УДК 519.21

А.А. ЛЕВИТСКАЯ

ОДНА КОМБИНАТОРНАЯ ЗАДАЧА В КЛАССЕ ДВОИЧНЫХ ВЕКТОРОВ ЗАДАННОГО ВЕСА

Ключевые слова: *двоичный вектор веса* $(n-m_0)$, *l-ступень, число l-ступеней*.

Перечислительные задачи комбинаторного анализа, обусловленные потребностями современной практики, вызывают особый интерес как у прикладников, так и у математиков-теоретиков. Их формулировки порой очень просты (достаточно вспомнить ряд известных задач из криптографии), однако на решения некоторых из них иногда уходят годы и даже десятилетия.

Использование современной вычислительной техники в исследовании таких проблем позволяет сегодня не только успешно решать многие актуальные технические вопросы, но и приводит к появлению новых комбинаторных методов дискретной математики. Решению одной перечислительной задачи и посвящена данная работа.

Постановка задачи. Пусть $\mathbf{M}(n, m_0)$ — множество n-мерных двоичных векторов, состоящих из m_0 $(1 \le m_0 < n)$ нулей и $n-m_0$ единиц, т.е. любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0)$ имеет вес $|\mathbf{x}| = n - m_0$.

Определение. Будем говорить, что координаты x_i, x_{i+l}, где $l \ge 1$; i, $i+l \le n$, вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0)$ образуют l-ступень в $\mathbf{x}$, если $x_i = \ldots = x_{i+l-1} = 1$, $x_{i+l} = 0$.

Обозначим $\eta(n, m_0; l, \mathbf{x})$ число l-ступеней в векторе $\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0)$.

Задача состоит в определении числа векторов $\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0)$, для которых $\eta(n, m_0; l, \mathbf{x}) = k$, где k — неотрицательное целое число, т.е. в определении мощности множества $\mathbf{A}(n, m_0; l, k) \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0) : \eta(n, m_0; l, \mathbf{x}) = k\}$.

Очевидно, если $k > \min\left\{\dfrac{n-m_0}{l}, m_0\right\}$ или $l > n - m_0$, тогда

$$|\mathbf{A}(n, m_0; l, k)| = 0,$$

где $|\mathbf{A}|$ — мощность множества $\mathbf{A}$.

Заметим, что понятие l-ступени встречается в работах В.И. Масола, например в [1], где оно определено следующим образом: координаты x_i и x_{i+l} вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0)$, $1 \le l \le n-1$, образуют l-ступень, если $x_i > x_{i+l}$. Следовательно, понятия l-ступени, используемые в настоящей статье и в [1], существенно отличаются.

Основные результаты. Любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0)$ представим как некую (n, m_0)-цепочку, состоящую из m_0 пронумерованных слева направо (от 1 до m_0) нулей, перед каждым из которых и после последнего нуля с номером m_0 расположен ящик. В свою очередь, ящики также пронумерованы слева направо (от 1 до m_0+1). (Условимся далее обозначать ящики двумя вертикальными черточками.) В ящики соответственно данному вектору размещают $n-m_0$ единиц. Например, (14,7)-цепочка вида |2|0|3|0| |0|1|0| |0| |0| |0|1| соответствует такому двоичному вектору: 11011100100001.

В силу введенного выше определения l-ступени и в связи с предложенной интерпретацией двоичных векторов $\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0)$ очевидны следующие утверждения.

Утверждение 1. Для фиксированного вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0)$ равенство $\eta(n, m_0; l, \mathbf{x}) = 0$, где $1 \le l \le n - m_0$, имеет место тогда и только тогда, когда в соответствующей вектору $\mathbf{x}$ (n, m_0)-цепочке в каждом из первых m_0 ящиков содержится не более $(l-1)$ единиц.

Утверждение 2. Для фиксированного вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0)$ равенство $\eta(n, m_0; l, \mathbf{x}) = k$, где $1 \le k \le \min\left\{\frac{n-m_0}{l}, m_0\right\}$, имеет место тогда и только тогда, когда среди первых m_0 ящиков есть ровно k ящиков, в каждом из которых содержится не менее l единиц, а в остальных с номерами, не превышающими m_0, — не более $(l-1)$ единиц.

Вычислим мощность множества $\mathbf{A}(n, m_0; l, k)$ в зависимости от значений l, $1 \le l \le n - m_0$, и k, $0 \le k \le \min\left\{\frac{n-m_0}{l}, m_0\right\}$.

Теорема 1. Если $m_0(l-1) \le n - m_0$ или, что то же самое, $l \le \frac{n}{m_0}$, тогда

$$|\mathbf{A}(n, m_0; l, 0)| = l^{m_0}. \tag{1}$$

Доказательство. Согласно утверждению 1 в соответствующей (n, m_0)-цепочке вектора $\mathbf{x}$, для которого $\eta(n, m_0; l, \mathbf{x}) = 0$, в каждом из первых m_0 ящиков может находиться от 0 до $(l-1)$ единиц; число единиц в ящике с номером (m_0+1) однозначно определяется величиной $(n - m_0 - s)$, где s — суммарное количество единиц в первых m_0 ящиках. Поскольку максимально возможным значением величины s является число $m_0(l-1)$, которое в силу условия теоремы 1 не превышает $(n - m_0)$, мощность множества $\mathbf{A}(n, m_0; l, 0)$ равна числу m_0-мерных векторов, каждая координата которых принимает значения $0, 1, \ldots, l-1$. Число таких векторов равно l^{m_0}, что и требовалось доказать.

Теорема 2. При $m_0(l-1) > n - m_0$, что равносильно $l > \frac{n}{m_0}$, имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$|\mathbf{A}(n, m_0; l, 0)| = \sum_{t=0}^{\left[\frac{n-m_0}{l-1}\right]} C_{m_0}^{t} |\mathbf{A}(n - lt, m_0 - t; l-1, 0)|, \tag{2}$$

где $[a]$ — целая часть числа a.

Доказательство. Из условия теоремы 2 следует, что $m_0 > \frac{n-m_0}{l-1}$. Поэтому множество $\mathbf{A}(n, m_0; l, 0)$, стоящее в левой части равенства (2), определяется теми векторами $\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0)$, в соответствующих (n, m_0)-цепочках которых, во-первых, число t ящиков с номерами, не превышающими m_0 и содержащими по $(l-1)$ единиц в каждом, не может быть больше $\frac{n-m_0}{l-1}$, и, во-вторых, в любом другом ящике из первых m_0, не входящих в приведенный выше набор из t ящиков, содержится не более $(l-2)$ единиц. Поскольку число способов выбора t ящиков с $(l-1)$ единицами в каждом из первых m_0 ящиков равно $C_{m_0}^t$, а число различных размещений оставшихся $(n-m_0-(l-1)t)$ единиц по остальным (m_0-t+1) ящикам, в которых каждый ящик с номером, отличным от (m_0+1), содержит не более $(l-2)$ единиц, равно $|\{\mathbf{x}\in\mathbf{M}(n-lt, m_0-t)\}\colon \eta(n-lt, m_0-t, l-1; \mathbf{x})=0\}| \overset{\mathrm{def}}{=} |\mathbf{A}(n-lt, m_0-t, l-1, 0)|$, формула (2) не вызывает сомнения.

Теорема 2 доказана.

Далее непосредственно из теорем 1, 2 получаем такой результат.

Теорема 3. Справедливы следующие равенства:

1) $|\mathbf{A}(n, m_0; 1, 0)| = 1$,

2) $|\mathbf{A}(n, m_0; 2, 0)| = \begin{cases} 2^{m_0}, & \text{если } m_0 \le n/2, \\ \sum\limits_{t=0}^{n-m_0} C_{m_0}^t, & \text{если } m_0 > n/2. \end{cases}$

Доказательство. Легко видеть, что для $l=1$ условие теоремы 1 выполнено. Поэтому в силу (2) справедливо равенство 1 теоремы 3, а в силу (1) и (2) имеет место равенство 2 теоремы 3, что и требовалось доказать.

Теорема 4. Для любых l, $1\le l\le n-m_0$, и k, $1\le k\le \min\left\{m_0, \frac{n-m_0}{l}\right\}$, справедливы следующие равенства:

$$|\mathbf{A}(n, m_0; l, k)| = C_{m_0}^k \sum_{s=0}^{n-m_0-kl} C_{s+k-1}^s |\mathbf{A}(n-k(l+1)-s, m_0-k; l, 0)|, \tag{3}$$

если $1\le k< \min\left\{m_0, \frac{n-m_0}{l}\right\}$;

$$|\mathbf{A}(n, m_0; l, k)| = C_{m_0}^{(n-m_0)/l}, \text{ если } k=\min\left\{m_0, \frac{n-m_0}{l}\right\} = \frac{n-m_0}{l}; \tag{4}$$

$$|\mathbf{A}(n, m_0; l, k)| = C_{n-m_0 l}^{m_0}, \text{ если } k=\min\left\{m_0, \frac{n-m_0}{l}\right\} = m_0. \tag{5}$$

Доказательство. Согласно утверждению 2 множество $\mathbf{A}(n, m_0; l, k)$ состоит из двоичных векторов веса $(n-m_0)$, в соответствующих (n, m_0)-цепочках которых найдется ровно k ящиков с номерами, не превышающими m_0, в каждом из которых находится не менее l единиц, а в каждом из оставшихся ящиков с номерами, отличными от (m_0+1), — не более $(l-1)$ единиц. С учетом этого мощность множества $\mathbf{A}(n, m_0; l, k)$ определяется следующим образом.

Пусть $1\le k<\min\left\{m_0, \frac{n-m_0}{l}\right\}$. Докажем равенство (3).

Фиксируем k ящиков из первых m_0 ящиков. Это можно сделать $C_{m_0}^k$ способами. Затем в каждый из них помещаем l единиц. Принимая во внимание, что число единиц в каждом из фиксированных k ящиков должно быть не меньше l, берем s, $0\le s\le n-m_0-lk$, единиц и произвольно распределяем их по фиксированным k ящикам дополнительно к уже имеющимся там единицам. Последнее можно сделать C_{s+k-1}^s способами [2, с. 58]. В каждом из оставшихся ящиков с номерами, отличными от (m_0+1), число единиц не должно превышать $(l-1)$; это можно обеспечить $|\mathbf{A}(n-m_0-lk-s, m_0-k; l, 0)|$ способами. Приведенные рассуждения доказывают формулу (3).

Докажем соотношение (4). Очевидно, множество $\mathbf{A}\left(n, m_0; l, \frac{n-m_0}{l}\right)$ состоит из векторов $\mathbf{x}$, соответствующие (n, m_0)-цепочки которых имеют вид: в каждом из фиксированных $k=\frac{n-m_0}{l}$ ящиков из первых m_0 ящиков содержится по l единиц, т.е. все $(n-m_0)$ единиц находятся в фиксированных $k=\frac{n-m_0}{l}$ ящиках, а остальные (m_0+1-k) ящиков пусты. Поэтому мощность рассматриваемого множества равна числу различных способов выбора из первых m_0 ящиков $k=\frac{n-m_0}{l}$ ящиков, что и требовалось доказать.

И, наконец, формула (5) следует из таких рассуждений.

Множество $\mathbf{A}(n, m_0; l, m_0)$ состоит из векторов $\mathbf{x}$, соответствующие (n, m_0)-цепочки которых можно построить следующим образом: в каждый из первых m_0 ящиков помещаем по l единиц. Поскольку в силу условия (5) $lm_0 \le n-m_0$, оставшиеся $(n-m_0-lm_0)$ единиц произвольно размещаем по (m_0+1) ящикам. Последнее на основании [2, с. 58] можно сделать $C_{n-m_0 l}^{m_0}$ способами.

Теорема 4 доказана.

Заметим, что непосредственно из определения множеств $\mathbf{A}(n, m_0; l, 0)$, $1 \le l \le n-m_0$, следует, что $\mathbf{A}(n, m_0; l-1, 0) \subseteq \mathbf{A}(n, m_0; l, 0)$. Отсюда очевидно, что $\mathbf{B}(n, m_0; l-1) = \mathbf{A}(n, m_0; l, 0) \setminus \mathbf{A}(n, m_0; l-1, 0)$ — это множество векторов $\mathbf{x} \in \mathbf{M}(n, m_0)$, в каждом из которых максимальная длина ступени равна $(l-1)$. Мощность такого множества определяется формлой

$$|\mathbf{B}(n, m_0; l-1)| = |\mathbf{A}(n, m_0; l, 0)| - |\mathbf{A}(n, m_0; l-1, 0)|. \qquad (6)$$

Итак, формулы (1)–(6) позволяют вычислять мощности соответствующих подмножеств множества $\mathbf{M}(n, m_0)$. Использование формул (2), (3), (6) при больших значениях n требует привлечения вычислительной техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Масол В.И. Асимптотическое поведение некоторых статистик (0,1)-вектора // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1990. — Вып. 43. — С. 83–90.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т.1. — М.: Мир, 1984. — 528 с.

Поступила 17.02.2012