УДК 518.9

$\boxed{\text{В.В. ОСТАПЕНКО}}$, О.С. ОСТАПЕНКО, Е.Н. БЕЛЯЕВА, Ю.В. СТУПНИЦКАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БОРЬБЫ ПАРТИЙ ЗА ЭЛЕКТОРАТ ИЛИ КОМПАНИЙ ЗА РЫНКИ СБЫТА

Ключевые слова: *социологические процессы, конфликтные ситуации, бескоалиционные игры, ситуации равновесия, условия существования решения игры.*

ВВЕДЕНИЕ

В основу многих математических моделей социологических процессов положены теория вероятностей и математическая статистика [1–5]. Однако сложность и разнообразие проблем, возникающих в социологии, требуют введения широкого математического аппарата, который включает теорию графов, кластерный анализ, анализ экспертных оценок, распознавание образов, численные методы оптимизации и другие методы системного анализа [4].

В большинстве социологических процессов возникают конфликтные ситуации, например, борьба партий за электорат или компаний за рынки сбыта, поиск оптимального решения (например, размещение капитала) в условиях неопределенности. Подобные процессы естественно моделировать в рамках теории бескоалиционных игр [6]. Наиболее изучены антагонистические игры, в которых один из игроков борется с остальными, считая, что они объединены против него. Однако даже в случае участия в игре двух игроков это не подтверждается, поскольку каждый из них преследует свои цели.

В данной статье получили развитие методы работ [7–9], построены модели процессов размещения средств на рекламу в разных регионах (для партий) или на рынках (для компаний) с целью максимизации величины электората или прибыли. Рассмотрены вопросы взаимного влияния партий (компаний) в конкретном регионе (рынке), дано понятие оптимального решения для каждого игрока, исследованы вопросы его существования и численные методы нахождения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ИГРОКОВ

Проанализируем процесс борьбы двух партий за электорат в одном регионе (аналогично можно описать борьбу двух фирм за конкретный рынок сбыта).

Пусть A — количество населения, имеющего право голоса, т.е. электорат. Предположим, что количество избирателей, пришедших голосовать за ту или иную партию, прямо пропорционально средствам, вложенным в избирательную (рекламную) кампанию. Считаем, что эта зависимость описывается функциями $f(x)$ и $g(y)$, которые монотонно возрастают, и $0 \le f(x) \le 1$, $0 \le g(y) \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Здесь x и y — средства, вложенные первым и вторым игроками (партиями) в предвыборную кампанию. Если второй игрок не участвует в данной кампании, то выигрыш, равный $f(x)A$, получит только первый, и наоборот, если первый игрок не участвует в кампании, то выигрыш $g(y)A$ получит только второй. (В случае рассмотрения борьбы фирм за рынки сбыта обозначим A покупательную способность соответствующего рынка, а $f(x)A$ и $g(y)A$ — прибыль от проведения рекламной кампании.) В реальности оба игрока одновременно играют в данном регионе или на рынке сбыта. Поэтому первый игрок получает часть того, что оставил ему второй, а второй игрок — часть того, что оставил ему первый.

Пусть u — выигрыш первого и v — выигрыш второго игрока. Тогда имеем

$$u(x,\, y) = f(x)(A - v(y)), \tag{1}$$

$$v(x,\, y) = g(y)(A - u(x)). \tag{2}$$

Отсюда получаем

$$u(x,\, y) = \frac{f(x)(1 - g(y))}{(1 - f(x)g(y))} A, \tag{3}$$

$$v(x,\, y) = \frac{g(y)(1 - f(x))}{(1 - f(x)g(y))} A. \tag{4}$$

Опишем взаимодействие m игроков ($k = 1, \ldots, m$). Тогда уравнения (1), (2) обобщаются в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1)(A - u_2 - u_3 - \ldots - u_m), \\ u_2 &= f_2(x_2)(A - u_1 - u_3 - \ldots - u_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= f_m(x_m)(A - u_1 - u_2 - \ldots - u_{m-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $f_k(x_k)$ — функция, описывающая зависимость между средствами, вложенными в рекламную кампанию k-м игроком и его выигрышем. Как и ранее, считаем, что если в рекламной кампании участвует только k-й игрок, то он получит $f_k(x_k)A$, а выигрыш других игроков будет равен нулю.

Систему уравнений (5) перепишем в виде

$$\begin{aligned} a_1 u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m &= A, \\ u_1 + a_2 u_2 + u_3 + \ldots + u_m &= A, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + a_m u_m &= A, \end{aligned}$$

где $a_k = f_k^{-1}(x_k)$, и решим ее методом Крамера.

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_2 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & a_m \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = A \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_2 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & a_m \end{vmatrix},$$

$$\Delta_k = A \begin{vmatrix} a_1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & a_{k-1} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & a_{k+1} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & a_m \end{vmatrix}.$$

Тогда $u_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$. Путем непосредственного вычисления получаем

$$\Delta = (a_1 - 1)(a_2 - 1)\ldots(a_m - 1)\left(1 + \frac{1}{a_1 - 1} + \ldots + \frac{1}{a_m - 1}\right),$$

$$\Delta_1 = A(a_2 - 1)\ldots(a_m - 1), \; \Delta_k = A(a_1 - 1)\ldots(a_{k-1} - 1)(a_{k+1} - 1)\ldots(a_m - 1).$$

Отсюда

$$u_1 = A\left(1+(a_1-1)\left(1+\frac{1}{a_2-1}+\ldots+\frac{1}{a_m-1}\right)\right)^{-1}, \tag{6}$$

$$u_k = A\left(1+(a_k-1)\left(1+\frac{1}{a_1-1}+\ldots+\frac{1}{a_{k-1}-1}+\frac{1}{a_{k+1}-1}+\ldots+\frac{1}{a_m-1}\right)\right)^{-1}. \tag{7}$$

ПОСТАНОВКА ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ

Проанализируем игру двух игроков, воспользовавшись моделью (1), (2). Рассмотрим случай для n регионов или рынков сбыта ($i=1,\ldots,n$). Величинам A, f, g, x, y, u, v из (1) и (2) присвоим индекс i: $u_i = f_i(x_i)(A_i - v_i)$, $v_i = g_i(y_i)(A_i - u_i)$.

Из (3), (4) имеем

$$u_i(x_i,\ y_i) = \frac{f_i(x_i)(1-g_i(y_i))}{1-f_i(x_i)g_i(y_i)} A_i, \qquad v_i(x_i,\ y_i) = \frac{g_i(y_i)(1-f_i(x_i))}{1-f_i(x_i)g_i(y_i)} A_i.$$

Предположим, что средства первого и второго игроков ограничены положительными величинами a и b соответственно. Приходим к бескоалиционной игре двух лиц с функционалом выигрыша

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i, y_i), \quad G(x, y) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i, y_i),$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n), \tag{8}$$

и с ограничениями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a,\ x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = b,\ y_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Используя формулу (7), обобщаем сформулированную игру для случая, когда в ней будут участвовать m игроков ($k=1,\ldots,m$).

Введем следующие обозначения: x_{ik} — средства, вложенные в избирательную (рекламную) кампанию k-м игроком в i-й регион (рынок сбыта); a_i — суммарные средства k-го игрока; $f_{ik}(x_{ik})$ — функция, описывающая зависимость между средствами, вложенными в избирательную (рекламную) кампанию k-м игроком в i-й регион (рынок сбыта), и его выигрышем; $a_{ik} = f_{ik}^{-1}$.

Из (7) получаем, что выигрыш k-го игрока в i-м регионе составляет

$$u_{ik} = A_k\left(1+(a_{ik}-1)\left(+\frac{1}{a_{1k}-1}+\ldots+\frac{1}{a_{i-1k}-1}+\frac{1}{a_{i+1k}-1}+\ldots+\frac{1}{a_{nk}-1}\right)\right)^{-1}.$$

Имеем бескоалиционную игру m лиц с функционалом выигрыша k-го игрока

$$F_k(x^1, \ldots, x^m) = \sum_{i=1}^{n} u_{ik}(x_{i1}, \ldots, x_{1m}),$$

$$x^k = (x_{1k}, \ldots, x_{nk}) \tag{10}$$

и ограничениями

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = a_i,\ x_{ik} \ge 0,\ k = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Области ограничений (11) являются выпуклыми для каждого из игроков. Поэтому для существования ситуации равновесия в игре (10), (11) достаточно, чтобы функционал F_k для каждого k был выпуклым по переменному вектору x^k. Если он будет строго выпуклым, то решение игры будет единственным. Из формулы (10) следует, что необходимо проверять вогнутость функций одной переменной $u_{ik}(x_{ik})$. Достаточно провести исследование функции из формулы (6), для этого обозначим

$$B = 1 + \frac{1}{a_2 - 1} + \ldots + \frac{1}{a_m - 1}.$$

Из условий для f_k следует, что $a_k > 1$, $B \geq 1$. Отсюда

$$u_1 = A_1 \frac{f_1}{B - (B-1) f_1} = \frac{A_1}{B-1} \left[\frac{f_1}{\frac{B}{B-1} - f_1} \right].$$

Таким образом, для доказательства вогнутости u_1 по x_1 достаточно показать неположительность функции $\left(\frac{f_1}{C - f_1} \right)''_{x_1}$, где $C = \frac{B}{B-1}$, а индекс возле функции f и ее аргумента x опущен, $f = f(x)$. Достаточными условиями вогнутости является неравенство $f''(f - c) \leq 2(f')^2$.

Рассмотрим следующие функции:

1) $f_i(x_i) = \dfrac{k_i x_i}{1 + k_i x_i}$;

2) $f_i(x_i) = \dfrac{k_i \sqrt{x_i}}{1 + k_i \sqrt{x_i}}$;

3) $f_i(x_i) = \dfrac{k_i \ln(x_i)}{1 + k_i \ln(x_i)}$, $x_i \geq 1$;

4) $f_i(x_i) = \dfrac{k_i x_i^2}{1 + k_i x_i^2}$;

5) $f_i(x_i) = \dfrac{k_i e^{x_i}}{1 + k_i e^{x_i}}$;

6) $f_i(x_i) = 1 - e^{-k_i x_i}$;

7) $f_i(x_i) = \dfrac{k_i x_i^3}{1 + k_i x_i^3}$.

Найдем для каждой из них условия, при которых $\left(\frac{f_1}{C - f_1} \right)''_{x_1} \leq 0$:

1) $$\left(\frac{f_1}{C - f_1} \right)''_{x_1} = \left(\frac{k_1 x_1 (k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n)}{1 + k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n} \right)''_{x_1} =$$

$$= -\frac{2k_1^2 (k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n)(1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n)}{(1 + k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n)^3} \leq 0 \quad \forall\, k_i, x_i;$$

$$2)\ \left(\frac{f_1}{C-f_1}\right)''_{x_1} = \left(\frac{k_1\sqrt{x_1}\,(k_2\sqrt{x_2}+\ldots+k_n\sqrt{x_n})}{1+k_1\sqrt{x_1}+\ldots+k_n\sqrt{x_n}}\right)''_{x_1} =$$

$$= -\frac{k_1^2\,(k_2\sqrt{x_2}+\ldots+k_n\sqrt{x_n})(1+k_2\sqrt{x_2}+\ldots+k_n\sqrt{x_n})}{2x_1^2\,(1+k_1\sqrt{x_1}+\ldots+k_n\sqrt{x_n})^3} \le 0 \quad \forall\, k_i, x_i;$$

$$3)\ \left(\frac{f_1}{C-f_1}\right)''_{x_1} = \left(\frac{k_1\ln x_1\,(k_2\ln x_2+\ldots+k_n\ln x_n)}{1+k_1\ln x_1+\ldots+k_n\ln x_n}\right)''_{x_1} =$$

$$= -\frac{2k_1^2\,(k_2\ln x_2+\ldots+k_n\ln x_n)(1+k_2\ln x_2+\ldots+k_n\ln x_n)}{(1+k_1\ln x_1+\ldots+k_n\ln x_n)^3} \le 0 \quad \forall\, k_i, x_i;$$

$$4)\ \left(\frac{f_1}{C-f_1}\right)''_{x_1} = \left(\frac{k_1x_1^2\,(k_2x_2^2+\ldots+k_nx_n^2)}{1+k_1x_1^2+\ldots+k_nx_n^2}\right)''_{x_1} =$$

$$= \frac{2k_1\,(k_2x_2^2+\ldots+k_nx_n^2)((1+k_2x_2^2+\ldots+k_nx_n^2-3k_1x_1^2)\times}{(1+k_1x_1^2+\ldots+k_nx_n^2)^3}$$

$$\frac{\times(1+k_1x_1^2+\ldots+k_nx_n^2)-4k_1x_1\,(1+k_2x_2^2-k_1x_1^2+\ldots+k_nx_n^2))}{} \le 0$$

при $\dfrac{(1+k_2a_2^2+\ldots+k_na_n^2-3k_1a_1^2)(1+k_1a_1^2+\ldots+k_na_n^2)}{4k_1a_1\,(1-k_1a_1^2+k_2a_2^2+\ldots+k_na_n^2)} \le 1;$

$$5)\ \left(\frac{f_1}{C-f_1}\right)''_{x_1} = \left(\frac{k_1e^{x_1}\,(k_2e^{x_2}+\ldots+k_ne^{x_n})}{1+k_1e^{x_1}+\ldots+k_ne^{x_n}}\right)''_{x_1} =$$

$$= \frac{k_1e^{x_1}\,(k_2e^{x_2}+\ldots+k_ne^{x_n})(1+k_2e^{x_2}+\ldots+k_ne^{x_n})\times}{(1+k_1e^{x_1}+\ldots+k_ne^{x_n})^3}$$

$$\frac{\times(1-k_1e^{x_1}+k_2e^{x_2}+\ldots+k_ne^{x_n})}{} \le 0$$

при $\ln k_1 \ge \ln 1 + a_2\ln k_2+\ldots+a_n\ln k_n - a_1;$

$$6)\ \left(\frac{f_1}{C-f_1}\right)''_{x_1} = \left(\frac{1-e^{-k_1x_1}\left(\dfrac{1}{e^{-k_2x_2}}-1+\ldots+\dfrac{1}{e^{-k_nx_n}}-1\right)}{1+e^{-k_1x_1}\left(\dfrac{1}{e^{-k_2x_2}}-1+\ldots+\dfrac{1}{e^{-k_nx_n}}-1\right)}\right)''_{x_1} =$$

$$= \left(\frac{1-me^{-k_1x_1}}{1+me^{-k_1x_1}}\right)''_{x_1} = -\frac{4k_1^2m^3e^{-3k_1x_1}}{(1+me^{-k_1x_1})^3} \le 0 \quad \forall\, k_i, x_i;$$

$$7)\ \left(\frac{f_1}{C-f_1}\right)''_{x_1} = \left(\frac{k_1x_1^3\,(k_2x_2^3+\ldots+k_nx_n^3)}{1+k_1x_1^3+\ldots+k_nx_n^3}\right)''_{x_1} =$$

$$= \frac{6k_1x_1(k_2x_2^3+\ldots+k_nx_n^3)((1-5k_1x_1^3+k_2x_2^3+\ldots+k_nx_n^3)\times}{(1+k_1x_1^3+\ldots+k_nx_n^3)^3}$$

$$\frac{\times(1+k_1x_1^3+\ldots+k_nx_n^3)-x_1(1-2k_1x_1^3+k_2x_2^3+\ldots+k_nx_n^3))}{} \le 0$$

при $$\frac{(1-5k_1a_1^3+k_2a_2^3+\ldots+k_na_n^3)(1+k_1a_1^3+\ldots+k_na_n^3)}{a_1(1-2k_1a_1^3+k_2a_2^3+\ldots+k_na_n^3)} \le 1\,.$$

НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Найдем решение игры (8), (9) для функции $f_i(x_i)=\dfrac{k_ix_i}{1+k_ix_i}$ для двух игроков. Необходимым и достаточным условием решения этой задачи является выполнение условий Куна–Таккера.

Определим функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda,y)=\sum_{i=1}^{n}F_i\ (x_i,y_i)+\lambda\left(a-\sum_{i=1}^{n}x_i\right),$$

где λ — множитель Лагранжа.

Запишем условия существования седловой точки $L(x,\lambda,y)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial F_i}{\partial x_i}-\lambda\le 0,\ \ i=1\ldots n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=a-\sum_{i=1}^{n}x_i\ge 0,\quad \frac{\partial L}{\partial x_i}x_i=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}-\lambda\right)x_i=0,\ \ i=1\ldots n,$$

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\lambda\left(a-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0,\quad x_i\ge 0,\ \ \lambda\ge 0\,.$$

Тогда условия оптимальности первого порядка примут вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}-\lambda=0,\\ a-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial y_i}-\mu=0,\\ b-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i=0,\end{cases}$$

где μ — множитель Лагранжа.

Поскольку обе партии (компании) стремятся одновременно максимизировать свой выигрыш, решение этой задачи можно представить как совместное решение объединенной системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}-\lambda=0,\\ \dfrac{\partial G}{\partial y_i}-\mu=0,\\ a-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=0,\\ b-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i=0.\end{cases}\qquad (12)$$

Система (12) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{k_i(1+l_i y_i)}{(1+k_i x_i+l_i y_i)^2} A_i=\lambda, \quad i=1\ldots n, \\ \dfrac{l_i(1+k_i x_i)}{(1+k_i x_i+l_i y_i)^2} A_i=\mu, \quad i=1\ldots n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i=a, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i=b. \end{cases} \tag{13}$$

Разделив первое уравнение системы (13) на второе, получим линейную зависимость между денежными взносами x_i и y_i соответственно первой и второй партий (компаний) в *i*-й регион (рынок сбыта)

$$\frac{k_i(1+l_i y_i)}{l_i(1+k_i x_i)}=\frac{\lambda}{\mu}.$$

После преобразования получим

$$\left(x_i+\frac{1}{k_i}\right)=\frac{\mu}{\lambda}\left(y_i+\frac{1}{l_i}\right). \tag{14}$$

Просуммируем обе части последнего равенства по *i*:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{k_i}\right)=\frac{\mu}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i+\frac{1}{l_i}\right).$$

Учитывая ограничения $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=a$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i=b$, имеем

$$\frac{\mu}{\lambda}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{k_i}+a}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{l_i}+b},$$

т.е. явную зависимость отношения множителей Лагранжа μ/λ от параметров системы. Обозначим C отношение μ/λ и получим линейную зависимость вклада в *i*-й регион первой партии от соответствующего вклада второй партии

$$k_i x_i=\frac{Ck_i(1+l_i y_i)-l_i}{l_i}.$$

Воспользуемся полученным выражением, чтобы исключить переменную x_i из системы (13). Подставив его в первое уравнение системы, после преобразования имеем систему из $n+1$ уравнения с $n+1$ неизвестным

$$\begin{cases} \dfrac{k_i l_i^2(1+l_i y_i)A_i}{(y_i(l_i^2+Ck_i l_i)+Ck_i)^2}=\lambda, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i=b. \end{cases} \tag{15}$$

Данная система (15) значительно проще исходной системы (13). Кроме того, первые n уравнений являются квадратными по переменной y_i, что позволяет еще больше упростить алгоритм поиска решения оптимизационной задачи, а именно для каждого i представить зависимость y_i в виде явной функции от неизвестного множителя Лагранжа λ, и, используя ограничения на взнос второй партии (компании) в регионы (рынки сбыта) $\sum_{i=1}^{n} y_i = b$, свести решение задачи математического программирования к решению одного нелинейного уравнения с одним неизвестным.

Для упрощения решения системы (15) ее первое уравнение запишем в виде квадратного уравнения относительно

$$a_1\lambda \cdot y_i^2 + (2a_2\lambda - a_3)y_i + a_4\lambda - a_5 = 0, \tag{16}$$

где $a_1 = (l_i^2 + Ck_i l_i)^2$, $a_2 = (l_i^2 + Ck_i l_i)Ck_i$, $a_3 = k_i l_i^3 A_i$, $a_4 = C^2 k_i^2$, $a_5 = k_i l_i^2 A_i$.

Решение уравнения (16) имеет вид

$$y_i = \frac{a_3 - 2a_2\lambda \pm \sqrt{(2a_2\lambda - a_3)^2 - 4a_1\lambda(a_4\lambda - a_5)}}{2a_1\lambda}.$$

После подстановки выражений a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и ряда преобразований получим решение уравнения (15) в виде

$$y_i = \frac{k_i l_i^3 A_i - 2(l_i^2 + Ck_i l_i)Ck_i\lambda + \sqrt{D}}{2(l_i^2 + Ck_i l_i)^2\lambda}, \tag{17}$$

где $D = 4(l_i + Ck_i)k_i l_i^5 A_i\lambda + k_i^2 l_i^6 A_i^2$.

Знак минус перед выражением $\sqrt{D}$ невозможен, так как в этом случае $y_i < 0$.

Воспользовавшись ограничением $\sum_{i=1}^{n} y_i = b$, исключим из выражения (17) y_i и получим одно уравнение с одним неизвестным множителем Лагранжа λ:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = b = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i l_i^3 A_i}{2(l_i^2 + Ck_i l_i)^2\lambda} - \sum_{i=1}^{n} \frac{Ck_i}{(l_i^2 + Ck_i l_i)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{D}}{2(l_i^2 + Ck_i l_i)^2\lambda}.$$

Отсюда,

$$\left(b + \sum_{i=1}^{n} \frac{Ck_i}{(l_i^2 + Ck_i l_i)}\right)\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i l_i^3 A_i}{2(l_i^2 + Ck_i l_i)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{D}}{2(l_i^2 + Ck_i l_i)^2}. \tag{18}$$

Таким образом, задача решения нелинейной системы (13) из $2n+2$ уравнений с $2n+2$ неизвестными сведена к задаче решения одного нелинейного уравнения с одним неизвестным λ. Алгоритм решения задачи включает следующие этапы:

- вычисление оптимального множителя Лагранжа из уравнения (18) с использованием численного метода;
- определение y_i, $i = 1 \ldots n$, согласно выражению (18);
- определение x_i, $i = 1 \ldots n$, на основе уравнения (14).

Для случая m партий (компаний) необходимо решить (численно) следующую систему:

$$
\begin{cases}
\dfrac{k_{i1}(1+k_{i2}x_{i2}+\ldots+k_{im}x_{im})}{(1+k_{i1}x_{i1}+k_{i2}x_{i2}+\ldots+k_{im}x_{im})^2}A_i=\lambda_1,\ i=1\ldots n,\\
\dfrac{k_{i2}(1+k_{i1}x_{i1}+k_{i3}x_{i3}+\ldots+k_{im}x_{im})}{(1+k_{i1}x_{i1}+k_{i2}x_{i2}+\ldots+k_{im}x_{im})^2}A_i=\lambda_2,\ i=1\ldots n,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{k_{im}(1+k_{i1}x_{i1}+k_{i3}x_{i3}+\ldots+k_{im-1}x_{im-1})}{(1+k_{i1}x_{i1}+k_{i2}x_{i2}+\ldots+k_{im}x_{im})^2}A_i=\lambda_m,\ i=1\ldots n,\\
\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=a_j,\ j=1\ldots m.
\end{cases}
$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

• Предложено теоретико-игровую модель борьбы m политических партий (компаний) за электорат (рынки сбыта) в ходе предвыборной (рекламной) кампании.

• Сформулирована задача математического программирования для определения максимального количества голосов, отданных за партию (максимальной прибыли компании).

• Исследована оптимизационная модель и доказано существование единственного решения для семи различных функций зависимости выигрыша от вложенных средств.

• Для случая двух конкурирующих политических партий (компаний) и произвольного количества регионов (рынков сбыта) решение задачи оптимизации сведено к решению одного нелинейного уравнения с одним неизвестным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ядов В.А. Социологические исследования: методология, программа, методы. — Самара: Самарский ун-т, 1995. — 331 с.
2. Паниотто В.И. Качество социологической информации: методы, оценки и процедуры, обеспечение. — К.: Наук. думка, 1986. — 207 с.
3. Паниотто В.И., Максименко В.С. Количественные методы в социологических исследованиях. — К.: Наук. думка, 1982. — 272 с.
4. Паниотто В.И., Закревская Л.А., Черноволенко А.В. и др. Опыт моделирования социологических процессов (вопросы методологии и методики построения моделей). — К.: Наук. думка, 1989. — 200 с.
5. Чурилов Н.Н. Проектирование выборочного социологического исследования: Некоторые методологические и методические проблемы. — К.: Наук. думка, 1986. — 183 с.
6. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, 1985. — 272 с.
7. Панкратова Н.Д., Недашковская Н.И. Оценивание многофакторных рисков в условиях концептуальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 2. — С. 1–12.
8. Недашківська Н.І., Остапенко В.В., Остапенко О.С. Теоретико-ігрова модель боротьби партій за електорат // Системні та інформ. технології. — 2003. — № 4. — С. 113–119.
9. Остапенко В.В., Остапенко О.С., Подладчикова Т.В. Оптимизация стратегии политических партий в ходе предвыборной кампании // Там же. — 2006. — № 2. — С. 84–98.

Поступила 10.03.2011