УДК 519.21

Г.Д. БИЛА

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОЦЕНОК НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ГАУССОВСКОГО ШУМА

Ключевые слова: *слабая зависимость, гауссовский стационарный процесс, периодограммная оценка, сильная состоятельность, асимптотическое распределение*.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрен ряд асимптотических свойств периодограммных оценок неизвестных параметров, нелинейно входящих в функцию регрессии заданного вида при наличии слабозависимого случайного шума. Такие оценки довольно просты по своей структуре и достаточно хорошо исследованы [1–3]. Для дискретного случая свойства периодограммных оценок подробно описаны в [4]. В работах [2, 5] изучены асимптотические свойства L_p-оценок в общем случае и при $p=2$ — оценок наименьших квадратов для непрерывного времени. Свойства оценок максимального правдоподобия приведены в [6]. В указанных работах асимптотические свойства периодограммных оценок неизвестных параметров как для дискретного, так и непрерывного времени исследованы на примере гармонического сигнала, когда неизвестными параметрами являются амплитуда и частота гармонических колебаний. Важные результаты оценки в случае, когда функция регрессии почти периодическая, получены в [3, 7, 8]. Однако в большинстве известных работ при рассмотрении регрессионных моделей со слабозависимым случайным шумом, т.е. таких, корреляционная функция которых интегрируема на действительной оси R^1, требуется выполнение условия сильного перемешивания [9], фактически нереализуемого во многих практических задачах. В данной статье исследованы асимптотические свойства оценок неизвестных параметров почти периодической функции в нелинейной модели регрессии «сигнал плюс шум» в случае, когда случайный шум является гауссовским стационарным процессом.

УСЛОВИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Опишем рассматриваемую модель и сделаем относительно нее ряд предположений.

Условие 1. Пусть $\{n(t), t \in R^1\} = \{n(t)\}$ — действительный непрерывный с вероятностью единица гауссовский стационарный процесс с абсолютно интегрируемой на действительной оси R^1 корреляционной функцией $r(t)$ и нулевым средним $En(t)=0$.

Поскольку корреляционная функция $r(t)$ стационарного процесса $n(t)$ интегрируема (случай слабой зависимости), а именно

$$\int_0^\infty |r(t)|\, dt < \infty,$$

существует непрерывная и ограниченная на R^1 спектральная плотность $f(\lambda)$, связанная с $r(t)$ соотношением

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda .$$

Условие 2. Предположим, что задана почти периодическая функция вида

$$\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k t},$$

где для величин c_k и λ_k выполняется следующее условие:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|<\infty,\ \lambda_k \ge 0 \text{ при } k \ge 0,$$

$$c_k = c_{-k},\ \lambda_k = -\lambda_{-k},\ |\lambda_l - \lambda_k| \ge \Delta > 0 \text{ при } l \ne k.$$

Пусть на отрезке $[0, T]$ наблюдается случайный процесс $x(t)$,

$$x(t) = A_0 \varphi(\omega_0 t) + n(t),\quad A_0 > 0,\quad \omega_0 > 0.$$

Условие 3. Для значения $\lambda_{i_0}\omega_0$ спектральная плотность $f(\lambda_{i_0}\omega_0) > 0.$

Далее рассмотрим задачу оценки неизвестных параметров A_0 и ω_0 с использованием процесса $\{x(t), 0 \le t \le T\}$, предполагая, что длина интервала наблюдений $T \to \infty$.

При оценивании неизвестных параметров A_0 и ω_0 используются разные оценки, в зависимости от конкретного вида функции $\varphi(t)$ и способа задания функционала для их нахождения. Известно, что во многих отношениях предпочтительны оценки максимального правдоподобия или более простые оценки метода наименьших квадратов. Выберем в качестве оценок параметров A_0 и ω_0 естественные оценки, близкие к оценкам метода наименьших квадратов, но не совпадающие с ними.

Рассмотрим функционал

$$Q_T(\omega) = \left| \frac{2}{T} \int_0^T x(t) e^{i\omega t} dt \right|^2,\ \omega \ge 0\,.$$

Пусть ω_T — значение $\omega \in [0, \infty)$, при котором функционал $Q_T(\omega)$ принимает наибольшее значение на $[0, \infty)$. Заметим, что $Q_T(\omega)$ с вероятностью единица является непрерывной функцией от ω, причем $Q_T(\omega) \to 0$ при $\omega \to +\infty$, а значит, при известных предположениях о процессе $n(t)$ оценка ω_T определена с вероятностью единица.

Лемма 1 [2]. Пусть процесс $\{n(t)\}$ удовлетворяет условию 1. Тогда

$$\sup_{\omega \in R^1} \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega t} n(t) dt \right| \to 0 \text{ при } T \to \infty \tag{1}$$

с вероятностью единица.

СИЛЬНАЯ СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНОК ЧАСТОТЫ И АМПЛИТУДЫ

Докажем сначала утверждение о сильной состоятельности оценки величины ω_0.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1, 2, а также условие $|c_{i_0}| > |c_i|$, $i \ne \pm i_0$, $i_0 > 0.$ Тогда

$$\overline{\omega}_T = \frac{\omega_T}{\lambda_{i_0}} \to \omega_0 \text{ при } T \to \infty \tag{2}$$

с вероятностью единица.

Доказательство. Зафиксируем $\omega \ne 0$ и рассмотрим поведение величины $Q_T(\omega)$ при $T \to \infty$:

$$Q_T(\omega) = \left| \frac{2}{T} \int_0^T x(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 = \left| \frac{2}{T} \int_0^T [A_0 \varphi(\omega_0 t) + n(t)] e^{i\omega t} dt \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{2}{T} \int_0^T A_0 \varphi(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt \right|^2 + I_T(\omega)\,,$$

где $I_T(\omega) = \left| \frac{2}{T} \int_0^T n(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 + 2\mathrm{Re}\, \frac{4A_0}{T^2} \int_0^T \varphi(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt \int_0^T n(t) e^{-i\omega t} dt.$

Из условия 2 легко видеть, что

$$\frac{1}{T}\left|\int_0^T \varphi(\omega_0 t)e^{i\omega t}dt\right| \le C.$$

Из леммы 1 следует, что $\sup_\omega |I_T(\omega)| \to 0$ при $T \to \infty$ с вероятностью единица.

Пусть $\Phi_T(\omega_0, \omega) = \frac{2A_0}{T}\int_0^T \varphi(\omega_0 t)e^{i\omega t}dt$. Тогда справедливо равенство

$$\Phi_T(\omega_0, \omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2A_0}{T} c_k \int_0^T e^{i(\lambda_k\omega_0 + \omega)t}dt.$$

Пусть $|\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega| \ge \delta$, $\delta < \frac{\Delta\omega_0}{2}$. Предположим, что для любого $k \ne i$ имеет место $|\lambda_k\omega_0 - \omega| \le \delta$. Тогда для любого $l \ne k$ получаем $|\lambda_l\omega_0 - \omega| = |(\lambda_k\omega_0 - \omega) + (\lambda_l - \lambda_k)\omega_0| > \omega_0\left|(\lambda_l - \lambda_k) - \frac{1}{2}\Delta\right| \ge \frac{1}{2}\Delta\omega_0 > \delta$. Принимая во внимание (1), имеем

$$\varlimsup_{T\to\infty} \sup_{|\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega| \ge \delta} Q_T(\omega) \le \varlimsup_{T\to\infty} \sup_{|\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega| \ge \delta} |\Phi_T(\omega_0, \omega)|^2 \le$$

$$\le \varlimsup_{T\to\infty} \sup_{|\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega| \ge \delta} \left[\frac{2A_0}{T}\int_0^T \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{-i(\lambda_\nu\omega_0 - \omega)t}dt\right]^2 \le$$

$$\le \varlimsup_{T\to\infty} \sup_{|\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega| \ge \delta} \left\{\max_{\nu \ne \pm i_0}\left[A_0^2 |c_\nu|^2 \left|\frac{2}{T}\int_0^T e^{-i(\lambda_\nu\omega_0 - \omega)t}dt\right|^2\right]\right\} < 4A_0^2 |c_{i_0}|^2.$$

Легко видеть, что $\lim_{T\to\infty} Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0) = 4A_0^2 |c_{i_0}|^2$.

Покажем, что $\overline{\omega}_T \to \omega_0$ при $T \to \infty$ с вероятностью единица. Пусть $\mathrm{E} = \{e\}$ — пространство элементарных событий и $\Psi = \{e, \varlimsup_{T\to\infty} \sup_{\omega\in\Phi_\delta} Q_T(\omega) < \lim_{T\to\infty} Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0) = L, L < \infty\}$, где $\Phi_\delta = \{\omega\colon |\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega| \ge \delta\}$, $\delta < \frac{\Delta\omega_0}{2}$. В силу предыдущих рассуждений $\mathrm{P}\{\Psi\} = 1$. Тогда рассмотрим множество $\Psi_1 = \{e, \overline{\omega}_T$ не сходится к ω_0 при $T \to \infty\}$. Пусть элементарное событие $e \in \Psi_1 \cap \Psi$. Для него существует подпоследовательность $T_k(e) \to \infty$ при $k \to \infty$ такая, что $\overline{\omega}_{T_k(e)}(e) \to \overline{\omega}'(e) \ne \omega_0$.

Выберем $\delta(e) < \min\left(|\overline{\omega}'(e) - \lambda_{i_0}\omega_0|, \frac{\Delta\omega_0}{2}\right)$. Тогда в силу того, что

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sup_{\omega\in\Phi_{\delta(e)}} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\omega) < \lim_{k\to\infty} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\lambda_{i_0}\omega_0),$$

имеет место

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sup_{\omega\in\Phi_{\delta(e)}} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\omega_{T_k(e)}(e)) < \lim_{k\to\infty} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\lambda_{i_0}\omega_0),$$

причем

$$\lim_{k\to\infty} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\lambda_{i_0}\omega_0) = L,\ L > \varlimsup_{k\to\infty} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\omega_{T_k(e)}(e)).$$

Получили противоречие. Следовательно, $\mathrm{P}\{\Psi_1\} = 0$ и $\overline{\omega}_T \to \omega_0$ при $T \to \infty$ с вероятностью единица.

Теорема доказана.

Аналогичная теорема для стационарного процесса, которая удовлетворяет условию сильного перемешивания и имеет конечный момент четвертого порядка, доказана в [3].

Лемма 2. При условиях теоремы 1 с вероятностью единица справедливо соотношение

$$\lim_{T\to\infty} Q_T(\omega_T) = \lim_{T\to\infty} Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0) = 4A_0^2 |c_{i_0}|^2 .$$

Доказательство. По определению оценки ω_T имеем

$$Q_T(\omega_T) \ge Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0),$$

поэтому

$$0 \le Q_T(\omega_T) - Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0) =$$

$$= I_T(\omega_T) - I_T(\lambda_{i_0}\omega_0) + \frac{4A_0^2}{T^2}\left|\int_0^T \varphi(\omega_0 t) e^{i\omega_T t} dt\right|^2 - \frac{4A_0^2}{T^2}\left|\int_0^T \varphi(\omega_0 t) e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t} dt\right|^2 . \quad (3)$$

Из леммы 1 следует, что $I_T(\omega) \to 0$ при $T \to \infty$ равномерно по $\omega \ge 0$ с вероятностью единица. Кроме того, из доказательства теоремы 1 вытекает, что при $\delta < \dfrac{\Delta\omega_0}{2}$ имеет место

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{4A_0^2}{T^2}\sup_{\omega\ge 0}\left|\int_0^T \varphi(\omega_0 t)e^{i\omega t}dt\right|^2 - \frac{4A_0^2}{T^2}\left|\int_0^T \varphi(\omega_0 t)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right|^2\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{4A_0^2}{T^2}\max\left\{\sup_{\substack{|\lambda_{i_0}\omega_0-\omega|\ge\delta\\ \omega\ge 0}}\left|\int_0^T \varphi(\omega_0 t)e^{i\omega t}dt\right|^2,\ \sup_{\substack{|\lambda_{i_0}\omega_0-\omega|<\delta\\ \omega\ge 0}}\left|\int_0^T \varphi(\omega_0 t)e^{i\omega t}dt\right|^2\right\} -\right.$$

$$\left. - \frac{4A_0^2}{T^2}\left|\int_0^T \varphi(\omega_0 t)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right|^2\right\} \le 0.$$

Таким образом, на основании неравенства (3) и доказательства теоремы 1 можно утверждать, что с вероятностью единица

$$\lim_{T\to\infty} Q_T(\omega_T) = \lim_{T\to\infty} Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0) = 4A_0^2 |c_{i_0}|^2 .$$

Лемма доказана.

Рассмотрим скорость сходимости оценки ω_T к ее истинному значению.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда

$$T\left(\frac{\omega_T}{\lambda_{i_0}} - \omega_0\right) \to 0 \text{ при } T \to \infty$$

с вероятностью единица.

Доказательство. При доказательстве леммы 2 установлено, что правая часть (3) сходится к нулю при $T \to \infty$ с вероятностью единица. Из этого следует, что

$$\left|\frac{2A_0}{T}\int_0^T \varphi(\omega_0 t)e^{i\omega_T t}dt\right|^2 - \left|\frac{2A_0}{T}\int_0^T \varphi(\omega_0 t)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right|^2 \to 0 \quad (4)$$

при $T \to \infty$ с вероятностью единица.

Рассмотрим

$$\lim_{T\to\infty}\left|\frac{2A_0}{T}\int_0^T \varphi(\omega_0 t)e^{i\omega_T t}dt\right|^2 = \lim_{T\to\infty}\left|\frac{2A_0}{T}\int_0^T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k\omega_0 t}\right)e^{i\omega_T t}dt\right|^2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left|\frac{2A_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\int_0^T e^{i(\omega_T-\lambda_k\omega_0)t}dt\right|^2 = 4A_0^2|c_{i_0}|^2\lim_{T\to\infty}\left|\frac{e^{i(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)T}-1}{(\lambda_{i_0}\omega_0-\omega_T)T}\right|^2. \quad (5)$$

Поскольку $\omega_0>0$ и $\omega_T\ge 0$, с учетом (5) соотношение (4) справедливо тогда и только тогда, когда

$$\left|\frac{e^{i(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)T}-1}{(\lambda_{i_0}\omega_0-\omega_T)T}\right|\to 1 \text{ при } T\to\infty$$

с вероятностью единица, или, что то же,

$$\frac{\sin(\lambda_{i_0}\omega_0-\omega_T)T}{(\lambda_{i_0}\omega_0-\omega_T)T}\to 1 \text{ при } T\to\infty$$

с вероятностью единица. Последнее возможно тогда и только тогда, когда $T\left(\dfrac{\omega_T}{\lambda_{i_0}}-\omega_0\right)\to 0$ при $T\to\infty$ с вероятностью единица.

Теорема доказана.

Очевидно, что из леммы 2 вытекает также следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1–3. Тогда при $T\to\infty$ величина $A_T=\dfrac{1}{2}|c_{i_0}|^{-1}Q_T^{1/2}(\omega_T)$ является сильно состоятельной оценкой величины A_0.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ОЦЕНОК ЧАСТОТЫ И АМПЛИТУДЫ

Сформулируем центральную предельную теорему для интегралов вида

$$\int_0^T a_T(t)n(t)dt$$

с некоторой функцией $a_T(t)$, $t\ge 0$, в такой форме, которая далее позволит установить асимптотическую нормальность оценок A_T и ω_T при выполнении условий 1, 2.

Предположим, что функция $a_T(t)$ удовлетворяет следующим условиям.

Условие 4. Пусть $a_T(t)$ — действительная функция, определенная для $t\ge 0$ и такая, что при каждом $T>0$

$$W^2(T)=\int_0^T a_T^2(t)dt<\infty.$$

Условие 5. С некоторой константой $0<C<\infty$ имеет место

$$W^{-1}(T)\sup_{0\le t\le T}|a_T(t)|\le\frac{C}{\sqrt{T}},\ W(T)\to\infty,\ T\to\infty.$$

Условие 6. При любом действительном u существует

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{W^2(T)}\int_0^T a_T(t+|u|)a_T(t)dt=\rho(u),$$

причем функция ρ непрерывна. В таком случае легко проверить [10], что по теореме Бохнера–Хинчина функция ρ допускает представление

$$\rho(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u} d\mu(\lambda)\,,$$

где $\mu(\lambda)$ — монотонно неубывающая и ограниченная на R^1 функция.

Теорема 4 [1, 11]. Предположим, что процесс $n(t)$ удовлетворяет условиям 1–3, а функция $a_T(t)$ — условиям 4–6. Тогда случайная величина

$$\frac{1}{W(T)} \int_0^T a_T(t) n(t) dt$$

асимптотически нормальна при $T \to \infty$ с параметрами 0 и $\sigma^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\mu(\lambda)$.

Из теоремы 4 вытекает следствие.

Лемма 3. Пусть выполняются условия 1–3. Тогда каждая из случайных величин

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \cos \omega_0 t n(t) dt, \quad \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \sin \omega_0 t n(t) dt,$$

$$\frac{1}{T^{3/2}} \int_0^T t \cos \omega_0 t n(t) dt, \quad \frac{1}{T^{3/2}} \int_0^T t \sin \omega_0 t n(t) dt$$

асимптотически нормальна при $T \to \infty$ с параметрами $(0, \pi f(\lambda_{i_0} \omega_0))$ для первых двух случайных величин и с параметрами $\left(0, \frac{\pi}{3} f(\lambda_{i_0} \omega_0)\right)$ для двух других.

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 4. Пусть выполняются условия 1–3. Тогда имеет место равенство

$$T^{-1/2} \frac{\partial Q_T(\lambda_{i_0} \omega_0)}{\partial \omega} = \zeta_{T1} + \zeta_{T2}, \qquad (6)$$

где ζ_{T1} — асимптотически нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = \frac{16}{3} \pi A_0^2 |c_{i_0}|^2 f(\lambda_{i_0} \omega_0)$, а случайная величина $\zeta_{T2} \to 0$ при $T \to \infty$ по вероятности.

Доказательство. Справедливо следующее выражение:

$$\frac{1}{T^{1/2}} \frac{\partial Q_T(\lambda_{i_0} \omega_0)}{\partial \omega} = \frac{4}{T^{5/2}} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \left[\int_0^T x(t) \cos(\omega t) dt \right]^2 + \left[\int_0^T x(t) \sin(\omega t) dt \right]^2 \right\}_{\omega = \lambda_{i_0} \omega_0} =$$

$$= \frac{8}{T^{5/2}} \left\{ -\int_0^T [A_0 \varphi(\omega_0 t) + n(t)] \cos(\lambda_{i_0} \omega_0 t)\, dt \int_0^T t [A_0 \varphi(\omega_0 t) + n(t)] \sin(\lambda_{i_0} \omega_0 t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^T [A_0 \varphi(\omega_0 t) + n(t)] \sin(\lambda_{i_0} \omega_0 t)\, dt \int_0^T t [A_0 \varphi(\omega_0 t) + n(t)] \cos(\lambda_{i_0} \omega_0 t)\, dt \right\}. \qquad (7)$$

Рассмотрим каждый член правой части (7) в отдельности (далее полагаем, что сходимость имеет место по вероятности):

$$\lim_{T \to \infty} \frac{A_0}{T^{5/2}} \int_0^T \varphi(\omega_0 t) \cos(\lambda_{i_0} \omega_0 t) dt \int_0^T t n(t) \sin(\lambda_{i_0} \omega_0 t) dt =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{A_0}{T^{5/2}}\int_0^T\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu e^{i\lambda_\nu\omega_0 t}\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt\int_0^T tn(t)\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt=$$

$$=A_0\frac{c_{i_0}+c_{-i_0}}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^{3/2}}\int_0^T tn(t)\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt, \qquad (8)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{A_0}{T^{5/2}}\int_0^T\varphi(\omega_0 t)\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt\int_0^T tn(t)\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt=$$

$$=A_0\frac{c_{-i_0}-c_{i_0}}{2i}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^{3/2}}\int_0^T tn(t)\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt, \qquad (9)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{A_0}{T^{5/2}}\int_0^T n(t)\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt\int_0^T t\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu e^{i\lambda_\nu\omega_0 t}\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt=$$

$$=A_0\frac{c_{-i_0}-c_{i_0}}{4i}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^{1/2}}\int_0^T n(t)\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt, \qquad (10)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{A_0}{T^{5/2}}\int_0^T n(t)\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt\int_0^T t\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu e^{i\lambda_\nu\omega_0 t}\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt=$$

$$=A_0\frac{c_{i_0}+c_{-i_0}}{4i}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^{1/2}}\int_0^T n(t)\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt, \qquad (11)$$

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A_0^2}{T^{5/2}}\left[-\int_0^T\varphi(\omega_0 t)\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt\int_0^T t\varphi(\omega_0 t)\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^T\varphi(\omega_0 t)\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt\int_0^T t\varphi(\omega_0 t)\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt]\right]\right\}=$$

$$=A_0^2\left[-\frac{c_{i_0}+c_{-i_0}}{2}\;\frac{c_{-i_0}-c_{i_0}}{4i}+\frac{c_{i_0}-c_{-i_0}}{2i}\;\frac{c_{i_0}+c_{-i_0}}{4}\right]=0, \qquad (12)$$

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T^{5/2}}\left[-\int_0^T n(t)\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt\int_0^T tn(t)\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^T n(t)\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt\int_0^T tn(t)\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt\right]\right\}=0. \qquad (13)$$

Таким образом, из (7)–(13) следует равенство (6), где

$$\zeta_{T1}=-4[c_{i_0}-c_{-i_0}]\frac{A_0}{T^{3/2}}\int_0^T tn(t)\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt-$$

$$-4[c_{-i_0}-c_{i_0}]\frac{A_0}{T^{3/2}}\int_0^T tn(t)\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt+$$

$$+2i[c_{-i_0}-c_{i_0}]\frac{A_0}{T^{1/2}}\int_0^T n(t)\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt+2i[c_{i_0}+c_{-i_0}]\frac{A_0}{T^{1/2}}\int_0^T n(t)\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)dt.$$

Найдем функцию $\rho(u)$, определенную в условии 6. Обозначим

$$a_{i_0}=\frac{c_{i_0}+c_{-i_0}}{2},\ b_{i_0}=\frac{c_{i_0}-c_{-i_0}}{2i},$$

$$a_T(t)=4A_0\left[b_{i_0}\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)\left(1-\frac{2t}{T}\right)+a_{i_0}\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)\left(1-\frac{2t}{T}\right)\right]. \qquad (14)$$

Тогда

$$\rho(u)=\lim_{T\to\infty}\frac{16A_0^2}{W^2(T)}\int_0^T\left(1-\frac{2(t+|u|)}{T}\right)\left(1-\frac{2t}{T}\right)\{a_{i_0}\sin(\lambda_{i_0}\omega_0(t+|u|))+$$

$$+b_{i_0}\cos(\lambda_{i_0}\omega_0(t+|u|))\}\{a_{i_0}\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 t)+b_{i_0}\cos(\lambda_{i_0}\omega_0 t)\}\,dt=\cos(\lambda_{i_0}\omega_0|u|)\,.$$

Следовательно, величина

$$\zeta_{T1}=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T a_T(t)n(t)dt,$$

где $a_T(t)$ определяется равенством (14), асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2=\frac{8A_0^2}{3}2\pi|c_{i_0}|^2 f(\lambda_{i_0}\omega_0)=$ $=\frac{16}{3}\pi A_0^2|c_{i_0}|^2 f(\lambda_{i_0}\omega_0)$.

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть выполняются условия 1–3. Тогда для любой случайной величины $\hat\omega_T$, удовлетворяющей с вероятностью единица неравенству $|\hat\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0|\le$ $\le|\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0|$, для всех $T>0$ величина $\frac{1}{T^2}\frac{\partial^2 Q_T(\hat\omega_T)}{\partial\omega^2}\to-\frac{2|c_{i_0}|^2}{3}A_0^2$ по вероятности.

Доказательство. Справедливо следующее соотношение:

$$\frac{1}{T^2}\frac{\partial^2 Q_T(\hat\omega_T)}{\partial\omega^2}=\frac{8}{T^4}\left\{\left[\int_0^T tx(t)\sin(\hat\omega_T t)dt\right]^2+\left[\int_0^T x(t)\cos(\hat\omega_T t)dt\right]^2-\right.$$

$$\left.-\int_0^T x(t)\cos(\hat\omega_T t)dt\int_0^T t^2x(t)\cos(\hat\omega_T t)dt-\int_0^T x(t)\sin(\hat\omega_T t)dt\int_0^T t^2x(t)\sin(\hat\omega_T t)dt\right\}.$$

На основании теоремы 2, леммы 3 и неравенства $|\sin a-\sin b|\le|a-b|$ для любых действительных a и b легко видеть, что по вероятности

$$\frac{2}{T^4}\left[\int_0^T tx(t)\sin(\hat\omega_T t)dt\right]^2\to\frac{A_0^2}{2}b_{i_0}^2,$$

$$\frac{2}{T^4}\left[\int_0^T tx(t)\cos(\hat\omega_T t)dt\right]^2\to\frac{A_0^2}{2}a_{i_0}^2,$$

$$\frac{2}{T^4}\left[\int_0^T x(t)\cos(\hat\omega_T t)dt\right]\left[\int_0^T t^2x(t)\cos(\hat\omega_T t)dt\right]\to\frac{2A_0^2}{3}a_{i_0}^2,$$

$$\frac{2}{T^4}\left[\int_0^T x(t)\sin(\hat\omega_T t)dt\right]\left[\int_0^T t^2x(t)\sin(\hat\omega_T t)dt\right]\to\frac{2A_0^2}{3}b_{i_0}^2.$$

Таким образом, по вероятности

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\frac{\partial^2 Q_T(\hat{\omega}_T)}{\partial\omega^2}=-4A_0^2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)(a_{i_0}^2+b_{i_0}^2)=-\frac{2|c_{i_0}|^2}{3}A_0^2 .$$

Лемма доказана.

Теорема 5. Пусть выполняются условия 1–3. Тогда величина $T^{3/2}(\omega_T-$ $-\lambda_{i_0}\omega_0)$ асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2=12\pi A_0^{-2}|c_{i_0}|^{-2}f(\lambda_{i_0}\omega_0)$.

Доказательство. Так как $\dfrac{\omega_T}{\lambda_{i_0}}\to\omega_0$ при $T\to\infty$ с вероятностью единица, ω_T будет внутренней точкой полуоси $[0,\infty)$ с вероятностью, стремящейся к единице при $T\to\infty$. С этой вероятностью $Q_T'(\omega_T)=0$ и справедливо равенство

$$Q_T'(\lambda_{i_0}\omega_0)+Q_T''(\hat{\omega}_T)(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)=0 \tag{15}$$

с некоторой случайной величиной $\hat{\omega}_T$, которая с вероятностью единица удовлетворяет неравенству $|\hat{\omega}_T-\lambda_{i_0}\omega_0|\le|\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0|$, $T>0$. Из (15) следует

$$\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0=-\frac{Q_T'(\lambda_{i_0}\omega_0)}{Q_T''(\hat{\omega}_T)} . \tag{16}$$

Равенство (16) эквивалентно

$$T^{3/2}(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)=-\frac{T^{-1/2}Q_T'(\lambda_{i_0}\omega_0)}{T^{-2}Q_T''(\hat{\omega}_T)} . \tag{17}$$

Знаменатель правой части (17) стремится по вероятности к величине $A=-\dfrac{2|c_{i_0}|^2}{3}A_0^2$. Поэтому, с учетом лемм 4 и 5, теорема доказана.

Перейдем к нахождению асимптотического распределения величины $\sqrt{T}(A_T-A_0)$.

Теорема 6. Пусть выполняются условия 1–3. Тогда величина $\xi_T=$ $=\sqrt{T}(A_T-A_0)$ асимптотически нормальна с параметрами $(0,\pi|c_{i_0}|^{-2}f(\lambda_{i_0}\omega_0))$.

Доказательство. Справедливо равенство

$$\xi_T=\sqrt{T}\left(\frac{1}{2}|c_{i_0}|^{-1}Q_T^{1/2}(\omega_T)-A_0\right)=$$

$$=\sqrt{T}\left[\frac{1}{4}|c_{i_0}|^{-2}Q_T(\omega_T)-A_0^2\right]\left[\frac{1}{2}|c_{i_0}|^{-1}Q_T^{1/2}(\omega_T)+A_0\right]^{-1} .$$

Из леммы 2 известно, что $\dfrac{1}{2}|c_{i_0}|^{-1}Q_T^{1/2}(\omega_T)+A_0\to 2A_0$ при $T\to\infty$ с вероятностью единица.

Проверим, что $\sqrt{T}[Q_T(\omega_T)-Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)]\to 0$ при $T\to\infty$ по вероятности. Действительно,

$$\sqrt{T}[Q_T(\omega_T)-Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)]=$$

$$=\sqrt{T}Q_T'(\lambda_{i_0}\omega_0)(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)+\frac{1}{2}\sqrt{T}Q_T''(\hat{\omega}_T)(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)^2$$

с некоторой величиной $\hat{\omega}_T$ такой, что $|\hat{\omega}_T-\lambda_{i_0}\omega_0|\le|\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0|$ с вероятностью единица при $T>0$. Величина $\sqrt{T}Q_T'(\lambda_{i_0}\omega_0)(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)=$ $=\frac{1}{\sqrt{T}}Q_T'(\lambda_{i_0}\omega_0)T(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)$ сходится по вероятности к нулю при $T\to\infty$ согласно лемме 4 и теореме 2, а величина $\frac{\sqrt{T}}{2}Q_T''(\hat\omega_T)(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)^2=$ $=\frac{1}{2T^2}Q_T''(\hat\omega_T)T^{3/2}(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)T(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)$ стремится по вероятности к нулю в силу леммы 5, теорем 2 и 5. Отсюда следует, что асимптотическое распределение величины ξ_T совпадает с асимптотическим распределением величины $\beta_T=\frac{1}{2A_0}\sqrt{T}\left[\frac{1}{4}|c_{i_0}|^{-2}Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)-A_0^2\right]$. Для β_T в смысле сходимости по вероятности имеет место цепочка равенств

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\sqrt{T}}{2A_0}\left[\frac{1}{4}|c_{i_0}|^{-2}Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)-A_0^2\right]=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\sqrt{T}}{2A_0}\left[\frac{1}{4}|c_{i_0}|^{-2}\left|\frac{2}{T}\int_0^T(A_0\varphi(\omega_0t)+n(t))e^{i\lambda_{i_0}\omega_0t}dt\right|^2-A_0^2\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{\sqrt{T}}{2A_0}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{4}|c_{i_0}|^{-2}\frac{4}{T^2}\int_0^T(A_0\varphi(\omega_0t)+n(t))e^{i\lambda_{i_0}\omega_0t}dt\int_0^T(A_0\varphi(\omega_0t)+n(t))e^{-i\lambda_{i_0}\omega_0t}dt-A_0^2\right]=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}|c_{i_0}|^{-2}\left\{c_{-i_0}\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T n(t)e^{-i\lambda_{i_0}\omega_0t}dt+c_{i_0}\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T n(t)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0t}dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{2|c_{i_0}|^2}\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T n(t)[c_{-i_0}e^{-i\lambda_{i_0}\omega_0t}+c_{i_0}e^{i\lambda_{i_0}\omega_0t}]dt\right\}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{|c_{i_0}|^2}\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T n(t)[a_{i_0}\cos(\lambda_{i_0}\omega_0t)-b_{i_0}\sin(\lambda_{i_0}\omega_0t)]dt.$$

Обозначим

$$a_T(t)=\frac{1}{|c_{i_0}|^2\sqrt{T}}[a_{i_0}\cos(\lambda_{i_0}\omega_0t)-b_{i_0}\sin(\lambda_{i_0}\omega_0t)].$$

Тогда

$$\rho(u)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{W^2(T)}\frac{1}{|c_{i_0}|^4T}\int_0^T\{a_{i_0}\cos[\lambda_{i_0}\omega_0(t+|u|)]-b_{i_0}\sin[\lambda_{i_0}\omega_0(t+|u|)]\}\times$$

$$\times\{a_{i_0}\cos(\lambda_{i_0}\omega_0t)-b_{i_0}\sin(\lambda_{i_0}\omega_0t)\}dt=\cos(\lambda_{i_0}\omega_0|u|).$$

Поэтому величина β_T, а следовательно, и величина ξ_T асимптотически нормальны с параметрами $(0,\pi|c_{i_0}|^{-2}f(\lambda_{i_0}\omega_0))$.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены достаточные условия состоятельности и найдены асимптотические распределения оценок неизвестных параметров почти периодической функции в нелинейной модели регрессии с непрерывным временем и слабозависимым гауссовским стационарным шумом. Данные результаты позволяют сделать следующий важный шаг в изучении асимптотических свойств периодограммных оценок, а именно найти доверительные интервалы для неизвестных параметров функции и определить эффективность оценок в случае слабозависимого гауссовского случайного шума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гречка Г.П., Дороговцев А.Я. Об асимптотических свойствах периодограммной оценки частоты и амплитуды гармонического колебания // Вычисл. и прикл. математика. — 1976. — № 28. — С. 18–31.
2. Иванов А.В. Одно решение задачи о выявлении скрытых периодичностей // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1975. — № 20. — С. 44–60.
3. Кнопов П.С. Оценивание неизвестных параметров почти периодической функции при наличии шума. I // Кибернетика — 1984. — № 6. — С. 83–87.
4. Hannan E.J. The estimation of frequency // J. Appl. Probab. — 1973. — **10**, N 3. — P. 510–519.
5. Іванов О.В., Орловський І.В. Асимптотична нормальність L_p-оцінок в нелінійних моделях регресії зі слабкою залежністю // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2008. — № 79. — С. 50–64.
6. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Оценка параметра сигнала в гауссовском белом шуме // Пробл. передачи информ. — 1974. — **10**, № 1. — С. 39–59.
7. Біла Г.Д. Консистентність оцінки параметра майже періодичної функції у моделях із слабкозалежним гауссівським шумом // Прикл. статистика. Актуар. та фін. математика. — 2012. — № 1. — С. 59–63.
8. Холево А.С. Оценки почти-периодического сигнала // Теория вероятностей и ее применения. — 1971. — **16**, № 2. — С. 249–263.
9. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. — М.: Наука, 1965. — 524 с.
10. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 567 с.
11. Холево А.С. Об асимптотической нормальности оценок коэффициентов регрессии // Теория вероятностей и ее применения. — 1971. — **16**, № 3. — С. 724–728.

Поступила 27.02.2012