НОВЫЕ СРЕДСТВА КИБЕРНЕТИКИ, ИНФОРМАТИКИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Т.А. АЛИЕВ, Г.А. ГУЛИЕВ, Ф.Г. ПАШАЕВ, А.Б. САДЫГОВ

УДК 519.216

АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ И ВЗАИМНО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ МЕЖДУ ПОЛЕЗНЫМ СИГНАЛОМ И ПОМЕХОЙ ЗАШУМЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Ключевые слова: *помеха, зашумленный сигнал, взаимно корреляционная функция, коэффициент корреляции, дефект.*

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1–8], что при решении многочисленных прикладных задач контроля и управления с применением традиционных технологий анализа случайных сигналов получение приемлемых результатов возможно лишь в том случае, если выполняются условия стационарности, нормальности закона распределения и отсутствия корреляции между помехой и полезным сигналом и т.д. Однако для многих реальных технологических параметров, получаемых на выходах соответствующих датчиков, эти условия не выполняются. Поэтому адекватность описания многих анализируемых процессов с помощью вероятностно-статистических методов оказывается неудовлетворительной и в рамках классических теорий анализа случайных процессов многие задачи, имеющие колоссальное экономическое и социальное значение, довольно часто не решаются. Это приводит к недостаточной реализаци громадных возможностей технологий анализа случайных процессов.

Например, устранение недостатков традиционной технологии позволило бы повысить достоверность и эффективность прогнозирования землетрясений и других стихийных бедствий, диагностирования заболеваний, поиска полезных ископаемых, прогнозирования аварий на тепловых и атомных электростанциях, аварий при бурении нефтяных скважин, предполетного диагностирования технического состояния самолетов, создания адекватных математических моделей и т.д. В связи с этим для получения достоверных результатов многочисленных прикладных задач наряду с использованием потенциала традиционных технологий необходимо создание новых альтернативных алгоритмов, которые обеспечивали бы точность полученных оценок как при выполнении соответствующих классических условий, так и при их невыполнении.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работах [1, 2] предложены алгоритмы определения оценок дисперсии помехи и полезного сигнала, робастные оценки автокорреляционных и взаимно корреляционных функций, коэффициентов рядов Фурье и других характеристик зашумленных случайных сигналов. Однако вопрос создания легкореализуемых технологий определения оценок взаимно корреляционной функций и коэффициента корреляции между полезным сигналом и помехой зашумленных технологических параметров еще не полностью решен.

Известно, что если дискретизированный зашумленный технологический параметр $g(i\Delta t)$ состоит из полезного сигнала $X(i\Delta t)$ и помехи $\varepsilon(i\Delta t)$, то взаимно корреляционную функцию $R_{X\varepsilon}(\mu=0)$ и коэффициент корреляции $r_{X\varepsilon}$ между ними можно определить по следующим выражениям:

$$R_{X\varepsilon}(\mu=0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X(i\Delta t)\,\varepsilon(i\Delta t), \tag{1}$$

$$r_{X\varepsilon}=\frac{R_{X\varepsilon}(\mu=0)}{\sqrt{R_{XX}(\mu=0)R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu=0)}}, \tag{2}$$

где $R_{XX}(\mu=0)$, $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu=0)$ — автокорреляционные функции полезного сигнала $X(i\Delta t)$ и помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ соответственно.

В [1–3] предложены технологии определения $R_{XX}(\mu=0)$, $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu=0)$. Однако для определения оценки $R_{X\varepsilon}(\mu=0)$ на практике необходимо определить отсчеты помехи $\varepsilon(i\Delta t)$, что не представляется возможным. Поэтому вопрос определения оценок таких важных характеристик зашумленных сигналов как взаимно корреляционная функция, так и коэффициент корреляции $r_{X\varepsilon}$ между полезным сигналом и помехой остается нерешенным. В связи с этим в данной статье рассматриваются возможности создания надежных технологий вычисления оценок $R_{X\varepsilon}(\mu=0)$ и $r_{X\varepsilon}$.

ЦИФРОВАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗАИМНО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ И КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ ПОЛЕЗНЫМ СИГНАЛОМ И ПОМЕХОЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОТСУТСТВИЯ КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ НИМИ

Как указывалось выше, на практике измерительная информация, получаемая от многих реальных процессов, представляет собой сумму полезного сигнала $X(t)$ и помехи $\varepsilon(t)$. Предположим, что $g(i\Delta t)=X(i\Delta t)+\varepsilon(i\Delta t)$ — дискретизированный стационарный случайный сигнал с нормальным законом распределения, состоящий из полезного сигнала $X(i\Delta t)$ и помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ с математическим ожиданием, близким к нулю: $m_\varepsilon\approx 0$. С учетом влияния помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ автокорреляционную функцию $R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu)$ центрированного дискретизированного случайного сигнала $\mathring{g}(t)=g(t)-m_g$ (m_g — математическое ожидание $g(t)$) можно представить в виде

$$R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathring{g}(i\Delta t)\,\mathring{g}((i+\mu)\Delta t)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathring{X}(i\Delta t)+\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)][\mathring{X}((i+\mu)\Delta t)+\mathring{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)]=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathring{X}(i\Delta t)\,\mathring{X}((i+\mu)\Delta t)+\mathring{X}(i\Delta t)\,\mathring{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)+$$

$$+\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\,\mathring{X}((i+\mu)\Delta t)+\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\,\mathring{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)]=R_{\mathring{x}\mathring{x}}(\mu)+\lambda(\mu), \tag{3}$$

где

$$\lambda(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{X}((i+\mu)\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)] \quad (4)$$

— погрешность корреляционной функции $R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$.

Известно, что отсчеты полезного сигнала $\overset{\circ}{X}((i+\mu)\Delta t)$ и помехи $\varepsilon(i\Delta t)$, а также отсчеты $\varepsilon(i\Delta t)$ и $\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)$ при $\mu\neq 0$ не коррелируют между собой, т.е.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{X}((i+\mu)\Delta t)\approx 0\\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)\approx 0\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

и средняя величина квадратов отсчетов помехи равна оценке дисперсии D_ε помехи

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{2}(i\Delta t)=D_\varepsilon. \quad (6)$$

С учетом (5) и (6) для случая, когда между $\overset{\circ}{X}((i+\mu)\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ корреляция отсутствует, равенство (3) можно записать в виде

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{X}((i+\mu)\Delta t)+\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)+$$

$$+\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{X}((i+\mu)\Delta t)]+D_\varepsilon=R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu=0)+D_\varepsilon, \quad (7)$$

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu\neq 0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{X}((i+\mu)\Delta t)+$$

$$+\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{X}((i+\mu)\Delta t)]. \quad (8)$$

При выполнении условий стационарности и нормальности закона распределения, а также при отсутствии корреляции между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\varepsilon(t)$ имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\approx 0\\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+1)\Delta t)\approx 0\\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+2)\Delta t)\approx 0\end{aligned}\right\}. \quad (9)$$

Очевидно, что с уменьшением шага дискретизации Δt оценки $R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)$

$$\frac{1}{N}\sum\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{X}(i+\mu)\Delta t=R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0) \quad (10)$$

при $\mu=0$, $\mu=\Delta t$, $\mu=2\Delta t$ будут близкими величинами.

Экспериментальные исследования [1, 2] показали, что для реальных технологических параметров после определения частоты среза f_c по известной методике при выборе шага дискретизации Δt_ε по выражению

$$\Delta t_\varepsilon \le (10 \div 20)\frac{1}{f_c} \tag{11}$$

разности указанных оценок оказываются соизмеримыми с шагом квантования по уровню ΔX, который определяется по разрешающей способности измерительного прибора. Например, для аналого-цифрового преобразователя (АЦП) он равен весу младшего разряда [1, 2]. При стремлении времени наблюдения T к бесконечности и шага дискретизации Δt к нулю оценки $R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=0)$, $R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=\Delta t)$, $R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=2\Delta t)$ оказываются настолько близкими величинами, что можно считать справедливыми неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta t\to 0}} [R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=0)-R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=\Delta t)] \ll \Delta X \\ &\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta t\to 0}} [R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=\Delta t)-R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=2\Delta t)] \ll \Delta X \end{aligned}\right\}, \tag{12}$$

а также равенство

$$R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=0)-R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=\Delta t) \approx R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=\Delta t)-R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=2\Delta t). \tag{13}$$

Следовательно, с учетом равенств (7), (12) можно записать:

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=0) \approx R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=0)+D_\varepsilon, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=1) \approx R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=1) \\ R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=2) \approx R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu=2) \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

При этом с учетом (9), (13)–(15) имеем:

$$D_\varepsilon \approx R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=0)+R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=2)-2R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=1). \tag{16}$$

Иначе говоря, при выполнении условий (9), (13)–(15) выражение для определения дисперсии D_ε помехи $\varepsilon(t)$ можно представить в виде

$$D_\varepsilon \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{g}{}^2(i\Delta t)+\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\,\overset{\circ}{g}((i+2)\Delta t)-2\,\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\,\overset{\circ}{g}((i+1)\Delta t)]. \tag{17}$$

Теперь рассмотрим возможность использования этого выражения для определения приближенных величин отсчетов помехи $\varepsilon^*(i\Delta t)$.

Понятно, что если бы мы располагали величинам отсчетов помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ в цифровой форме, то могли бы определить дисперсию помехи по выражению (6).

Однако непосредственное выделение отсчетов помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ из отсчетов $g(i\Delta t)$ зашумленного сигнала невозможно. В то же время на основе формул (6) и (17) можно определить приближенные величины отсчетов помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ по выражению

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*(i\Delta t)=\sqrt{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2(i\Delta t)} \approx$$

$$\approx \sqrt{|\,\overset{\circ}{g}{}^2(i\Delta t)+\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\,\overset{\circ}{g}((i+2)\Delta t)-2\,\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\,\overset{\circ}{g}((i+1)\Delta t)\,|}. \tag{18}$$

Действительно, если по этой формуле определить оценки отсчетов $\varepsilon^*(i\Delta t)$, возвести их в квадрат, найти сумму, а затем разделить эту сумму на их количество, то согласно формуле (17) можно найти дисперсию помехи D_ε.

Принимая обозначение

$$\overset{\circ}{g}{}^2(i\Delta t)+\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+2)\Delta t)-2\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+1)\Delta t)=\varepsilon'(i\Delta t), \tag{19}$$

формулу (18) для определения приближенных величин отсчетов помехи можно представить в виде

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*(i\Delta t)=\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)\sqrt{|\overset{\circ}{g}{}^2(i\Delta t)+\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+2)\Delta t)-2\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+1)\Delta t)|}=$$

$$=\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)\sqrt{|\varepsilon'(i\Delta t)|}, \tag{20}$$

где $\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)$ представляет собой знак подкоренной величины.

Анализ выражений (18) и (20) показывает, что $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*(i\Delta t)$ будет отличаться от истинного значения $\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)$ на величину $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*(i\Delta t)-\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)$ и при этом будет иметь место равенство

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta t\to 0}} P\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*(i\Delta t)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\approx 0\right\}=1, \tag{21}$$

где P — знак вероятности.

Таким образом, используя приближенные величины отсчетов помехи $\varepsilon^*(i\Delta t)$, соответствующие формулы определения дисперсии помехи и полезного сигнала для случая, когда отсутствует корреляция $r_{x\varepsilon}$ между полезным сигналом $X(i\Delta t)$ и помехой $\varepsilon(i\Delta t)$, можно представить в виде

$$D_\varepsilon=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2(i\Delta t)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{*2}(i\Delta t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon'(i\Delta t), \tag{22}$$

$$D_x=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}{}^2(i\Delta t)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{g}(i\Delta t)-\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*(i\Delta t]^2=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{g}(i\Delta t)-\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)\sqrt{|\varepsilon'(i\Delta t)|}]^2. \tag{23}$$

Теперь рассмотрим возможность определения взаимно корреляционной функции между полезным сигналом и помехой. Отметим, что при этом интерес представляет только тот случай, когда $\mu=0$ и имеет место корреляция между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$. Это связано с тем, что согласно равенству (5) при $\mu\neq 0$ корреляция между ними заведомо равна нулю. Очевидно, что с учетом выражений (17)–(20) формулы для определения приближенной величины оценки $R_{X\varepsilon}(\mu=0)$ можно представить так:

$$R_{X\varepsilon}(\mu=0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}{}^*(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*(i\Delta t)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{g}(i\Delta t)-\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)\sqrt{|\varepsilon'(i\Delta t)|}]\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)\sqrt{|\varepsilon'(i\Delta t)|}. \tag{24}$$

Очевидно, зная оценку дисперсии зашумленного сигнала $g(i\Delta t)$ и помехи $\varepsilon(i\Delta t)$, формулу для вычисления дисперсии полезного сигнала также можно представить в виде

$$D_X=D_g-D_\varepsilon. \tag{25}$$

Понятно, что после вычисления оценок $R_{\varepsilon\varepsilon}(0)$ и $R_{xx}(0)$ по формулам (17), (24) и (25) можно вычислить оценки коэффициента корреляции по известному алгоритму:

$$r^*_{x\varepsilon} \approx \frac{R_{x\varepsilon}(0)}{\sqrt{R_{xx}(0)R_{\varepsilon\varepsilon}(0)}} = \frac{R_{x\varepsilon}(0)}{\sqrt{D_x(0)\cdot D_\varepsilon(0)}}. \qquad (26)$$

Возможности современных средств информатики позволяют достаточно легко реализовать выражения (17), (24)–(26). Однако, несмотря на это, учитывая важность определения этих оценок для повышения надежности и эффективности функционирования систем контроля и управления, во многих отраслях науки и техники наряду с рассматриваемой технологией также целесообразно создавать легкореализуемые и надежные альтернативные вычислительные технологии.

ТЕХНОЛОГИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНКИ ВЗАИМНО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ И КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ ПО ОЦЕНКАМ ЗНАКОВЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим возможность определения оценки коэффициента корреляции $r^*_{X\varepsilon}$ между полезным сигналом и помехой с помощью знаковых корреляционных функций $R^*_{XX}(0)$, $R^*_{X\varepsilon}(0)$, $R^*_{\varepsilon\varepsilon}(0)$, которые можно определить по выражениям:

$$R^*_{X\varepsilon}(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} \overset{\circ}{X}(i\Delta t)\operatorname{sgn} \overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t), \qquad (27)$$

$$R^*_{XX}(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} \overset{\circ}{X}(i\Delta t)\operatorname{sgn} \overset{\circ}{X}(i\Delta t), \qquad (28)$$

$$R^*_{\varepsilon\varepsilon}(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} \overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\operatorname{sgn} \overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t). \qquad (29)$$

При этом $r^*_{X\varepsilon}$ можно вычислить по формуле

$$r^*_{x\varepsilon} = \frac{R^*_{x\varepsilon}(0)}{\sqrt{R^*_{xx}(0)R^*_{\varepsilon\varepsilon}(0)}}. \qquad (30)$$

Учитывая, что оценки $R^*_{XX}(0)$, $R^*_{\varepsilon\varepsilon}(0)$ при вычислении по формулам (27), (29) будут равны единице, т.е. $R^*_{XX}(0)=1$, $R^*_{\varepsilon\varepsilon}(0)=1$, формулу (30) можно представить в виде

$$r^*_{X\varepsilon} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} \overset{\circ}{X}(i\Delta t)\operatorname{sgn} \overset{\circ}{\varepsilon}{}^*(i\Delta t). \qquad (31)$$

Принимая во внимание равенство

$$\operatorname{sgn} \overset{\circ}{g}(i\Delta t) \approx \operatorname{sgn} \overset{\circ}{X}(i\Delta t), \qquad (32)$$

формулу вычисления коэффициента корреляции $r_{g\varepsilon}$ между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ можно представить в виде

$$r^*_{g\varepsilon} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} \overset{\circ}{g}(i\Delta t)\operatorname{sgn} \overset{\circ}{\varepsilon}{}^*(i\Delta t). \qquad (33)$$

Очевидно, что для реализации выражения (33) необходимо определить знаки отсчетов помехи $\varepsilon(i\Delta t)$. Для этой цели целесообразно использовать знаки приращения отсчетов $g(i\Delta t)$, поскольку по знаку приращения отсчетов $g(i\Delta t)$, который вычисляется выражением

$$\operatorname{sgn} \Delta g(i\Delta t) = \operatorname{sgn} [\overset{\circ}{g}(i\Delta t) - \overset{\circ}{g}(i-1)\Delta t], \tag{34}$$

при шаге дискретизации Δt_ε можно определить знак отсчета помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)$. Анализ формирования реальных технологических параметров и результатов дискретизации как самих отсчетов $\overset{\circ}{g}(i\Delta t) = \overset{\circ}{X}(i\Delta t) + \overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)$, так и их приращений

$$\Delta g(i\Delta t) = \overset{\circ}{g}(i\Delta t) - \overset{\circ}{g}(i-1)\Delta t \tag{35}$$

показывает, что, уменьшая шаг квантования по времени Δt до величины Δt_ε, соответствующей необходимому шагу дискретизации помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}(t)$, можно обеспечить выполнение приближенного равенства

$$\lim_{\Delta t \to 0} \overset{\circ}{X}(i\Delta t) \approx \lim_{\Delta t \to 0} \overset{\circ}{X}((i-1)\Delta t). \tag{36}$$

При этом формулу для определения знака $\varepsilon(i\Delta t)$ по величине приращения $\Delta g(i\Delta t)$ можно представить в виде

$$\Delta g(i\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} [\overset{\circ}{X}(i\Delta t) + \overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)] - \lim_{\Delta t \to 0} [\overset{\circ}{X}((i-1)\Delta t) + \overset{\circ}{\varepsilon}((i-1)\Delta t)] =$$
$$= \overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t) - \overset{\circ}{\varepsilon}((i-1)\Delta t) = \Delta \varepsilon(i\Delta t). \tag{37}$$

Равенства (34)–(37) показывают, что за время Δt_ε величина приращения $\Delta g(i\Delta t)$ по существу представляет собой величину приращения $\Delta \varepsilon(i\Delta t)$ помехи. Следовательно, при дискретизации сигнала $\overset{\circ}{g}(i\Delta t)$ с шагом квантования Δt_ε по знаку приращения $\Delta g(i\Delta t)$ каждого отсчета $\overset{\circ}{g}(i\Delta t)$ можно определить знак помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)$ по выражению

$$\operatorname{sgn} \varepsilon^* (i\Delta t) \approx \operatorname{sgn} \Delta g(i\Delta t) = \begin{cases} + & \text{при } (\overset{\circ}{g}(i\Delta t) - \overset{\circ}{g}(i-1)\Delta t) \geq 0, \\ - & \text{при } (\overset{\circ}{g}(i\Delta t) - \overset{\circ}{g}(i-1)\Delta t) \leq 0. \end{cases} \tag{38}$$

Формулу (33) для определения коэффициента корреляции $r^*_{x\varepsilon}$ между полезным сигналом $\overset{\circ}{X}(i\Delta t)$ и помехой $\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)$ можно представить в виде

$$r^*_{x\varepsilon} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} \overset{\circ}{X}(i\Delta t) \operatorname{sgn} \Delta g(i\Delta t), \tag{39}$$

$$r^*_{x\varepsilon} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} \overset{\circ}{g}(i\Delta t) \operatorname{sgn} \Delta g(i\Delta t). \tag{40}$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ОЦЕНОК $R_{X\varepsilon}(\mu = 0)$ И $r_{x\varepsilon}$ ПРИ НАЛИЧИИ КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ $X(i\Delta t)$ И $\varepsilon(i\Delta t)$

Учитывая важность определения взаимно корреляционной функции $R_{X\varepsilon}(\mu = 0)$ и коэффициента корреляции $r_{x\varepsilon}$ между полезным сигналом $X(i\Delta t)$ и помехой $\varepsilon(i\Delta t)$ при решении многочисленных прикладных задач контроля, диагностики и управления рассмотрим еще один из возможных вариантов приближенного вычисления их оценок. Для этого известное выражение

$$D_g = R_{gg}(\mu = 0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(i\Delta t) g(i\Delta t) \qquad (41)$$

представим в виде

$$R_{gg}(\mu = 0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} [X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)]^2. \qquad (42)$$

Понятно, что, раскрывая скобки, получим

$$R_{gg}(\mu = 0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X^2(i\Delta t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 2[X(i\Delta t)\cdot\varepsilon(i\Delta t)] + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^2(i\Delta t). \qquad (43)$$

Принимая обозначения

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X^2(i\Delta t) = R_{XX}(\mu = 0), \qquad (44)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 2[X(i\Delta t)\varepsilon(i\Delta t)] = 2R_{X\varepsilon}(\mu = 0), \qquad (45)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^2(i\Delta t) = R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu = 0) = D_\varepsilon, \qquad (46)$$

получаем

$$R_{gg}(\mu = 0) = R_{XX}(\mu = 0) + 2R_{X\varepsilon}(\mu = 0) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu = 0). \qquad (47)$$

Следовательно, $R_{X\varepsilon}(\mu = 0)$ можно определить из выражения

$$2R_{X\varepsilon}(\mu = 0) = R_{gg}(\mu = 0) - R_{XX}(\mu = 0) - R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu = 0), \qquad (48)$$

в котором для вычисления оценки $R_{X\varepsilon}(\mu = 0)$ требуется определение $R_{gg}(\mu = 0)$, $R_{XX}(\mu = 0)$ и $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu = 0)$. Из этих трех характеристик определение $R_{XX}(\mu = 0)$ при наличии корреляции между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ невозможно.

В [1–4] показано, что при соответствующем выборе шага дискретизации Δt_ε можно считать справедливыми приближенные равенства:

$$R_{gg}(\mu = 1) \approx R_{XX}(\mu = 1), \qquad (49)$$

$$R_{gg}(\mu = 2) \approx R_{XX}(\mu = 2), \qquad (50)$$

$$R_{gg}(\mu = 3) \approx R_{XX}(\mu = 3), \qquad (51)$$

$$\Delta R_{gg}(\mu = 1) = R_{gg}(\mu = 0) - R_{gg}(\mu = 1), \qquad (52)$$

$$\begin{gathered}\Delta R_{gg}(\mu = 2) = R_{gg}(\mu = 1) - R_{gg}(\mu = 2) \approx \\ \approx R_{XX}(\mu = 1) - R_{XX}(\mu = 2) = \Delta R_{XX}(\mu = 2),\end{gathered} \qquad (53)$$

$$\begin{gathered}\Delta R_{gg}(\mu = 3) = R_{gg}(\mu = 2) - R_{gg}(\mu = 3) \approx \\ \approx R_{XX}(\mu = 2) - R_{XX}(\mu = 3) = \Delta R_{XX}(\mu = 3),\end{gathered} \qquad (54)$$

$$\Delta R_{gg}(\mu = 2) \approx \Delta R_{XX}(\mu = 2) \approx \Delta R_{XX}(\mu = 1), \qquad (55)$$

$$\Delta R_{gg}(\mu = 3) \approx \Delta R_{XX}(\mu = 3) \approx \Delta R_{XX}(\mu = 2). \qquad (56)$$

В силу равенств (52)–(56) можно записать

$$R_{XX}(\mu = 0) = R_{XX}(\mu = 1) + \Delta R_{XX}(\mu = 1), \qquad (57)$$

$$R_{XX}(\mu = 0) = R_{XX}(\mu = 1) + \Delta R_{XX}(\mu = 2). \qquad (58)$$

С учетом выражений (48)–(58) имеем

$$\begin{gathered}R_{XX}(\mu = 0) \approx R_{XX}(\mu = 1) + \Delta R_{XX}(\mu = 1) \approx \\ \approx R_{gg}(\mu = 1) + [R_{gg}(\mu = 2) - R_{gg}(\mu = 3)].\end{gathered} \qquad (59)$$

Следовательно, выражение (47) можно представить в виде

$$R_{gg}(\mu=0)=R_{gg}(\mu=1)+[R_{gg}(\mu=2)-R_{gg}(\mu=3)]+$$
$$+2R_{X\varepsilon}(\mu=0)+R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu=0). \qquad (60)$$

Используя его, выражение (48) преобразуем к виду

$$R_{X\varepsilon}(\mu=0)\approx$$
$$\approx\frac{1}{2}[R_{gg}(\mu=0)-[R_{gg}(\mu=1)+(R_{gg}(\mu=2)-R_{gg}(\mu=3))]-R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu=0)]. \qquad (61)$$

В этом выражении вычисление оценок $R_{gg}(\mu=0)$, $R_{gg}(\mu=1)$, $R_{gg}(\mu=2)$ проводится по традиционному алгоритму, а оценка D_ε достаточно легко вычисляется по выражению (16) или (17). Поэтому с точки зрения надежности и удобства реализации формула (61) по сравнению с ранее рассмотренными технологиями имеет явное преимущество. Понятно, что после определения $R_{XX}(\mu=0)$, $R_{X\varepsilon}(\mu=0)$ и D_ε коэффициент корреляции $r_{X\varepsilon}$ можно достаточно легко вычислить по формуле

$$r_{X\varepsilon}\approx\frac{R_{X\varepsilon}}{\sqrt{R_{XX}(\mu=0)D_\varepsilon}}. \qquad (62)$$

В заключение отметим, что при функционировании реальных систем контроля и управления большое практическое значение имеет мониторинг скрытого периода появления коррекции между полезным сигналом и помехой технологических параметров. Поэтому на практике достаточно часто требуется только определение наличия или отсутствия корреляции между полезным сигналом и помехой. Понятно, что, применяя формулу (61), на этот вопрос можно ответить достаточно легко. Эта процедура выполняется в такой последовательности:

1) по формуле (3) определяются оценки $R_{gg}(\mu=0)$, $R_{gg}(\mu=1)$, $R_{gg}(\mu=2)$, $R_{gg}(\mu=3)$;

2) по формуле (17) определяется оценка дисперсии помехи D_ε;

3) используя найденные оценки, по выражению

$$[R_{gg}(\mu=0)+R_{gg}(\mu=2)-R_{gg}(\mu=1)-R_{gg}(\mu=3)-D_\varepsilon]\geq 0 \qquad (63)$$

проверяется наличие или отсутствие корреляции между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$.

Если выполняется неравенство (63), то $R_{X\varepsilon}(0)\neq 0$ и $r_{X\varepsilon}\neq 0$, т.е. между $X(t)$ и $\varepsilon(t)$ существует корреляция.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В реальных объектах контроля во многих случаях технологические параметры, получаемые на выходах соответствующих датчиков, содержат помехи. В системах контроля и управления для устранения их влияния на результат анализа применяют различные методы фильтрации. Исследования [1, 2] показали, что это не всегда себя оправдывает, так как в некоторых случаях помехи несут в себе достаточно важную диагностическую информацию. Поэтому в системах контроля и управления для таких объектов наряду с применением традиционных технологий анализа измерительной информации целесообразно также осуществить раздельный анализ помехи и полезного сигнала. Возможность реализации такого варианта подробно рассмотрена в [1–4]. Однако, к сожалению, предлагаемые там технологии определения таких важных характеристик, как взаимно корреляционная функция и коэффициент корреляции между полезным сигналом и помехой на практике труднореализуемые. Учитывая это, в данной работе рассмотрены различные возможные варианты определения указанных оценок, анализируются их преимущества и недостатки. Для практического применения предлагаются легкореализуемые технологии приближенного определения оценок взаимно корреляционных функций и коэффициентов корреляции между полезным сигналом и помехой технологических параметров, получаемых на выходе соответствующих первичных датчиков в процессе эксплуатации объектов.

Важность предложенной технологии связана еще с тем, что для случаев, когда оценки рассматриваемых характеристик анализируемых сигналов отличаются от нуля, применение традиционных технологий приводит к заведомо ошибочным результатам. Следовательно, обеспечение надежности функционирования систем контроля и управления указанных объектов возможно путем регулярного контроля соблюдения условий отсутствия корреляции между полезным сигналом и помехой. В те периоды времени, когда это условие не выполняется, для анализа измерительной информации целесообразно применять робастную технологию в сочетании с технологией анализа помехи, которая приведена в работах [1–4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aliev T.A. Robust technology with analysis of interference in signal processing. — New York: Kluwer Academ. Publ., 2003. — 199 p.
2. Aliev T.A. Digital noise monitoring of defect origin. — London: Springer-Verlag, 2007. — 235 p.
3. Алиев Т.А., Мусаева Н.Ф. Алгоритм исключения микропогрешностей помехи при решении задач статистической динамики // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 5. — С. 82–94.
4. Алиев Т.А., Мусаева Н.Ф. Алгоритм улучшения адекватности статистической идентификации // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 3. — С. 37–42.
5. Collacott R.A. Structural integrity monitoring. — London: Kluwer, 1985. — 474 p.
6. Bendat J.S., Piersol A.G. Random data, analysis & measurement procedures. — New York; London; Sydney: Wiley-Interscience, 2000 — 640 p.
7. Bulychev Yu.G., Lapsar A.P. Technical object monitoring and control under conditions of structural uncertainty with an extended measurement model // Measurement Techniques. — 2009. — **52**, N 3. — P. 237–249.
8. Wang L., Gao R.X. Condition monitoring and control for intelligent manufacturing // Springer Series in Advanced Manufacturing. — 2006. — **20**. — 399 p.

Поступила 29.01.2010