2\approx\sum_{i=1}^m(\widetilde{\psi}_n^{\,i})^2.$$

Замечание 6. Если $u=u(t)\in\mathcal{U}=C_+([0,T])$, то, учитывая представление $u(t)=u_m(t)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\,\varphi_i(t)>0$, на основании (47) получаем $J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m,\ \widetilde{\psi}_n^i=-\int_0^T\int_\gamma\varphi_i(t)\,[y(u_n)][\psi]\,d\gamma dt,\qquad \|J'_{u_n}\|^2\approx\sum_{i=1}^m(\widetilde{\psi}_n^i)^2.$$

5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОЩНОСТИ ИСТОЧНИКА/СТОКА НА ПРОДОЛГОВАТОЙ ТРЕЩИНЕ

Пусть на области Ω_{1T} определено псевдопараболическое уравнение (29), а на области Ω_{2T} — эллиптическое уравнение (30). На границе Γ_T заданы смешанные краевые условия (3)–(5). При $t=0$ задано начальное условие (8).

Условия сопряжения неидеального контакта на участке γ_T имеют вид

$$[y]=0, \tag{49}$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^n\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\,a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=u. \tag{50}$$

Предполагаем, что на N $(n-1)$-мерных поверхностях $\gamma_i\in\Omega$ известны следы решения начально-краевой задачи (29), (30), (3)–(5), (8), (49), (50), заданные равенствами (9).

Определение 4. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}=C(\gamma_T)$ обобщенным решением начально-краевой задачи (29), (30), (3)–(5), (8), (49), (50) называется функция $y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет системе равенств

$$a_0(y,w)+a(y,w)=l(u;w),\qquad t\in(0,T), \tag{51}$$

$$y|_{t=0}=y_0(x),\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{52}$$

где билинейная форма $a_0(\cdot,\cdot)$ определена выражением (11′),

$$a(y,w)=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}dx+\int_{\Gamma_3}\alpha yw\,d\Gamma_3,$$

$$l(u;w)=\sum_{i=1}^2\int_{\Omega_i}f_i\,wdx-\int_\gamma uw\,d\gamma+\int_{\Gamma_2}gw\,d\Gamma_2+\int_{\Gamma_3}\beta wd\Gamma_3,$$

$$W(0,T)=\left\{v(x,t)\colon v\in L^2(0,T;V),\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\Omega_{1T}}\in L^2(0,T;\ \overline{V}_1)\right\},$$

$$V=\{\,v(x,t)\in\overline{V}\colon v\big|_{\Gamma_{1T}}=\varphi,\quad [v]\big|_\gamma=0,\ t\in(0,T)\,\}.$$

Функционал-невязка имеет вид (13). Для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (51), (52), (13) сопряженная задача определяется системой (18), где вместо пятого и шестого равенств — условий сопряжения на участке γ_T — следует задать ограничения

$$[\psi]=0, \tag{53}$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^n\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)\,a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=0. \tag{54}$$

Для полученной начально-краевой задачи обобщенная задача состоит в определении функции $\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет равенствам

$$-a_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}, w\right)+a(\psi,w)=l_\psi(y(u_n);w),\quad t\in(0,T),\tag{55}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0,\quad x\in\Omega,\tag{56}$$

где

$$W_d(0,T)=\left\{v(x,t)\in L^2(0,T;V_d):\frac{\partial v}{\partial t}\in L^2(0,T;\bar{V}_{1d})\right\}, V_d=\{v(x,t)\in\bar{V}_d:[v]\big|_{\gamma_T}=0,$$

$$[v]\big|_{\gamma_{iT}}=0,\ i=\overline{1,N},\ v\big|_{\Gamma_{1T}}=0\},\ V_{d_0}=\{v(x)\in\bar{V}_{d_0}:\ [v]\big|_{\gamma}=0,$$

$$[v]\big|_{\gamma_i}=0,\ i=\overline{1,N},\ v\big|_{\Gamma_1}=0\}.$$

На основании системы (55), (56) с учетом (51), (52) получаем $J'_{u_n}\approx\tilde{\psi}_n$, где

$$\tilde{\psi}_n=-\psi\,|_{\gamma T},\quad ||J'_{u_n}||^2=\int_0^T\int_\gamma\tilde{\psi}_n^2 d\gamma dt.$$

Если $\mathcal{U}=C([0,T])$, то $\tilde{\psi}_n=-\int_\gamma\psi\,d\gamma$. Если $\mathcal{U}=R$, то $\tilde{\psi}_n=-\int_0^T\int_\gamma\psi\,d\gamma dt$, $||J'_{u_n}||\approx|\tilde{\psi}_n|$.

Замечание 7. Если восстанавливаемая мощность источника/стока может быть представлена в виде

$$u(t)=u_m(t)=\sum_{i=1}^m\alpha_i\,\varphi_i(t),$$

где $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых функций, то

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle=\langle J'_{u_n},\Delta\alpha_n\rangle=(Y(u_n)-\bar{f},Y(u_{n+1})-Y(u_n))_\rho=$$

$$=-\sum_{i=1}^n\Delta\alpha_n^i\int_0^T\int_\gamma\varphi_i(t)\,\psi(x,t)\,d\gamma\,dt.$$

Следовательно, $J'_{u_n}=\tilde{\psi}_n$, где

$$\tilde{\psi}_n=\{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m,\ \tilde{\psi}_n^i=-\int_0^T\int_\gamma\varphi_i(t)\,\psi(x,t)\,d\gamma dt,\quad ||J'_{u_n}||^2=\sum_{i=1}^n(\tilde{\psi}_n^i)^2.$$

6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРА СЛАБОПРОНИЦАЕМОГО ПРОСЛОЯ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ЗА РЕШЕНИЕМ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ ТЕЛА

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (29)–(32), (3)–(5), (8), где параметр $u\in\mathcal{U}$ считаем неизвестным. На $\gamma_{0T}\subset\Gamma_{2T}\cup\Gamma_{3T}$ известно решение, т.е.

$$y(x,t)=f_0(x,t),\quad (x,t)\in\gamma_{0T}.\tag{57}$$

В этом случае функционал-невязка имеет вид

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\gamma_0}(y(u)-f_0)^2\ d\gamma_0 dt.\tag{58}$$

Обобщенная задача для начально-краевой задачи (29)–(32), (3)–(5), (8) имеет вид (33), (34). При определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (33), (34), (58) сопряженная задача имеет вид

$$\chi(\Omega_1)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}\right)-\bar a\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)=0,\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

$$\psi\big|_{\Gamma_{1T}}=0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=\chi(\Gamma_2\cap\gamma_0)(y(u_n)-f_0),\ (x,t)\in\Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=$$

$$=-\alpha\psi+\chi(\Gamma_3\cap\gamma_0)(y(u_n)-f_0),\ (x,t)\in\Gamma_{3T},$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=0,\ (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right\}^{\pm}=u_n[\psi],\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\psi\big|_{t=T}=0,\quad x\in\Omega, \tag{59}$$

где $\chi(\Gamma_i\cap\gamma_0)=1$, если $x\in\Gamma_i\cap\gamma_0\neq\varnothing$. Если $\Gamma_i\cap\gamma_0=\varnothing$ или $x\notin\Gamma_i\cap\gamma_0$, то $\chi(\Gamma_i\cap\gamma_0)=0,\ i=2,3$.

Определение 5. Обобщенным решением начально-краевой задачи (59) называется функция $\psi(x,t)\in W_d(0,T)=W_0(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$-a_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},w\right)+a(u_n;\psi,w)=l_\psi(y(u_n);w),\quad t\in(0,T), \tag{60}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0,\quad x\in\Omega, \tag{61}$$

где $l_\psi(y(u_n);w)=\int\limits_{\gamma_0}(y(u_n)-f_0)wd\gamma_0$.

Выбирая в тождестве (60) вместо функции w разность $\tilde y(u_{n+1})-y(u_n)$, где $\tilde y(u_{n+1})$ — решение задачи (38), (39), получаем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle\approx\int\limits_0^T\int\limits_{\gamma_0}(y(u_n)-f_0)(\tilde y(u_{n+1})-y(u_n))d\gamma_0dt=-\int\limits_0^T\int\limits_{\gamma}\Delta u_n[y(u_n)][\psi]d\gamma dt.$$

Следовательно, $J'_{u_n}\approx\tilde\psi_n$, где $\tilde\psi_n=-[y(u_n)][\psi]|_{\gamma_T}$, $\|J'_{u_n}\|^2\approx\int\limits_0^T\int\limits_{\gamma}\tilde\psi_n^2d\gamma dt.$

В этом случае справедливы замечания 3, 4, а также можно использовать параметрическое представление (48) восстанавливаемого параметра $u\in\mathcal{U}$.

7. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОЩНОСТИ ИСТОЧНИКА/СТОКА НА ТРЕЩИНЕ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ЗА РЕШЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ ТЕЛА

Состояние системы описывается начально-краевой задачей (29), (30), (3)–(5), (8), (49), (50) с соответствующей ей обобщенной задачей (51), (52). На $\gamma_{0T}\in\Gamma_{2T}\cup\Gamma_{3T}$ известно решение, заданное равенством (57), с функционалом-невязкой (58).

Для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u=u(x,t)\in\mathcal{U}=C(\gamma_T)$ задачи (51), (52), (58) сопряженная задача определяется системой (59), где вместо пятого и шестого равенств необходимо задать ограничения (53), (54). Для этой начально-краевой задачи обобщенная задача имеет вид (55), (56), где

$$l_\psi(y(u_n);w)=\int\limits_{\gamma_0}(y(u_n)-f_0)wd\gamma_0 .$$

Следовательно,

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle\approx\int\limits_0^T\int\limits_{\gamma_0}(y(u_n)-f_0)(y(u_{n+1})-y(u_n))d\gamma_0\,dt=-\int\limits_0^T\int\limits_{\gamma}\Delta u_n\psi d\gamma dt.$$

Таким образом, $J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n=-\psi\big|_{\gamma_T}$. Здесь справедливы все замечания, приведенные в разд. 5 относительно выбора множества $\mathcal{U}$.

8. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА ПРИ ИЗВЕСТНОМ РЕШЕНИИ НА УЧАСТКЕ Γ_{3T}

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\chi(\Omega_1)\left(-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}\right)+\bar{a}\frac{\partial y}{\partial t}\right)-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)=f,\ (x,t)\in\Omega_T,$$

$$y\big|_{\Gamma_{1T}}=\varphi,$$

$$\sum_{i,j=1}^n\left(\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=u,\quad (x,t)\in\Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,j=1}^n\left(\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=-\alpha y+\beta,\quad (x,t)\in\Gamma_{3T},$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^n\left(\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=0,\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^n\left(\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right\}^{\pm}=r[y],\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$y\big|_{t=0}=y_0(x),\ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2. \tag{62}$$

На участке $\gamma_{0T}\subset\Gamma_{3T}$ известно решение начально-краевой задачи (62), заданное равенством

$$y(x,t)=f_0(x,t). \tag{63}$$

Вместо классического решения начально-краевой задачи (62) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 6. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (62) называется функция $y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a_0\left(\frac{\partial y}{\partial t},w\right)+a(y,w)=l(u;w),\quad t\in(0,T), \tag{64}$$

$$y\big|_{t=0}=y_0(x),\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{65}$$

где билинейная форма $a_0(\cdot,\cdot)$, множества $W(0,T),V_0$ определены в разд. 1,

$$a(y,w)=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}dx+\int\limits_{\gamma}r[y][w]\,dy+\int\limits_{\Gamma_3}\alpha ywd\Gamma_3,$$

$$l(u;w)=(f,w)+\int\limits_{\Gamma_2}uwd\Gamma_2+\int\limits_{\Gamma_3}\beta wd\Gamma_3.$$

Функционал-невязка имеет вид (58).

Для определения $(n+1)$-го приближения решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (58), (64), (65) используется сопряженная задача вида

$$\chi(\Omega_1)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}\right)-\bar{a}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)=0,\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

$$\psi\big|_{\Gamma_{1T}}=0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=0,\quad (x,t)\in\Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=-\alpha\psi,\ (x,t)\in\Gamma_{3T}\setminus\gamma_{0T},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=-\alpha\psi+(y(u_n)-f_0),\ (x,t)\in\gamma_{0T},$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=0,\quad (x,t)\in\gamma,$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=r[\psi],\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\psi\big|_{t=T}=0,\quad x\in\Omega. \tag{66}$$

Определение 7. Обобщенным решением начально-краевой задачи (66) называется функция $\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$-a_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},w\right)+a(\psi,w)=l_\psi(y(u_n);w),\quad t\in(0,T), \tag{67}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0,\quad x\in\Omega, \tag{68}$$

где множество $W_d(0,T)$ и форма $l(\,\cdot\,;\,\cdot\,)$ определены в предыдущем разделе.

Выбрав в тождестве (67) вместо функции w разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (64), (65), (68) имеем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle=\int\limits_0^T\int\limits_{\gamma_0}(y(u_n)-f_0)(y(u_{n+1})-y(u_n))d\gamma_0dt=\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_2}\Delta u_n\psi d\Gamma_2dt.$$

Следовательно, $J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n=\psi\big|_{\Gamma_{2T}}$.

Если восстанавливаемый параметр ищем в виде

$$u=u_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)\,\varphi_i(x),$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых функций, то $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m$, $\widetilde{\psi}_n^i = \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_i \psi d\Gamma_2$, $|| J'_{u_n} ||^2 = \sum\limits_{i=1}^m \int\limits_0^T (\widetilde{\psi}_n^i)^2 dt.$

9. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРА СЛАБОПРОНИЦАЕМОГО ПРОСЛОЯ ПРИ ФИНАЛЬНОМ НАБЛЮДЕНИИ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\chi(\Omega_1)\left(-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} \right) + \bar{a} \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = f, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$y\big|_{\Gamma_{1T}} = \varphi,$$

$$\sum_{i,j=1}^n \left(\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) = g, \quad (x,t) \in \Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,j=1}^n \left(\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) = -\alpha y + \beta, \quad (x,t) \in \Gamma_{3T},$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \left(\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) \right] = 0, \quad (x,t) \in \gamma_T,$$

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^n \left(\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) \right\}^{\pm} = u[y], \quad (x,t) \in \gamma_T,$$

$$y\big|_{t=0} = y_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{69}$$

Обобщенная задача, соответствующая начально-краевой задаче (69), имеет вид (33), (34). Считаем, что при $t = T$ известно решение начально-краевой задачи (69) на области Ω_1, заданное равенством

$$y(x,T) = f_0(x), \quad x \in \Omega_1. \tag{70}$$

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_1} (y(u;x,T) - f_0(x))^2 \, dx, \tag{71}$$

где $y(u;x,t) = y(u)$ — решение задачи (33), (34).

Задачу (33), (34), (71) решаем с помощью градиентных методов (14). Для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (33), (34), (71) используется сопряженная задача вида

$$\chi(\overline{\Omega}_1)\left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} \right) - \bar{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\psi\,|_{\Gamma_{1T}} = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^n \left(-\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=-\alpha\psi,\ \ (x,t)\in\Gamma_{3T},$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=0,\ \ (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right\}^{\pm}=u_n[\psi],\ \ (x,t)\in\gamma_T,$$

$$a_0(\psi,w)\big|_{t=T}=(y(u_n;\cdot,T)-f_0,w)_{L_2(\Omega_1)}\ \ \forall w\in V_0,$$

$$\psi\big|_{t=T}=0,\quad x\in\overline{\Omega}_2. \tag{72}$$

Определение 8. Обобщенным решением начально-краевой задачи (72) называется функция $\psi(x,t)\in W_d(0,T)=W_0(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$-a_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},w\right)+a(u_n;\ \psi,w)=0,\quad t\in(0,T), \tag{73}$$

$$a_0(\psi,w)\big|_{t=T}=(y(u_n;\cdot,T)-f_0,w)_{L_2(\Omega_1)},\ \ \psi\big|_{t=T}=0,\ \ x\in\overline{\Omega}_2, \tag{74}$$

где множества $W_d(0,T)$, $W_0(0,T)$, V_0 определены в разд. 5.

Выбирая в тождестве (73) вместо функции w разность $\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, где функция $\widetilde{y}(u_{n+1})$ — решение задачи (38), (39), получаем

$$\int_0^T\left(-a_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)\right)+a(u_n;\psi,\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))\right)dt=$$

$$=-a_0(\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n),\ \psi)\Big|_0^T+$$

$$+\int_0^T\left(a_0\left(\frac{\partial(\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))}{\partial t},\psi\right)+a(u_n;\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n),\psi)\right)dt=$$

$$=-(y(u_n;\cdot,T)-f_0,\widetilde{y}(u_{n+1};\cdot,T)-y(u_n;\cdot,T))_{L_2(\Omega_1)}-\int_0^T\int_\gamma\Delta u_n[y(u_n)][\psi]\,d\gamma dt.$$

Таким образом,

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle=-\int_0^T\int_\gamma\Delta u_n[y(u_n)][\psi]\,d\gamma dt. \tag{75}$$

Следовательно, $J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n=-[y(u_n)][\psi]|_{\gamma_T}$.

При параметрическом определении параметра u, т.е. если он ищется в виде $u=u_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)\varphi_i(x)$, где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых функций, на основании (75) получаем $J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m,\quad \widetilde{\psi}_n^i=\widetilde{\psi}_n^i(t)=-\int_\gamma\varphi_i[y(u_n)][\psi]\,d\gamma,\ \ ||J'_{u_n}||^2\approx\sum_{i=1}^m\int_0^T(\widetilde{\psi}_n^i)^2dt.$$

При $\alpha_i=\text{const}$ имеем

$$\widetilde{\psi}_n^i=-\int_0^T\int_\gamma\varphi_i[y(u_n)][\psi]\,d\gamma dt,\quad ||J'_{u_n}||^2\approx\sum_{i=1}^m(\widetilde{\psi}_n^i)^2.$$

10. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРА СЛАБОПРОНИЦАЕМОГО ПРОСЛОЯ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (69). На временных участках $[\bar{t}_1^{\,i}, \bar{t}_2^{\,i}] \in [0, T]$ на $(n-1)$-мерных поверхностях $\gamma_i \in \Omega$, $i = \overline{1, N}$, известны следы решения начально-краевой задачи (69), заданные равенствами

$$y\big|_{\gamma_i} = f_i, \quad t \in [\bar{t}_1^{\,i}, \ \bar{t}_2^{\,i}], \quad i = \overline{1, N}. \tag{76}$$

В этом случае функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{\bar{t}_1^i}^{\bar{t}_2^i} \int_{\gamma_i} (y(u_n) - f_i)^2 \, d\gamma_i \, dt. \tag{77}$$

Тем самым получена задача (69), (77), которую будем решать с помощью градиентных методов (14).

На каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (69), (77) сопряженная задача имеет вид

$$\chi(\overline{\Omega}_1) \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} \right) - \bar{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_{dT},$$

$$\psi \,|_{\Gamma_{1T}} = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(-\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(-\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) = -\alpha \psi, \quad (x, t) \in \Gamma_{3T},$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(-\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) \right] = 0, \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \left(-\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) \right\}^{\pm} = u_n [\psi], \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$[\psi]\big|_{\gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad t \in (0, T), \tag{78}$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(-\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} + k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cos(\nu, x_i) \right] = -(y(u_n) - f_i)\big|_{\gamma_i} \, \chi([\bar{t}_1^{\,i}, \ \bar{t}_2^{\,i}]),$$

$$\psi\big|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Определение 9. Обобщенным решением начально-краевой задачи (78) называется функция $\psi(x, t) \in W_d(0, T)$, которая $\forall w(x) \in V_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств

$$-a_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, w \right) + a(u_n; \psi, w) = l_\psi (y(u_n); w), \quad t \in (0, T), \tag{79}$$

$$\psi\big|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega. \tag{80}$$

Здесь

$$W_d(0, T) = \left\{ v(x, t) \in L^2(0, T; \ V_d): \ \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{\Omega_{1dT}} \in L^2(0, T; \overline{V}_{1d}) \right\},$$

$$V_d = \{v(x,t) \in \overline{V}_d : v\big|_{\Gamma_{1T}} = 0, \quad [v]\big|_{\gamma_j} = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad t \in (0,T)\},$$

$$\overline{V}_d = \{v(x,t): \ v\big|_{\Omega_{jd}} \in W_2^1(\Omega_{jd}), \ j = \overline{0, N+1}, \quad t \in (0,T)\},$$

$$\overline{V}_{1d} = \{v(x,t): \ v\big|_{\Omega_{1jd}} \in W_2^1(\Omega_{1jd}), \ j \in \overline{0, N+1}\},$$

$$\Omega_{1jd} \in (\Omega_1 \setminus \gamma_d), \qquad \Omega_{jd} \in (\Omega \setminus \gamma_d),$$

$$\gamma_d = \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j, \ \ V_{d_0} = \{v(x): \ v\big|_{\Omega_{jd}} \in W_2^1(\Omega_{jd}), \ j = \overline{0, N+1},$$

$$[v]\big|_{\gamma_j} = 0, \quad j = \overline{1, N}, \ v\big|_{\Gamma_1} = 0\},$$

$$l_\psi(y(u_n); w) = \sum_{j=1}^{N} (y(u_n) - f_j, w)\big|_{L_2(\gamma_j)} \chi([\bar{t}_1^{\,j}, \ \bar{t}_2^{\,j}]), \tag{81}$$

где $\chi([\bar{t}_1^{\,j}, \ \bar{t}_2^{\,j}]) = 1$ при $t \in [\bar{t}_1^{\,j}, \ \bar{t}_2^{\,j}]$ и $\chi([\bar{t}_1^{\,j}, \ \bar{t}_2^{\,j}]) = 0$ при $t \notin [\bar{t}_1^{\,j}, \ \bar{t}_2^{\,j}]$.

Введем обозначения

$$\pi(u,v) = (Y(u) - Y(u_n), \ Y(v) - Y(u_n))_\rho, \tag{82}$$

$$L(v) = (f - Y(u_n), \ Y(v) - Y(u_n))_\rho, \tag{83}$$

где

$$Y(v) = \{A_i(v)\}_{i=1}^{N}, \quad A_i(v) = y(v; x, t)\big|_{\gamma_i} \chi[\bar{t}_1^{\,i}, \ \bar{t}_2^{\,i}], \quad i = \overline{1, N},$$

$$(\varphi, \psi)_\rho = \sum_{i=1}^{N} \int_{\bar{t}_1^i}^{\bar{t}_2^i} \int_{\gamma_i} \varphi_i \psi_i d\gamma_i \, dt, \quad f = \{f_i\}_{i=1}^{N}.$$

Тогда

$$2J(v) = \pi(v,v) - 2L(v) + \| f - Y(u_n) \|_\rho^2. \tag{84}$$

Следовательно,

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u_n + \lambda \Delta u_n) - J(u_n)}{\lambda} \approx (Y(u_n) - f, \ \overline{\overline{Y}}(u_{n+1}) - Y(u_n))_\rho. \tag{85}$$

Учитывая (85), на основе (79), (80) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx \sum_{i=1}^{N} \int_{\bar{t}_1^i}^{\bar{t}_2^i} \int_{\gamma_i} (y(u_n) - f_i)(\tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)) d\gamma_i \, dt =$$

$$= -\int_0^T a_0\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)\right) dt + \int_0^T a(u_n; \tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)) \, dt =$$

$$= -\int_0^T \int_\gamma \Delta u_n [y(u_n)][\psi] \, d\gamma dt.$$

Таким образом, $J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = -[y(u_n)][\psi]|_{\gamma_T}$, $\| J'_{u_n} \|^2 \approx -\int_0^T \int_\gamma \tilde{\psi}_n^2 \, d\gamma dt.$

11. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОЩНОСТИ ИСТОЧНИКА/СТОКА НА ПРОДОЛГОВАТОЙ ТРЕЩИНЕ ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ ГЛАВНЫХ УСЛОВИЯХ СОПРЯЖЕНИЯ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\chi(\Omega_1)\left(-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}\right)+\bar{a}\frac{\partial y}{\partial t}\right)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)=f,\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

$$y\big|_{\Gamma_{1T}}=\varphi,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=g,\quad (x,t)\in\Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)=-\alpha y+\beta,\quad (x,t)\in\Gamma_{3T},$$

$$[y]=\delta,\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial t}+k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=u,\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$y\big|_{t=0}=y_0(x),\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{86}$$

где $\delta=\delta(x,t)\in C(\gamma_T)$, $\bar{f}\in L^2(0,T;\ L_2(\Omega))$.

Определение 10. Обобщенным решением начально-краевой задачи (86) называется функция $y(x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$a_0\left(\frac{\partial y}{\partial t},w\right)+a(y,w)=l(u;w),\quad t\in(0,T), \tag{87}$$

$$y\big|_{t=0}=y_0(x),\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{88}$$

где билинейная форма $a_0(\cdot\ ;\ \cdot)$ определена в разд. 1,

$$W(0,T)=\left\{v(x,t)\in L^2(0,T;\ V):\ \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{\Omega_{1T}}\in L^2(0,T;L_2(\Omega_1))\right\},$$

$$V=\{v(x,t)\in\overline{V}:v|_{\Gamma_{1T}}=\varphi,[v]|_{\gamma_T}=\delta\},$$

$$V_0=\{v(x):\ v\in\overline{V}_0,\ v\big|_{\Gamma_1}=0,\ [v]\big|_{\gamma}=0\},\ \overline{V}_0=\{v(x):\ v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,2\},$$

$$a(y,w)=\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}dx+\int_{\Gamma_3}\alpha yw d\Gamma_3,$$

$$l(u;w)=(f,w)+\int_{\Gamma_2}gwd\Gamma_2+\int_{\Gamma_3}\beta wd\Gamma_3-\int_{\gamma}uwd\gamma.$$

Предполагаем, что на участке $\gamma_{0T}\subset(\Gamma_{2T}\cup\Gamma_{3T})$ известен след решения задачи (87), (88), т.е.

$$y=f_0,\quad (x,t)\in\gamma_{0T}.$$

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\gamma_0}(y(u)-f_0)^2d\gamma_0dt. \tag{89}$$

Задачу (87)–(89) будем решать с помощью градиентных методов (14).

На каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (87)–(89) сопряженная задача имеет вид

$$\chi(\Omega_1)\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t}\right) - \bar{a}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\psi|_{\Gamma_{1T}} = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu, x_i) =$$

$$= \chi(\gamma_{0T} \cap \Gamma_{2T})(y(u_n) - f_0), \quad (x,t) \in \Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)\, a_{ij}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu, x_i) =$$

$$= -\alpha\psi + \chi(\gamma_{0T} \cap \Gamma_{3T})(y(u_n) - f_0), \quad (x,t) \in \Gamma_{3T}, \tag{90}$$

$$[\psi] = 0, \quad (x,t) \in \gamma_T,$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1) a_{ij}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} + k_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu, x_i)\right] = 0, \quad (x,t) \in \gamma_T,$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Определение 11. Обобщенным решением начально-краевой задачи (90) называется функция $\psi(x,t) \in W_0(0,T)$, которая $\forall w(x) \in V_{d_0}$ удовлетворяет системе равенств

$$-a_0(\psi, w) + a(\psi, w) = l_\psi(y(u_n); w), \quad t \in (0,T), \tag{91}$$

$$\psi\big|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{92}$$

где $l_\psi(y(u_n); w) = \int\limits_{\gamma_0} (y(u_n) - f_0) w \, d\gamma_0$.

Выбирая в тождестве (91) вместо функции w разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (87), (88), (92) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = \int_0^T \int_{\gamma_0} (y(u_n) - f_0)(y(u_{n+1}) - y(u_n)) d\gamma_0 dt = -\int_0^T \int_{\gamma} \Delta u_n \psi d\gamma dt.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = -\psi|_{\gamma T}$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \int_0^T \int_{\gamma} \widetilde{\psi}_n^2 d\gamma dt.$

12. ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Пусть на области Ω_T определено эллиптико-псевдопараболическое уравнение

$$\chi(\Omega_1)\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{1i}(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial t}\right) + u_2(x)\frac{\partial y}{\partial t}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{3i}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) = \bar{f}(x,t),$$

где

$$u_{1i} \in C(\overline{\Omega}_1) \cap C^1(\Omega_1), \; u_2 \in C(\Omega_1), \; u_{1i}, u_2 > 0,$$

$$u_{3i} = (u_{3i}^1, u_{3i}^2), \; u_{3i}^l = u_{3i}\big|_{\overline{\Omega}_l} > 0, \quad i = \overline{1,n}, \; l = 1, 2.$$

На границе Γ_T заданы смешанные краевые условия:

$$y\big|_{\Gamma_{1T}} = \varphi,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\partial\overline{\Omega}_1)u_{1i}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial t} + u_{3i}\,\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\cos(\nu, x_i) = g, \quad (x,t)\in\Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\partial\Omega_1)u_{1i}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial t} + u_{3i}\,\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\cos(\nu, x_i) = -\alpha y + \beta, \quad (x,t)\in\Gamma_{3T},$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)u_{1i}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial t} + u_{3i}\,\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\cos(\nu, x_i)\right] = 0, \quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)u_{1i}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial t} + u_{3i}\,\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\cos(\nu, x_i)\right]^{\pm} = r[y], \quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$y\big|_{t=0} = y_0, \quad x\in\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{93}$$

Определение 12. Обобщенным решением начально-краевой задачи (93) называется функция $y(x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$a_0\left(u;\ \frac{\partial y}{\partial t}, w\right) + a(u;\, y, w) = l(w), \quad t\in(0,T), \tag{94}$$

$$y\big|_{t=0} = y_0(x), \quad x\in\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \tag{95}$$

где множества $W(0,T)$, V_0 определены в разд. 1,

$$a_0(u;\, y, w) = \int_{\Omega_1}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{1i}\,\frac{\partial y}{\partial x_i}\,\frac{\partial w}{\partial x_i} + u_2\, y\, w\right) d\Omega_1,$$

$$a(u;\, y, w) = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} u_{2i}\,\frac{\partial y}{\partial x_i}\,\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx + \int_{\gamma} r[y][w]\,d\gamma + \int_{\Gamma_3}\alpha y w d\Gamma_3,$$

$$l(w) = (\bar{f}, w) + \int_{\Gamma_2} g w\, d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3}\beta w d\Gamma_3.$$

Предполагаем, что на N $(n-1)$-мерных поверхностях γ_i, разбивающих Ω на $N+2$ связные ограниченные строго липшицевы области Ω_j $(\gamma_i \in \Omega,\ i=\overline{1,N})$, известны следы решения $y = y(x,t)$ начально-краевой задачи (93) заданные равенствами:

$$y = f_i(x,t), \quad (x,t)\in\gamma_{iT}, \quad i=\overline{1,N}. \tag{96}$$

Задача (93), (96) состоит в нахождении вектора $u=(u_1,u_2,u_3)\in\mathcal{U}$, при котором решение $y = y(u) = y(u;\ x,t)$ начально-краевой задачи (93) удовлетворяет равенствам (96).

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}(y(u) - f_i)^2\, d\gamma_i\, dt. \tag{97}$$

Задачу (94), (95), (97) будем решать с помощью градиентных методов (14).

Для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (94), (95), (97) используется сопряженная задача вида

$$\chi(\overline{\Omega}_1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{1in}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial t}\right)-u_{2n}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{3in}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)=0,\ (x,t)\in\Omega_T\setminus\gamma_{dT},$$

$$\psi\big|_{\Gamma_{1T}}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)u_{1in}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial t}+u_{3in}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)\big|_{\Gamma_{2T}}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)u_{1in}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial t}+u_{3in}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)=-\alpha\psi,\quad (x,t)\in\Gamma_{3T},$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)u_{1in}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial t}+u_{3in}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=0,\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)u_{1in}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial t}+u_{3in}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)\right\}^{\pm}=r[\psi],\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$[\psi]=0,\quad \left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\chi(\overline{\Omega}_1)u_{1in}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial t}+u_{3in}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)\right]=$$

$$=-\,(y(u_n)-f_l),\quad (x,t)\in\gamma_{lT},\quad l=\overline{1,N},\qquad \psi\big|_{t=T}=0,\quad x\in\Omega. \tag{98}$$

Определение 13. Обобщенным решением начально-краевой задачи (98) называется функция $\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет равенствам

$$-a_0\left(u_n;\ \frac{\partial\psi}{\partial t},w\right)+a(u_n;\psi,w)=l_\psi(y(u_n);w),\quad t\in(0,T), \tag{99}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0,\quad x\in\Omega, \tag{100}$$

где множества $W_d(0,T)$, V_{d_0} определены в разд. 1,

$$l_\psi(y(u_n);w)=\sum_{i=1}^{N}\int_0^T\int_{\gamma_i}(y(u_n)-f_i)w\,d\gamma_i\,dt.$$

Приращение $\theta=\Delta y$ решения $y=y(u)$ начально-краевой задачи (93), соответствующее приращению Δu параметра $u\in\mathcal{U}$, определим как решение начально-краевой задачи

$$\chi(\overline{\Omega}_1)\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{1in}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial t}\right)+u_{2n}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{3in}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)=$$

$$=\chi(\overline{\Omega}_1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}\right)-\Delta u_{2n}\frac{\partial y(u_n)}{\partial t}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right),\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\,u_{1in}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial t}+u_{3in}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}+\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i),\ (x,t)\in\Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\,u_{1in}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial t}+u_{3in}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)=-\alpha\theta-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}+\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i),\ \ (x,t)\in\Gamma_{3T},$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)u_{1in}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial t}+u_{3in}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)\right\}^{\pm}=r[\theta]-$$

$$-\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}+\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)\right\}^{\pm},$$

$$\theta\big|_{t=0}=0,\quad x\in\Omega. \tag{101}$$

Определение 14. Обобщенным решением начально-краевой задачи (101) называется функция $\theta(x,t)\in W_0(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$a_0\left(u_n;\ \frac{\partial\theta}{\partial t},w\right)+a(u_n;\theta,w)=l_\theta(\Delta u_n;w),\quad t\in(0,T), \tag{102}$$

$$\theta\big|_{t=0}=0,\quad x\in\Omega, \tag{103}$$

где

$$l_\theta(\Delta u_n;w)=\int_\Omega\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}\right)-\Delta u_{2n}\frac{\partial y(u_n)}{\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right)\right)wdx-\int_{\Gamma_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}+\right.$$

$$\left.+\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)wd\Gamma_2-\int_{\Gamma_3}\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}+\right.$$

$$\left.+\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)wd\Gamma_3+\int_\gamma\sum_{i=1}^{n}\Delta u_{3in}\left\{\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right\}^{+}\cos(\nu,x_i)w^{+}d\gamma-$$

$$-\int_\gamma\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}+\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)\right\}^{-}w^{-}d\gamma.$$

Выбирая в тождестве (99) вместо функции w разность $\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (100), (102), (103) получаем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle\approx\int_0^T\int_\Omega\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}\right)-\Delta u_{2n}\frac{\partial y(u_n)}{\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right)\right)\psi dxdt-\int_0^T\int_{\Gamma_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}+\right.$$

$$\left.+\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_i)\psi d\Gamma_2 dt-\int_0^T\int_{\Gamma_3}\sum_{i=1}^{n}\left(\chi(\overline{\Omega}_1)\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}+\right.$$

$$+\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\Bigg)\cos(\nu, x_i)\psi d\Gamma_3\,dt+\int_0^T\int_\gamma \Delta u_{3in}\left\{\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right\}^+\cos(\nu, x_i)\psi^+\,d\gamma dt-$$

$$-\int_0^T\int_\gamma\sum_{i=1}^n\left\{\left(\Delta u_{1in}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}+\Delta u_{3in}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right)\cos(\nu, x_i)\right\}^-\,w^-\,d\gamma dt.$$

Следовательно, $J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^3$, $\quad\widetilde{\psi}_n^1=\{\widetilde{\psi}_{n_i}^1\}_{i=1}^n$,

$$\widetilde{\psi}_{n_i}^1=\int_0^T\int_{\Omega_1}\frac{\partial^3 y(u_n)}{\partial^2 x_i\partial t}\psi\,d\Omega_1\,dt-\int_0^T\int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}\chi(\overline{\Omega}_1)\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}\psi\,d(\Gamma_2\cup\Gamma_3)\,dt-$$

$$-\int_0^T\int_\gamma\left\{\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x_i\partial t}\right\}^-\cos(\nu, x_i)\psi^-\,d\gamma dt,\quad \widetilde{\psi}_n^2=-\int_0^T\int_{\Omega_1}\frac{\partial y(u_n)}{\partial t}\psi\,d\Omega_1 dt,$$

$$\widetilde{\psi}_n^3=\{\widetilde{\psi}_{n_i}^3\}_{i=1}^n,\quad \widetilde{\psi}_{n_i}^3=\{\widetilde{\psi}_{n_i l}^3\}_{l=1}^2,\quad \widetilde{\psi}_{n_i l}^3=\int_0^T\int_{\Omega_l}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial^2 x_i}\psi\,dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}\chi(\overline{\Omega}_l)\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)\psi\,d(\Gamma_2\cup\Gamma_3)\,dt+$$

$$+\int_0^T\int_\gamma\left(\chi(\overline{\Omega}_l\cap\overline{\Omega}_2)\left\{\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right\}^+\psi^+-\chi(\overline{\Omega}_l\cap\overline{\Omega}_1)\left\{\frac{\partial y(u_n)}{\partial x_i}\right\}^-\psi^-\right)\cos(\nu, x_i)\,d\gamma dt,$$

$$\|J'_{u_n}\|^2\approx\sum_{i=1}^n(\widetilde{\psi}_{n_i}^1)^2+(\widetilde{\psi}_n^2)^2+\sum_{i=1}^n\sum_{l=1}^2(\widetilde{\psi}_{n_{i_l}}^3)^2.$$

Замечание 8. Представление приближения $\widetilde{\psi}_n$ градиента J'_{u_n} можно также легко получить на основе обобщенной задачи (94), (95).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение граничных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 49–73.
2. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Там же. — 2007. — № 5. — С. 48–71.
3. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для псевдопараболических многокомпонентных распределенных систем // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 4. — С. 33–58.
4. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для эллиптико-параболических многокомпонентных распределенных систем // Там же. — 2008. — № 3. — С. 74–99.
5. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 506 с.
6. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. — 400 p.
7. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
8. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. — Киев: Наук. думка, 2009. — 640 с.

Поступила 24.02.2011