УДК 519.217

Е.А. ЛЕБЕДЕВ, В.Д. ПОНОМАРЁВ

О СИСТЕМАХ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Ключевые слова: *стохастическая система, повторные вызовы, стационарный режим.*

Система с повторными вызовами представляет собой модель обслуживающего устройства, у которого очередь требований имеет особую организацию. Считается, что требования, которые не получили доступа к обслуживающим приборам в момент поступления в систему, находятся на орбите (см. [1]). Все требования на орбите равноправны, неупорядочены и независимо друг от друга через случайное время (цикл орбиты) опрашивают обслуживающие приборы системы. Если в момент обращения есть свободные приборы, то требование занимает любой свободный прибор, обслуживается и покидает систему. В противном случае оно остается на орбите и повторяет попытки получить обслуживание. Требование, которое первый раз получает отказ в обслуживании и переходит на орбиту, может не иметь никакой информации о количестве требований на орбите в данный момент времени. Например, это реально происходит в сетях телефонной связи, когда абонент использует кнопку «redial».

Классическую систему с повторными вызовами можно рассматривать как стохастическую сеть обслуживания с двумя узлами. Главный узел, куда извне поступает поток первичных требований, содержит обслуживающие приборы и при наличии свободных приборов осуществляет обслуживание требований. Если свободных приборов нет, то требование блокируется и из главного узла передается во вспомогательный узел. В нем собраны требования, которые находятся на орбите, и происходит процесс повторов. При удачном повторе требование поступает на обслуживание в главный узел. Иногда, для того чтобы приблизить математическую модель к реально действующей системе, учесть особенности структуры и управляющего алгоритма, необходимо в стохастическую сеть вводить больше двух узлов.

Таким образом, процесс обслуживания в системе с повторами становится многомерным и поэтому более сложным для анализа, чем для системы без повторов (см. [2]). Однако эти сложности удалось преодолеть и построить содержательную теорию систем с повторными вызовами. Исходя из монографии [3] и обширной библиографии, которая в ней приведена, можно составить представление о современном ее состоянии. Развитие этой теории стимулируется применениями во многих областях деятельности: сети телефонной и мобильной телефонной связи, call-центры и локальные компьютерные сети, взлетно-посадочная служба аэропорта. Примеры применений моделей систем с повторами в перечисленных и других областях можно найти в [4, 5].

Одно из важных применений моделей с повторными вызовами состоит в том, что с их помощью можно ставить и решать задачи выбора оптимальных параметров системы. В процессе решения этих задач необходимо изучать модели, у которых локальные характеристики процесса обслуживания зависят от текущего фазового состояния системы. В этих условиях становится неприменимым такой метод исследования, как метод производящих функций, который хорошо зарекомендовал себя для классических моделей (см., например, [6]). В данной работе для систем с переменной интенсивностью обслуживания развивается аппроксимативный подход. Он состоит в том, что сначала изучается усеченная, конечная модель. Затем найденные характеристики конечной модели используются для аппроксимации их аналогов в исходной модели. Рассматривается также вопрос о точности аппроксимации.

1. МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ИСХОДНОЙ И УСЕЧЕННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим цепь Маркова с непрерывным временем $X(t)=(C(t); N(t))$, где $C(t)\in 0,1,\ldots,c,\ \ N(t)\in 0,1,\ldots$, которая задается инфинитезимальными характеристиками $a_{(i,j)(i',j')}$, $(i,j),(i',j')\in S(X)=\{0,1,\ldots,c\}\times\{0,1,\ldots\}$:

1) если $i=0,1,\ldots,c-1$, то

$$a_{(i,j)(i',j')}=\begin{cases}\lambda & \text{при } (i',j')=(i+1,j),\\ j\mu & \text{при } (i',j')=(i+1,j-1),\\ i\nu_j & \text{при } (i',j')=(i-1,j),\\ -[\lambda+j\mu+i\nu_j] & \text{при } (i',j')=(i,j),\\ 0 \text{ в противном случае;}\end{cases}$$

2) если $i=c$, то

$$a_{(c,j)(i',j')}=\begin{cases}\lambda & \text{при } (i',j')=(c,j+1),\\ c\nu_j & \text{при } (i',j')=(c-1,j),\\ -[\lambda+c\nu_j] & \text{при } (i',j')=(c,j),\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Цепь Маркова $X(t)$ описывает процесс обслуживания в системе с повторными вызовами, которая функционирует следующим образом. Входящий поток требований пуассоновский с параметром λ. Требования обслуживаются c одинаковыми приборами. Если на момент поступления есть свободные приборы, то требование занимает любой из них. Время обслуживания — показательно распределенная случайная величина с параметром ν_j, который зависит от j — числа требований на орбите в текущий момент. Если все приборы заняты, то требование переходит на орбиту и повторяет попытку получить обслуживание через случайное время, которое имеет показательное распределение с параметром μ. Количество занятых приборов задается первой компонентой процесса $X(t)$, а количество требований на орбите — второй.

Относительно параметров будем требовать: $\lambda,\mu,\nu_j>0,\ j=0,1,\ldots$, что не ограничивает применимости модели на практике.

Выясним условия существования стационарного режима для процесса $X(t),\ t>0$.

Лемма 1. Пусть $\nu=\varliminf\limits_{j\to\infty}\nu_j$. Тогда при $\dfrac{\lambda}{c\nu}<1$ цепь $X(t)$ эргодична и ее предельное распределение π_{ij}, $(i,j)\in S(X)$, совпадает с единственным стационарным.

Доказательство. В качестве тест-функций Ляпунова рассмотрим функции вида

$$\varphi(i,j)=\alpha i+j,\ \ (i,j)\in S(X),$$

где параметр α будет определен далее.

Для указанных тест-функций средний перенос

$$y_{ij}=\sum_{(i',j')\neq(i,j)}a_{(i,j)(i',j')}(\varphi(i',j')-\varphi(i,j))$$

составит

$$y_{ij}=\begin{cases}\lambda\alpha-i\nu_j\alpha+j\mu(\alpha-1),\ 0\le i\le c-1,\\ \lambda-c\nu_j\alpha,\ i=c.\end{cases}$$

При $\frac{\lambda}{c\nu}<1$ для любого $\alpha\in\left(\frac{\lambda}{c\nu},1\right)$ существует такое $\varepsilon>0$, что $y_{ij}<-\varepsilon$ для всех $(i,j)\in S(X)$, за исключением конечного числа состояний (i,j). Таким образом, для тест-функций $\varphi(i,j)=\alpha i+j$, $\alpha\in\left(\frac{\lambda}{c\nu},1\right)$, выполняются условия теоремы Твиди [6, с. 97].

Лемма доказана.

Определим усеченную систему с повторными вызовами. Она функционирует аналогичным образом, но имеет орбиту ограниченной емкости M. Формально функционирование такой системы описывается цепью Маркова $X(t,M)=$ $=(C(t,M);N(t,M))$, где $C(t,M)\in 0,1,\ldots,c$, $N(t,M)\in 0,1,\ldots,M$, с инфинитезимальными характеристиками $a^{(M)}_{(i,j)(i',j')}$, (i,j), $(i',j')\in S(X,M)=\{0,1,\ldots,c\}\times$ $\times\{0,1,\ldots,M\}$:

если $i=0,1,\ldots,c-1$, $j=0,1,\ldots,M$, то

$$a^{(M)}_{(i,j)(i',j')}=\begin{cases}\lambda & \text{при } (i',j')=(i+1,j),\\ j\mu & \text{при } (i',j')=(i+1,j-1),\\ i\nu_j & \text{при } (i',j')=(i-1,j),\\ -[\lambda+j\mu+i\nu_j] & \text{при } (i',j')=(i,j),\\ 0 & \text{в противном случае;}\end{cases}$$

если $i=c$, $j=0,1,\ldots,M-1$, то

$$a^{(M)}_{(c,j)(i',j')}=\begin{cases}\lambda & \text{при } (i',j')=(c,j+1),\\ c\nu_j & \text{при } (i',j')=(c-1,j),\\ -[\lambda+c\nu_j] & \text{при } (i',j')=(c,j),\\ 0 & \text{в противном случае;}\end{cases}$$

если $i=c$, $j=M$, то

$$a^{(M)}_{(c,M)(i',j')}=\begin{cases}c\nu_M & \text{при } (i',j')=(c-1,M),\\ -c\nu_M & \text{при } (i',j')=(c,M),\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Так как фазовое пространство $S(X,M)$ цепи Маркова $X(t,M)$ конечно, то для $X(t,M)$ всегда существует стационарный режим и $\pi_{ij}(M)$, $(i,j)\in S(X,M)$ будет обозначать его стационарные вероятности.

2. АППРОКСИМАТИВНЫЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Стационарные вероятности исходной системы π_{ij}, $(i,j)\in S(X)$, удовлетворяют системе уравнений Колмогорова

$$[\lambda+j\mu+i\nu_j]\pi_{ij}=(j+1)\mu\pi_{i-1j+1}+\lambda\pi_{i-1j}+(i+1)\nu_j\pi_{i+1j},\ i=0,\ldots,c-1, \quad (1)$$

$$[\lambda+c\nu_j]\pi_{cj}=(j+1)\mu\pi_{c-1j+1}+\lambda\pi_{c-1j}+\lambda\pi_{cj-1} \quad (2)$$

и условию нормировки $\sum_{i=0}^{c}\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{ij}=1.$

Выполнение условий леммы 1 гарантирует, что система уравнений (1), (2) имеет единственное решение. Однако при $c>2$ даже в случае $\nu_j=\nu$, $j=0,1,\ldots$, нет явных выражений для π_{ij} через параметры системы. Поэтому аппроксимируем эти вероятности стационарными вероятностями $\pi_{ij}(M)$, $(i, j) \in S(X, M)$, усеченной системы, которые удовлетворяют конечной системе уравнений Колмогорова:

$$[\lambda + j\mu + i\nu_j]\pi_{ij}(M) = (j+1)\mu\pi_{i-1\,j+1}(M) + \lambda\pi_{i-1\,j}(M) + (i+1)\nu_j\pi_{i+1\,j}(M), \quad (3)$$

$$j = 0, \dots, M-1, \ i = 0, \dots, c-1,$$

$$[\lambda + M\mu + i\nu_M]\pi_{iM}(M) = \lambda\pi_{i-1\,M}(M) + (i+1)\nu_M\pi_{i+1\,M}(M), \ i = 0, \dots, c-1, \quad (4)$$

$$[\lambda + c\nu_j]\pi_{cj}(M) = (j+1)\mu\pi_{c-1\,j+1}(M) +$$
$$+\lambda\pi_{c-1\,j}(M) + \lambda\pi_{cj-1}(M), \ j = 0, \dots, M-1, \quad (5)$$

$$c\nu_M\pi_{cM}(M) = \lambda\pi_{c-1\,M}(M) + \lambda\pi_{cM-1}(M), \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^{c}\sum_{j=0}^{M}\pi_{ij}(M) = 1.$$

Для того чтобы записать решение системы (3)–(6), введем обозначения:

$$e_i(c) = (\delta_{i0}, \delta_{i1}, \dots \delta_{ic-1})^{\mathrm{T}}, \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j, \\ 0, \ i \neq j; \end{cases}$$

$1(c)$ — вектор размерности c, составленный из 1;

$$A_j = \| a_{ik}^j \|_{i,k=0}^{c-1},$$

где $a_{ik}^j = \begin{cases} -\lambda, & k = i-1, \\ \lambda + j\mu + i\nu_j, & k = i, \\ -(i+1)\nu_j, & k = i+1, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$ если $i \neq 0, c-1$.

При $i = 0$
$$a_{0k}^j = \begin{cases} \lambda + j\mu, \ k = i, \\ -\nu_j, \ k = i+1, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

а при $i = c-1$
$$a_{c-1k}^j = \begin{cases} -\lambda, & k = c-2, \\ \lambda + j\mu + (c-1)\nu_j, & k = c-1, \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$B_j = \| b_{ik}^j \|_{i,k=0}^{c-1}$, где $b_{ik}^j = \begin{cases} (j+1)\mu, \ k = i-1, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$ если $i \neq 0, c-1$.

При $i = 0$ имеем $b_{ik}^j = 0, \ k = 0, 1, \dots, c-1$, а при $i = c-1$

$$b_{c-1k}^j = \begin{cases} \dfrac{c(j+1)\mu\nu_j}{\lambda}, \ k \neq c-2, \\ \dfrac{(j+1)\mu[\lambda + c\nu_j]}{\lambda}, \quad k = c-2, \end{cases}$$

$C = \| c_{ik} \|_{i,k=0}^{c-1}$, $c_{ik} = \begin{cases} 1, \quad k = 0, \ i = 0, \\ a_{i-1k}^M \text{ в противном случае;} \end{cases}$ $\Phi_j = \left(\prod_{i=j}^{M-1} A_i^{-1} B_i \right) C^{-1} e_0(c).$

Лемма 2. Матрицы A_j, $j=0,1,\ldots,M$, невырожденные.

Доказательство. Проверим условие Адамара для столбцов матриц A_j, $j=0,1,\ldots,M$ [7 с. 406]:

$$G_i^j \equiv |a_{ii}^j| - \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{c-1} |a_{ki}^j| > 0, \; i=0,\ldots,c-1, \tag{7}$$

$$G_i^j = \lambda + j\mu + i\nu_j - i\nu_j - \lambda = j\mu, i=0,\ldots,c-2,$$

$$G_{c-1}^j = \lambda + j\mu + (c-1)\nu_j - (c-1)\nu_j = \lambda + j\mu.$$

Условие (7) выполняется для всех $j=1,\ldots,M$, что означает невырожденность матриц A_j, $j=1,\ldots,M$. Так как A_0 — неразложимая матрица и для нее выполняется ослабленное условие Адамара, то A_0 тоже невырожденная.
Лемма доказана.

Вероятности $\pi_{ij}(M)$, $(i,j)\in S(X,M)$, можно записать в явной форме через параметры системы.

Теорема 1. Стационарные вероятности усеченной системы имеют вид

$$\pi_j(M) = \Phi_j \pi_{0M}(M), \; j=0,\ldots,M,$$

$$\pi_{cj}(M) = \frac{(j+1)\mu}{\lambda} 1^{\mathrm{T}}(c)\Phi_{j+1}\pi_{0M}(M), \; j=0,\ldots,M-1,$$

$$\pi_{cM}(M) = \frac{\lambda e_{c-1}^{\mathrm{T}}(c) + M\mu 1^{\mathrm{T}}(c)}{c\nu_M} C^{-1} e_0(c)\pi_{0M}(M),$$

где

$$\pi_j(M) = (\pi_{0j}(M) \;\; \pi_{1j}(M) \; \ldots \; \pi_{c-1j}(M))^{\mathrm{T}},$$

$$\pi_{0M}(M) = \left\{ \sum_{j=0}^{M} \left(1 + \frac{j\mu}{\lambda}\right) 1^{\mathrm{T}}(c)\Phi_j + \frac{\lambda e_{c-1}^{T}(c) + M\mu 1^{\mathrm{T}}(c)}{c\nu_M} \Phi_M \right\}^{-1}.$$

Доказательство. Для поиска $\pi_{ij}(M)$ используем теорему о равенстве потока вероятностей через границу замкнутой области в стационарном режиме [8, с. 49] . Для каждого $j=1,2,\ldots,M$ построим разбиение фазового пространства $S(X,M) = S_j^{(1)}(X,M) \cup \bar{S}_j^{(1)}(X,M)$, $S_j^{(1)}(X,M) = \{(p,q)\in S(X,M) : q \le j\}$. Сравнивая потоки вероятностей через границу области $S_j^{(1)}(X,M)$, находим

$$\lambda\pi_{cj-1}(M) = j\mu \sum_{i=0}^{c-1} \pi_{ij}(M), \; j=1,\ldots,M. \tag{8}$$

Перепишем уравнение (3) в виде

$$-\lambda\pi_{i-1j}(M) + [\lambda + j\mu + i\nu_j]\pi_{ij}(M) - (i+1)\nu_j \pi_{i+1j}(M) = (j+1)\mu\pi_{i-1j+1}(M),$$
$$j=0,\ldots,M-1, \; i=0,\ldots,c-2. \tag{9}$$

Из (8) найдем вероятность $\pi_{cj}(M)$ и подставим в (3) при $i=c-1$. Получим

$$-\lambda\pi_{c-2j}(M) + [\lambda + j\mu + (c-1)\nu_j]\pi_{c-1j}(M) = \frac{(j+1)c\mu\nu_j}{\lambda} \sum_{\substack{i=0\\i\neq c-2}}^{c-1} \pi_{ij+1}(M) +$$
$$+ \frac{(j+1)\mu[\lambda + c\nu_j]}{\lambda} \pi_{c-2j+1}(M), \; j=0,\ldots,M-1. \tag{10}$$

Систему уравнений (9), (10) запишем в векторно-матричной форме

$$A_j \pi_j(M) = B_j \pi_{j+1}(M), \; j = 0, \ldots, M-1.$$

Из последнего уравнения находим, что

$$\pi_j(M) = \left(\prod_{i=j}^{M-1} A_i^{-1} B_i \right) \pi_M(M), \quad j = 0, \ldots, M-1. \tag{11}$$

Дополним систему уравнений (4) при $i = 0, 1, \ldots, c-2$ равенством $\pi_{0M}(M) = = \pi_{0M}(M)$ и запишем в векторно-матричной форме

$$C\pi_M(M) = e_0(c)\pi_{0M}(M).$$

Так как $|C| = (-1)^{c-1}(c-1)!\,\nu_M^{c-1} \neq 0$, то C^{-1} существует и

$$\pi_M(M) = C^{-1} e_0(c) \pi_{0M}(M). \tag{12}$$

Окончательно из уравнений (11), (12) получаем

$$\pi_j(M) = \left(\prod_{i=j}^{M-1} A_i^{-1} B_i \right) C^{-1} e_0(c) \pi_{0M}(M), \; j = 0, \ldots, M.$$

Подставив вероятности $\pi_{j+1}(M)$ в уравнение (8), находим $\pi_{cj}(M)$, $j = 0, \ldots, M-1$. Вероятность $\pi_{cM}(M)$ получаем из (6), а вероятность $\pi_{0M}(M)$ — из условия нормировки.

Теорема доказана.

Подобные результаты получены в [9] для систем з повторными вызовами и ограниченным числом источников первичных требований.

3. ОБОСНОВАНИЕ АППРОКСИМАЦИИ И ОЦЕНКИ

Интуитивно понятно, что при $M \to \infty$ характеристики усеченной системы аппроксимируют их аналоги в исходной модели. Чтобы строго доказать этот факт, используем отношение стохастической упорядоченности для распределений. В монографии [6] приведены результаты о стохастической упорядоченности двумерных процессов миграции. Применим эти результаты к процессам обслуживания в исходной и усеченной системах.

Лемма 3. Пусть выполнено условие леммы 1. Тогда:

1) если $X(0, M) \le_{st} X(0)$, то $X(t, M) \le_{st} X(t)$ для всех $t \ge 0$ и $X(M) \le_{st} X$, где $X = (C, N)$, $X(M) = (C(M), N(M))$ — случайные векторы, распределения которых совпадают с π_{ij}, $(i, j) \in S(X)$, и $\pi_{ij}(M)$, $(i, j) \in S(X, M)$, соответственно;

2) если $X(0, M) \le_{st} X(0, M+1)$, то $X(t, M) \le_{st} X(t, M+1)$ для всех $t \ge 0$ и $X(M) \le_{st} X(M+1)$.

Непосредственным следствием этой леммы есть следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнено условие леммы 1. Тогда для любых $(i, j) \in S(X)$ $\pi_{ij} = \lim\limits_{M \to \infty} \pi_{ij}(M)$.

В силу монотонности по M процессам обслуживания в усеченных моделях (п. 2 леммы 3), по заданной точности можно подбирать M, которое обеспечит эту точность. При дополнительных условиях на характер зависимости интенсивности обслуживания от числа требований на орбите можно строить верхние оценки. Получим ряд результатов в этом направлении.

Лемма 4. Если выполняются условия леммы 1, то

$$E(\nu_N C) = \lambda, \tag{13}$$

$$E(\nu_{N(M)} C(M)) = \lambda - \lambda\pi_{cM}(M). \tag{14}$$

Доказательство. Докажем первую часть леммы (вторая устанавливается аналогично).

Введем производящие функции $\pi_j(x) = \sum_{i=0}^{c} x^i \pi_{ij}$, $j = 0, 1, \ldots$ Тогда (1), (2) можно преобразовать в систему уравнений для производящих функций

$$(\lambda + j\mu - \lambda x)\pi_j(x) + \nu_j(x-1)\pi'_j(x) - (j+1)\mu x \pi_{j+1}(x) =$$
$$= x^c[\lambda\pi_{cj-1} + j\mu\pi_{cj}] - x^{c+1}[\lambda\pi_{cj} + (j+1)\mu\pi_{cj+1}],\ j = 0, 1, \ldots \tag{15}$$

Продифференцируем равенство (15) в точке $x = 1$:

$$-\lambda\pi_j(1) + \nu_j\pi'_j(1) + j\mu\pi'_j(1) - (j+1)\mu\pi'_{j+1}(1) =$$
$$= c[j\mu\pi_j(1) - (j+1)\mu\pi_{j+1}(1)],\quad j = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

Суммируя (16) по $j = 0, 1, \ldots$ и учитывая, что $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(1) = 1$, $\sum_{j=0}^{\infty} \nu_j \pi'_j(1) = E(\nu_N C)$, получаем (13).

Лемма доказана.

Следствие. Если выполнены условия леммы 1, то

$$\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=0}^{\infty} (\nu_j - \nu_{j-1})(\overline{\pi}_{ij} - \overline{\pi}_{ij}(M)) = \lambda\pi_{cM}(M), \tag{17}$$

где

$$\nu_{-1} = 0,\ \overline{\pi}_{ij} = \sum_{\alpha \geq i, \beta \geq j} \pi_{\alpha\beta} = P(C \geq i,\ N \geq j),$$

$$\overline{\pi}_{ij}(M) = \sum_{\alpha \geq i,\ \beta \geq j} \pi_{\alpha\beta}(M) = P(C(M) \geq i,\ N(M) \geq j).$$

Доказательство (17) основано на лемме 4 и представлении

$$E(\nu_N C) = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=0}^{\infty} (\nu_j - \nu_{j-1})\overline{\pi}_{ij},\ E(\nu_{N(M)} C(M)) = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=0}^{\infty} (\nu_j - \nu_{j-1})\overline{\pi}_{ij}(M),$$

где $\overline{\pi}_{ij}(M) = 0$ при $j > M$.

Теперь получим верхнюю оценку для вероятности $\pi_{cM}(M)$.

Лемма 5.

$$\pi_{cM}(M) \leq \frac{\dfrac{1}{M!}\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^M \prod_{i=0}^{M} \dfrac{\lambda + i\mu}{\nu_i}}{\sum_{j=0}^{M} \dfrac{1}{j!}\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^j \left[c + \dfrac{\lambda + j\mu}{\nu_j}\right] \prod_{i=0}^{j-1} \dfrac{\lambda + i\mu}{\nu_i}}. \tag{18}$$

Доказательство. Из уравнения (5) системы Колмогорова для стационарных вероятностей усеченной системы и (8) следует

$$[\lambda + c\nu_j]\pi_{cj}(M) \leq \frac{\lambda^2}{j\mu}\pi_{cj-1}(M) + \lambda\pi_{cj}(M) + \lambda\pi_{cj-1}(M),\ j = 1, \ldots, M-1,$$

или

$$c\nu_j \pi_{cj}(M) \le \frac{\lambda + j\mu}{j\mu} \lambda \pi_{cj-1}(M), \quad j = 1, \ldots, M-1.$$

Основываясь на уравнении (6), можно проверить, что неравенство справедливо и при $j = M$. Из него методом подстановки получим

$$\pi_{cj}(M) \ge \pi_{cM}(M) \frac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda + i\mu}{\nu_i}}{\frac{1}{M!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^M \prod_{i=1}^{M} \frac{\lambda + i\mu}{\nu_i}}, \; j = 0, \ldots, M.$$

Умножим последнее неравенство на ν_j и просуммируем по $j = 0, \ldots, M$:

$$\sum_{j=0}^{M} \nu_j \pi_{cj}(M) \ge \pi_{cM}(M) \frac{\sum_{j=0}^{M} \frac{\nu_j}{j!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda + i\mu}{\nu_i}}{\frac{1}{M!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^M \prod_{i=1}^{M} \frac{\lambda + i\mu}{\nu_i}}.$$

Из уравнения (14) следует

$$\lambda - \lambda \pi_{cM}(M) = E(\nu_{N(M)} C(M)) = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=0}^{M} i\nu_j \pi_{ij}(M) \ge c \sum_{j=0}^{M} \nu_j \pi_{cj}(M) \ge$$

$$\ge \pi_{cM}(M) \cdot \frac{c \cdot \sum_{j=0}^{M} \frac{\nu_j}{j!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda + i\mu}{\nu_i}}{\frac{1}{M!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^M \prod_{i=1}^{M} \frac{\lambda + i\mu}{\nu_i}}.$$

Из этой последовательности неравенств получаем (18).

Лемма доказана.

Следующий результат является непосредственным следствием лемм 4, 5.

Теорема 3. Если выполняются условия леммы 1 и последовательность ν_j, $j = 0, 1, \ldots$, строго возрастает, то для $(i, j) \in \{1, \ldots, c\} \times \{0, 1, \ldots\} = \widetilde{S}(X)$

$$0 \le \overline{\pi}_{ij} - \overline{\pi}_{ij}(M) \le \lambda(\nu_j - \nu_{j-1})^{-1} \pi_{cM}(M) \le$$

$$\le \lambda(\nu_j - \nu_{j-1})^{-1} \frac{\frac{1}{M!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^M \prod_{\alpha=0}^{M} \frac{\lambda + \alpha\mu}{\nu_\alpha}}{\sum_{\beta=0}^{M} \frac{1}{\beta!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^\beta \left[c + \frac{\lambda + \beta\mu}{\nu_\beta}\right] \prod_{\alpha=0}^{\beta-1} \frac{\lambda + \alpha\mu}{\nu_\alpha}}.$$

Поскольку

$$|\pi_{ij} - \pi_{ij}(M)| = |(\overline{\pi}_{ij} - \overline{\pi}_{ij}(M)) + (\overline{\pi}_{i+1\,j+1} - \overline{\pi}_{i+1\,j+1}(M)) -$$

$$- [(\overline{\pi}_{i+1\,j} - \overline{\pi}_{i+1\,j}(M)) + (\overline{\pi}_{ij+1} - \overline{\pi}_{ij+1}(M))]|,$$

то для $(i, j) \in \widetilde{S}(X)$

$$|\pi_{ij} - \pi_{ij}(M)| \le \lambda[(\nu_j - \nu_{j-1})^{-1} + (\nu_{j+1} - \nu_j)^{-1}] \pi_{cM}(M).$$

Не рассмотренным остался случай $i=0,\ \ j=0,1,\dots$ Из (1), (3), (4) следует, что

$$(\lambda + j\mu)\pi_{0j} = \nu_j \pi_{1j},\ j=0,1,\dots, \tag{19}$$

$$(\lambda + j\mu)\pi_{0j}(M) = \nu_j \pi_{1j}(M),\ \ j=0,1,\dots,M. \tag{20}$$

Вычитая из (19) равенство (20), получаем

$$|\pi_{0j} - \pi_{0j}(M)| = \frac{\nu_j}{\lambda + j\mu} |\pi_{1j} - \pi_{1j}(M)|| \le$$

$$\le \frac{\lambda \nu_j}{\lambda + j\mu} [(\nu_j - \nu_{j-1})^{-1} + (\nu_{j+1} - \nu_j)^{-1}] \pi_{cM}(M).$$

Таким образом, теорема 3 позволяет оценить $|\pi_{ij} - \pi_{ij}(M)|$ для всех $(i,j) \in S(X)$.

В заключение отметим, что в случае перегруженного режима функционирования систем с повторными вызовами эффективным методом изучения процесса обслуживания является метод диффузионной аппроксимации (см. [10]). Подходы к анализу немарковских систем с повторными вызовами можно найти в [11, 12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко И.Н., Коба Е.В. К классификации СМО с повторением вызовов // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 3. — С. 84–91.
2. Artalejo J.R., Falin G.I. Standard and retrial queueing systems: A comparative analysis // Revista Matemat. Compl. — 2002. — **15**. — P. 101–129.
3. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems. — Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. — 317 p.
4. Yang T., Templeton J.G.C. A survey on retrial queues // Queueing Systems. — 1987. — **2**, N 3. — P. 201–233.
5. Falin G.I. A survey of retrial queues // Ibid. — 1990. — **7**, N 2. — P. 127–167.
6. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial Queues. — London: Chapman and Hall, 1997. — 317 p.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
8. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. — М.: Мир, 1993. — 336 с.
9. Лебєдєв Є.О., Пономарьов В.Д. Оптимізація систем з повторами і скінченним числом джерел вимог // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: Фіз.- мат. науки. — 2008. — N 2. — С. 91–97.
10. Anisimov V.V. Switching processes in queueing models. — London: John Wiley&Sons, Inc., 2008. — 352 p.
11. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: КомКнига, 2005. — 400 с.
12. Коба О.В., Коваленко І.М. Умова ергодичності для системи M/G/1 з повторенням викликів при неґратчастому розподілі циклу на орбіті // Доп. НАН України. — 2004. — № 8. — С. 70–77.

Поступила 23.09.2010