УДК 519.21

В.К. ЯСИНСКИЙ, Н.П. БОДРИК

УСТОЙЧИВОСТЬ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНЫХ ФАКТОРОВ

Ключевые слова: *устойчивость в среднем квадратичном, диффузионное стохастическое дифференциально-функциональное уравнение, задача Коши, фундаментальное решение, случайный фактор.*

ВВЕДЕНИЕ

Стохастическим дифференциальным уравнениям без последействия относительно существования сильного решения, их свойствам и асимптотическому поведению посвящены фундаментальные работы И.И. Гихмана, А.В. Скорохода [1–5], в которых можно найти ссылки на аналогичные исследования иностранных авторов.

Исследованию стохастических дифференциально-функциональных систем посвящены известные монографии В.Б. Колмановского, Л.Е. Шайхета и Р.З. Хасьминского [6–8]. Популярна монография Е.Ф. Царькова [9], в которой на высоком фундаментальном уровне изложены основные вопросы асимптотического поведения решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений (СДФУ) и их приложений.

В настоящей статье обобщены некоторые результаты Е.Ф. Царькова при наличии в СДФУ случайных факторов. Осуществлен переход к интегральной записи решения диффузионного стохастического дифференциально-функционального уравнения (ДСДФУ) с помощью фундаментального решения соответствующего детерминированного дифференциально-функционального уравнения (ДФУ). Получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном (l.i.m.) сильного решения автономного ДСДФУ с конечным последействием с учетом случайных факторов (действие на систему извне случайных функций с различными законами распределения). Изучено поведение на бесконечности сильных решений неавтономных ДСДФУ с учетом случайных факторов. Рассмотрен случай линейного неавтономного ДСДФУ более общего вида. Полученные результаты иллюстрируются модельными задачами, в которых учтено влияние случайных функций на математическую модель изучаемой системы.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДСДФУ С ПОМОЩЬЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ДФУ

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathfrak{F}$, задано линейное ДСДФУ со случайными факторами

$$dy(t) = a(y_t)dt + f(\xi(\omega))b(y_t)dW(t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(\theta + s) = \varphi(\theta) \text{ при } \forall\, \theta \in [-\tau, 0],\ \tau > 0. \tag{2}$$

Здесь $a(\varphi)$ — линейное непрерывное отображение из $C_n([-\tau, 0])$ в $\mathbb{R}^n$; $b(\varphi)$ — линейное непрерывное отображение из $C_n([-\tau, 0])$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; $y_t \equiv \{y(t+\theta),\ \theta \in [-\tau, 0]\}$ — отрезок траектории; $W(t) \equiv W(t, \omega) : [0, \infty] \times \Omega \to \mathbb{R}^1$ — скалярный процесс броуновского движения; $\xi(\omega):\Omega \to \mathbb{R}^1$ — случайная величина с законом распределения $F_\xi(x)$ или $p_\xi(x)$; $f \equiv \{f_{ij}\}_{i,j=1}^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, где $f_{ij}(\cdot)$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n})$ — беровские функции ($f(\xi(\omega))$ не зависит от броуновского процесса, а $\mathbb{E}\{f_{ij}^2(\xi)\} < \infty$, $\mathbb{E}\{\cdot\}$, — операция математического ожидания).

Обозначим $x(t,s,\varphi)$ решение начальной задачи (1), (2) детерминированного уравнения

$$dx(t) = a(x_t)dt. \tag{3}$$

Докажем, что решение задачи Коши ДСДФУ (1), (2) можно записать в интегральном виде

$$y(t,s,\varphi) = x(t,s,\varphi) + f(\xi)\int_0^t h(t-\tau)b(y_\tau)dW(\tau), \tag{4}$$

где $\{h(t),\ t \ge 0\}$ — матричное решение (3) с начальным условием

$$h(\theta) \equiv \begin{cases} 0, & \theta \in [-\tau, 0); \\ 1, & \theta = 0. \end{cases}$$

Начальную функцию (2) для ДСДФУ можно выбирать как неслучайную, так и $\mathfrak{R}^s$-измеримую с непрерывными реализациями. Обозначим $\mathbb{H}_1(a,b)$ пространство $\mathfrak{R}^t$-измеримых случайных процессов $\zeta(t) \equiv \zeta(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$||\zeta(t)||^2_{(a,b)} \equiv \int_a^b \mathbb{E}\{|\zeta(t)|^2\}dt < \infty.$$

Лемма 1. Пусть функция $\{h(t,s),\ t \ge s \ge 0\}$ непрерывна вместе со своей частной производной $\{h'_t(t,s),\ t \ge s \ge 0\}$, а также $F(t,\omega) \in \mathbb{H}_1(0,T)$ для $\forall\, T > 0$.

Тогда случайный процесс

$$z(t) \equiv \int_0^t h(t,s)F(s)dW(s)$$

имеет стохастический дифференциал

$$dz(t) = \left[\int_0^t h'_t(t,s)F(s)dW(s)\right]dt + h(t,t)F(t)dW(t). \tag{5}$$

Доказательство. Для $\forall\, t'' > t' \ge 0$ (таких, что $[t', t''] \subset [0,\infty]$) и $\Delta \equiv \dfrac{t''-t'}{m}$ получим конечное число $t_k = t' + k\Delta$, $k = 0, 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда можно записать приращения для случайного процесса $z(t)$, заданного интегралом Винера–Ито как функции верхней границы, которые эквивалентны по определению стохастического дифференциала $dz(t)$ [4, 10]:

$$z(t'') - z(t') = \sum_{k=0}^{m-1}[z(t_{k+1}) - z(t_k)] = \sum_{k=0}^{m}\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t_{k+1},\tau)F(s)dW(s) +$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{t_k}(h(t_{k+1},s) - h(t_k,s))F(s)dW(s) =$$

$$= \int_{t'}^{t''} h(s,s)F(s)dW(s) + \sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{t_k}[h(t_{k+1},s) - h(s,s)]F(s)dW(s) +$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\int_{0}^{t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} h'_t(t,s)\,dt\,dW(s)=\int_{t'}^{t''} h(t,t)F(t)\,dW(t)+$$

$$+\int_{t'}^{t''}\int_{0}^{t} h'_t(t,s)\,dW(s)\,dt+A_m+B_m, \tag{6}$$

где

$$A_m\equiv\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[h(t_{k+1},s)-h(s,s)]F(s)\,dW(s);$$

$$B_m\equiv-\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t} h'_t(s,s)F(s)\,dW(s)\,dt.$$

Пусть $C\equiv\sup\limits_{t'\le s\le t''}|h'_t(t,s)|^2$. Оценим второй момент $\mathbb{E}\{|A_m|^2\}$, используя равенство второго момента стохастического интеграла Ито [4] обычному интегралу от второго момента подынтегрального выражения, а именно:

$$\mathbb{E}\{|A_m|^2\}\le m\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[h(t_{k+1},s)-h(s,s)]^2\,\mathbb{E}\{||F(s)||^2\}\,ds\le$$

$$\le m\sum_{k=0}^{m-1}c^2\Delta^2\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbb{E}\{||F(s)||^2\}\,d\tau\le\frac{c^2(t''-t')}{m}||F||^2_{(t',t'')}.$$

Аналогично можно оценить

$$\mathbb{E}\{|B_m|^2\}\le\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\int_{\tau}^{t_{k+1}} h'_t(t,s)\,dt\right|^2\mathbb{E}\{||F(s)||^2\}\,ds\le$$

$$\le m\sum_{k=0}^{m-1}c^2\Delta^2\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbb{E}\{||F(s)||^2\}\,d\tau\le\frac{c^2(t''-t')}{m}||F||^2_{(t',t'')}.$$

А это значит, что $\lim\limits_{m\to\infty}A_m=\lim\limits_{m\to\infty}B_m=0$.

Доказательство вытекает из (6) с учетом последнего равенства.

Замечание 1. Формулу (5) будем использовать и для $t\in[-\tau,0]$, полагая, что $h(t)=0$ при $\forall t\in[-\tau,0]$. Тогда задача (1), (2) эквивалентна (5) и для $\forall t\in[-\tau,0]$, так как $x(s+\varphi,s,\varphi)=\varphi(\theta)$ при $\forall\theta\in[-\tau,0]$ по определению.

Теорема 1. Решение ДСДФУ (1) можно записать в интегральной форме с помощью фундаментальной матрицы Коши детерминированного ДФУ (3) для $\forall t\ge s>0$

$$y(t,s,\varphi)=x(t,s,\varphi)+f(\xi(\omega))\int_{s}^{t}H(t-\tau)<b,y_\tau>dW(\tau), \tag{7}$$

где $x(t,s,\varphi)$ — любое решение ДФУ (3), $<b,y_\tau>\equiv\int_{-\tau}^{0}b(d\theta)\,y(\theta)$.

Доказательство. Случайный процесс, заданный выражением (7), согласно леммы 1 имеет стохастический дифференциал

$$dy(t,s,\varphi)=dx(t,s,\varphi)+f(\xi(\omega))<b,\,y_t>dW(t)+$$

$$+\left[\int_0^t f(\xi(\omega))h_t'(t-\tau)b(x_\tau)dW(\tau)\right],$$

который совпадает с (4).

Действительно, по определению фундаментального решения имеем $h_t'(t-\tau)=a(h_{t-\tau}(\theta))$. Тогда согласно линейности оператора $a(\cdot)$ получим

$$f(\xi(\omega))\int_0^t h_t'(t-\tau)b(x_\tau)dW(\tau)=$$

$$=a\int_0^t f(\xi(\omega))h_{t-\tau}(\theta)b(x_\tau)dW(\tau)=a(x_t-y_t)\,,$$

что и доказывает теорему 1.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВТОРОГО МОМЕНТА РЕШЕНИЯ АВТОНОМНОГО ДСДФУ

Обозначим $<\nu,\varphi>$ значения линейного функционала $\nu\in\mathbb{E}$ на элементах банахового пространства $\varphi\in\mathbb{E}$; $C_n([-\tau,0])\equiv C([-\tau,0]\to\mathbb{R}^n)$; $C^*([-\tau,0]\times[-\tau,0]\to$ $\to M_n(\mathbb{R}))$ — пространство непрерывных линейных функционалов, действующих из $C([-\tau,0])$ в $M_n(\mathbb{R})$. Линейный непрерывный функционал на этом пространстве определим формулой

$$<\mu,\varphi>\equiv\int_{-\tau}^0 sp\,[\mu^T(d\theta)\varphi(\theta)]\,,$$

где $\varphi\in C([-\tau,0]\to M_n(\mathbb{R}))$; μ — матрица, состоящая из счетно-аддитивных функций борелевских множеств отрезка $[-\tau,0]$; $sp\,A$ — след матрицы A; $M_n(\mathbb{R})$ — матрица размера $n\times n$ с действительными коэффициентами; $B_n(\mathbb{R})$ — пространство элементов $f\in\hat{B}(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию $||f||=$ $=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|<\infty$.

Изложим метод получения и анализа интегральных уравнений для вторых моментов решений задачи Коши для ДСДФУ (1), (2) в скалярном случае и докажем асимптотическое поведение [11] их решений.

Будем полагать:

а) функционалы $a,b\in C^*([-\tau,0])$ как коэффициенты ДСДФУ (1) непрерывны;

б) $a(0)=0$; $b(0)=0$.

Тогда ДСДФУ (1) можно представить в виде

$$dy(t)=<a,\,y_t>dt+f(\xi(\omega))<b,\,y_t>dW(t)\,.$$

Теорема 2. Для $\forall\varphi\in C([-\tau,0])$, $g\in C^*([-\tau,0])$ и $s\geq 0$ необходимыми и достаточными условиями выполнения

$$<g,\,y_{t+s}(s,\varphi)>\in\mathbb{H}_1\quad\forall t\in\mathbb{R}_+ \tag{8}$$

являются следующие:

1) корни характеристического квазиполинома $V(\lambda) \equiv \lambda - < a, e_\lambda >$ расположены в левой полуплоскости $(\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0)$;

2) существует второй момент внешнего случайного воздействия $\mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\} < \infty$;

3) имеет место неравенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left| \frac{< b, e_{i\lambda} >}{i\lambda - < a, e_{i\lambda} >} \right|^2 d\lambda < \left[\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{f_{ii}^2(\xi(\omega))\} \right]^{-1},$$

где $i = \sqrt{-1}$; $e_\lambda \in \widetilde{C}([-\tau, 0])$ для $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ и $\forall \lambda \in C$ определяется равенством $e_\lambda(\theta) \equiv e^{\lambda\theta}$; $\widetilde{C}([-\tau, 0])$ — пространство измеримых непрерывных отображений $C([-\tau, 0])$ в $\mathbb{R}$.

Доказательство. Согласно замечанию 1 для произвольного линейного функционала $g \in C^*([-\tau, 0])$ представление (7) решения $y(t, s, \varphi)$ задачи Коши (1), (2) с помощью фундаментального решения $h(t)$ ДФУ (3) можно записать

$$\mathbb{E}\{< g, y_t >^2\} = < g, x_t(s, \varphi) >^2 + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{f_{ii}^2(\xi(\omega))\} \int_s^t < g, h_{t-\tau} >^2 \mathbb{E}\{< b, y_\tau >^2\} d\tau. \quad (9)$$

Необходимость. Пусть задан любой линейный функционал $g \in \mathbb{H}_1$. Тогда необходимым условием $\forall s \geq 0$ принадлежности $y(t+s)$ пространству $\mathbb{H}_1$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ есть условие экспоненциального убывания решения $x(t)$ ДФУ (3), (2), $\mathbb{E}\{f^2(\xi)\} < \infty$ (выполнено условие 2). Следовательно, согласно теореме 1.1.9 [9] в нашем случае корни квазиполинома $V(\lambda) = \lambda - < a, e_\lambda >$ расположены в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ (выполнено условие 1). Заметим, что в дальнейших рассуждениях можно положить $s = 0$.

Для доказательства условия 3 теоремы 2, проинтегрировав равенство (9) по $t \in (0, +\infty)$, для $g = b$ получим

$$\left(1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{f_{ii}^2(\xi(\omega))\} \int_0^\infty < b, h_t >^2 dt \right) \int_0^\infty \mathbb{E}\{< b, y_t >^2\} dt = \int_0^\infty < b, x_t(0, \varphi) >^2 dt.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty \mathbb{E}\{< b, y_t >^2\} dt = \frac{\int_0^\infty < b, x_t(0, \varphi) >^2 dt}{1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{f_{ii}^2(\xi(\omega))\} \int_0^\infty < b, h_t >^2 dt}. \quad (10)$$

Из (10) для $b \in \mathbb{H}_1$ следует

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{f_{ii}^2(\xi(\omega))\} \int_0^\infty < b, h_t >^2 dt < 1. \quad (11)$$

Далее воспользуемся теоремой Планшереля [12] и формулой

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} \lambda = c} e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda) d\lambda,$$

что дает

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{f_{ii}^2(\xi(\omega))\} \int_0^\infty < b, h_t >^2 dt = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{f_{ii}^2(\xi(\omega))\} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{< b, e_{i\lambda} >}{i\lambda - < a, b_{i\lambda} >} \right|^2 d\lambda. \quad (12)$$

Тогда, подставив (12) в (11), получим условие (8). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1–3 теоремы 2. Для существования интеграла

$$\int_0^\infty \mathbb{E}\{|y(t,0,\varphi)|^2\}\,dt<\infty$$

достаточно потребовать существование интеграла

$$\int_0^\infty \mathbb{E}\{|<b,\, y_t>|^2\}\,dt<\infty.$$

Будем считать, что в (9) $<g,\, y_t>=y(t)$, и проинтегрируем полученное равенство от 0 до ∞. Приняв $m(t)\equiv\mathbb{E}\{<b,\, y_t>^2\}$, перепишем при $g\equiv b$ полученное равенство (9) в форме интегрального уравнения Вольтерры [12, 13] с положительным ядром

$$m(t)=<b, x_t(0,\varphi)>^2+\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{f_{ii}^2(\xi(\omega))\}\int_0^t<b, h_{t-\tau}>^2 m(\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Поскольку решение детерминированного уравнения (3) имеет экспоненциальный рост при $t\to+\infty$, для анализа $\lim\limits_{t\to\infty} m(t)$ достаточно применить преобразование Лапласа [12, 14]. Действительно, из очевидного неравенства

$$\left|\int_0^\infty e^{\lambda t}m(t)dt\right|\le\int_0^\infty e^{t\operatorname{Re}\lambda}m(t)\,dt$$

для доказательства ограниченности

$$\int_0^\infty m(t)dt<\infty$$

достаточно показать, что его преобразование Лапласа

$$M(\lambda)\equiv\int_0^\infty e^{-\lambda t}m(t)\,dt<\infty$$

для некоторого действительного отрицательного λ.

Вычислив преобразование Лапласа от обеих частей (13), получим

$$M(\lambda)=r(\lambda)(1-\rho(\lambda))^{-1}, \tag{14}$$

где

$$r(\lambda)\equiv\int_0^\infty<b, x_t(0,\varphi)>^2\, e^{-\lambda t}dt,$$

$$p(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{f_{ii}^2(\xi(\omega))\}\int_0^\infty<b, h_t>^2\, e^{-\lambda t}dt. \tag{15}$$

В (14) действительное число λ выбрано таким, чтобы интегралы (14), (15) существовали, а в комплексной полуплоскости $\{z\in\mathbb{C}\,|\operatorname{Re}\lambda\ge\lambda\}$ не было нулей функции $1-p(\lambda)$.

Далее согласно условию 1 теоремы 2 все решения ДФУ (3) экспоненциально убывают, тогда $r(0)<\infty$ и $p(0)<\infty$ существуют. Но так как $r(\lambda)$ и $p(\lambda)$ непрерывны, а функция $p(\lambda)$ при выполнении условия 2 теоремы 2 ($\mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\}<\infty$) монотонно убывает при действительных λ, достаточно показать, что $p(0)<1$.

Тогда из непрерывности $r(\lambda)(1-p(\lambda))^{-1}$ в окрестности $\lambda=0$ следует (8) $< g, y_{t+s}(s,\varphi) > \in \mathbb{H}_1$.

Для вычисления $p(0)$ снова применим теорему Планшереля [12] и достаточность условий теоремы 2 будет доказана.

Определение. Тривиальное решение $y(t)\equiv 0$ ДСДФУ (1), (2) (выполнено условие б) $a(0)=b(0)=0$) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном в целом, если существуют такие константы $B>0$ и $\tau>0$, что при некотором $\delta>0$ и $\forall t \ge s \ge 0$ выполнено неравенство

$$|| y_t(s,\varphi)||_1^2 \equiv \max_{-h\le\theta\le 0} \mathbb{E}\{| y_t(s,\varphi)|^2\} \le$$

$$\le Be^{-\tau(t-s)} \max_{-h\le\theta\le 0} \mathbb{E}\{|\varphi(\theta)|^2\} \equiv Be^{-\tau(t-s)} ||\varphi||_1$$

для $\forall ||\varphi||_1 < +\infty$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия а) и б). Тогда тривиальное решение $y(t,s,\varphi)\equiv 0$ ДСДФУ (1), (2) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном в целом тогда и только тогда, когда все решения ДФУ (3) экспоненциально убывают при $t\to\infty$ и выполняется условие (8).

Доказательство. Необходимость следует из уравнения (9) для вторых моментов, когда $g\equiv y_t$, или из (13), когда $b\equiv y_t$.

Достаточность следует из (7), если вычислить математическое ожидание от квадрата решения $y(t,0,\varphi)$ ДСДФУ (1) и воспользоваться свойствами математического ожидания интеграла Винера–Ито (равного нулю) и математического ожидания от квадрата интеграла Винера–Ито

$$\mathbb{E}\{| y(t,0,\varphi)|^2\} = \mathbb{E}\{| x(t,0,\varphi)|^2\} + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\{f_{ii}^2(\xi(\omega))\}\int_0^t | h(t-\tau)|^2 m(\tau)d\tau. \quad (16)$$

Применив преобразование Лапласа к левой и правой частям уравнения (16), получим

$$M(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}\{| x(t,0,\varphi)|^2\}dt + H(\lambda)M(\lambda), \quad (17)$$

где $H(\lambda)\equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t}| h(t)|^2 dt$, $M(\lambda)$ — преобразование Лапласа от $m(t)$.

Согласно условию теоремы 3 интегралы в (17) сходятся в полуплоскости $\{\lambda\in\mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,\lambda \ge -\gamma\}$ при некотором $\gamma>0$, что и доказывает эту теорему.

Детерминированные (неслучайные) дифференциально-разностные уравнения являются, как правило, моделью сложных систем с учетом транспортного запаздывания [15, 16], в которых передается на расстояние вещество, энергия или сигналы. Транспортные запаздывания учитываются также в теплоэнергетике — время движения мазута или угля от резервуара к топке, и в космонавтике — время распространения сигнала от Земли к Луне (или другого небесного тела) [17, 18].

Технологическое запаздывание имеет место в химико-технологических процессах (производство серной кислоты и стекла, процесс сушения [19, 20]), в задачах управления запасами с учетом запасов в предыдущий момент времени, а во многих задачах экономики учет запаздывания нужен для качественного описания различных явлений [21–25].

В настоящее время необходимы не только учет случайных факторов в описанных выше системах математических моделей, которые реализуются с помощью стохастических дифференциально-разностных уравнений или стохастических ДФУ, но и исследование их на устойчивость с течением времени [15, 24–26].

Рассмотрим ДСДФУ, которое является моделью, описывающей систему, и исследуем его на устойчивость в l.i.m.

Модельная задача 1. На вероятностном базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ задано ДСДФУ

$$dy(t) = ay(t)dt + f(\xi(\omega))\frac{b}{\tau}\left[\int_{-\tau}^{0} y(t+\theta)d\theta\right]dW(t), \qquad (18)$$

где $y(t) \equiv y(t,\omega):[0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $\xi(\omega):\Omega\to\mathbb{R}$; $w(t,\omega):[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$. Найдем условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном.

Решение. Используя условие (18) для $a<0$, легко подсчитать подынтегральное выражение для $b(y_t) \equiv f(\xi(\omega))\frac{b}{\tau}\int_{-\tau}^{0} y(t+\theta)d\theta$ и получить условие асимптотической устойчивости $y(t,s,\varphi)\equiv 0$ в среднем квадратичном в целом

$$\mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\}\frac{4b^2}{\pi\tau^2}\int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{h}{2}\lambda}{\lambda^2(\lambda^2+a^2)}d\lambda =$$

$$= \mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\}\frac{b^2}{a^3\tau^3}(a\tau + e^{-\tau a} - 1) < 1. \qquad (19)$$

Найдем условие асимптотической устойчивости в среднем квадратичном для заданных $\xi(\omega)$ и $f(\xi(\omega))$.

— Пусть $\xi(\omega)$ — равномерно распределенная случайная величина на $[0,1]$, а $f(\xi(\omega))\equiv\xi(\omega)$, тогда $\mathbb{E}\{\xi^2(\omega)\}=\frac{1}{3}$. Условие (19) примет вид

$$\frac{b^2}{a^3\tau^3}(a\tau + e^{-\tau a} - 1) < 3.$$

— Пусть $\xi(\omega)$ — равномерно распределенная случайная величина на $[0,1]$, а $f(\xi(\omega))\equiv\sin\pi\xi$, тогда

$$\mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\} = \mathbb{E}\{\sin^2\pi\xi\} = \int_0^1 \sin^2\pi x\,dx = \int_0^1 (1-2\cos 2\pi x)dx = \frac{1}{2}.$$

Условие (19) примет вид

$$\frac{b^2}{a^3\tau^3}(a\tau + e^{-\tau a} - 1) < 2.$$

— Пусть $\xi(\omega)$ — случайная величина с плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},$$

а $f(\xi(\omega)) = \sqrt{\min(|\xi|,1)}$. Тогда

$$\mathbb{E}\{f^2(\xi)\} = \mathbb{E}\{\min(|\xi|,1)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\min(|x|,1)\frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\ln 2.$$

Значит, условие асимптотической устойчивости в среднем квадратичном в целом примет вид

$$\frac{b^2}{a^3\tau^3}(a\tau + e^{-\tau a} - 1) < \frac{2\pi}{\pi + 2\ln 2}.$$

— Пусть $\xi \equiv \nu_n$ — случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами n и $p = x, 0 < x < 1$, а $f\left(\frac{x}{n}\right)$ — непрерывная функция. Тогда

$$\mathbb{E}\left\{f^2\left(\frac{\nu_n}{n}\right)\right\} = \sum_{k=0}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \equiv B_n(x)$$

является многочленом Бернштейна для функции $f^2(a)$. Условие (19) примет вид

$$\frac{b^2}{a^3\tau^3}(a\tau + e^{-\tau a} - 1) < \left[\sum_{k=0}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right]^{-1}.$$

— Пусть ξ — случайная величина, имеющая распределение Пуассона $p_\xi(x) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ с параметром λ, пусть также

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{1}{1+\xi}}.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\{f^2(\xi)\} = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{1+\xi}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Условие (19) примет вид

$$\frac{b^2}{a^3\tau^3}(a\tau + e^{-\tau a} - 1) < \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}.$$

— Пусть $\xi \in N(a, \sigma^2)$ с плотностью

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

а $f(\xi) = \xi$. Тогда $\mathbb{E}\{\xi^2(\omega)\} = D\xi + (\mathbb{E}\xi)^2 = \sigma^2 + a^2$. Условие (19) примет вид

$$\frac{b^2}{a^3\tau^3}(a\tau + e^{-\tau a} - 1) < \frac{1}{\sigma^2 + a^2}.$$

— Пусть ξ имеет показательное распределение при

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \forall x > 0; \\ 0 & \forall x \le 0, \end{cases}$$

где $f(\xi) = \xi$. Тогда

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = \frac{\Gamma(2+1)}{\lambda^2} = \frac{2!}{\lambda^2}.$$

Условие (19) примет вид

$$\frac{b^2}{a^3\tau^3}(a\tau + e^{-\tau a} - 1) < \frac{\lambda^2}{2}.$$

— Пусть ξ — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ, а $f(\xi) \equiv \xi$. Тогда

$$\mathbb{E}\{\xi^2\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) \frac{\lambda^r}{r!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} r \frac{\lambda^r}{r!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} =$$

$$= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)!} + \lambda \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} \right) = \lambda^2 + \lambda.$$

Значит, условие асимптотической устойчивости тривиального решения $y(t) \equiv 0$ ДСДФУ (18) в целом имеет вид

$$\frac{b^2}{a^3\tau^3}(a\tau + e^{-\tau a} - 1) < \frac{1}{\lambda^2 + \lambda}$$

при $\lambda > 0$.

Замечание 2. Полученные выше условия устойчивости в l. i. m. для ДСДФУ легко перенести на случай ДСДФУ вида

$$dx_j(t) + \sum_{j=0}^{N} A_j x(t - \Delta_j)\, dt = \sum_{j=0}^{N} f_j(\xi)\, dw_j(t) x(t - \Delta_j).$$

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ДСДФУ

Случай неавтономного уравнения для $\alpha t < t,\ \alpha \in (0,1)$. Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ задано ДСДФУ вида

$$dy(t) = \langle a, y_t \rangle dt + f(\xi(\omega))\, by(\alpha t) dW(t) \qquad (20)$$

с начальными условиями

$$y(\theta + s) = \varphi(\theta) \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \qquad (21)$$

где $\alpha \in (0,1]$; $a \in C^*([-\tau, 0])$; $b \in \mathbb{R}^1$; $W(t) \equiv W(t, \omega)$ — одномерный процесс броуновского движения; $\xi(\omega)$ — случайная величина с плотностью $p_\xi(x)$, причем $\xi(\omega)$ не зависит от $W(t)$; f — беровская функция.

Теорема 4. Достаточными условиями принадлежности пространству $\mathbb{H}_1$ решений (20), (21) при $s = 0$ и $\forall \varphi \in C([-\tau, 0])$ являются:

- экспоненциальное убывание решений задачи (4), (21);
- $\mathbb{E}\{f^2(\xi)\} < \infty$;
- выполнение неравенства

$$\frac{b^2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{|i\lambda - \langle a, e_{i\lambda} \rangle|^2} < \alpha. \qquad (22)$$

Доказательство. Запишем решение (20) в интегральной форме с помощью фундаментального решения ДФУ $dx(t) = <a, x_t> dt$ в виде

$$y(t,0,\varphi) = x(t,0,\varphi) + f(\xi(\omega))\, b\int_0^t h(t-\tau)\, y(d\tau) dW(\tau). \tag{23}$$

Возведем в квадрат обе части (23), возьмем их математическое ожидание и, применяя свойства математических ожиданий от интеграла Винера–Ито как функции верхней границы, получим

$$\mathbb{E}\{|y(t,0,\varphi)|^2\} \equiv |x(t,0,\varphi)|^2 + \mathbb{E}\{f^2(\xi)\} b^2 \int_0^t |h(t-\tau)|^2\, \mathbb{E}\{y(\alpha\tau)\} d\tau. \tag{24}$$

Интегрируя уравнение (24) по t от 0 до $+\infty$ и используя равенство Парсеваля [12], получим утверждение теоремы 4.

Замечание 3. Если решается вопрос принадлежности всех решений ДСДФУ (20), (21) пространству $\mathbb{H}_1$, то полученный результат теоремы 4 легко обобщается на уравнение с бесконечным последействием.

Модельная задача 2. Рассмотрим ДСДФУ

$$dy(t) = -ay(t)dt + f(\xi(\omega)) by(\alpha t) dW(t), \ a > 0. \tag{25}$$

Тогда достаточное условие (22) принадлежности решения $y(t) \in \mathbb{H}_1$ примет вид

$$\mathbb{E}\{f^2(\xi)\} \frac{b^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 + a^2} = \mathbb{E}\{f^2(\xi)\} \frac{b^2}{2a} < \alpha.$$

Замечание 4. Условие (22) не является необходимым для $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}\{y^2(t)\} = 0$ [27].

Случай линейного неавтономного ДСДФУ общего вида. На вероятностном базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ рассмотрим неавтономное линейное ДСДФУ вида

$$dy(t) = a(t, y_t)dt + f(\xi(\omega)) b(t)\, y(\alpha(t)) dW(t), \tag{26}$$

где $\{b(t), t \in \mathbb{R}_+\} \subset C(\mathbb{R}_+)$; $a(t,\varphi)$ — линейное по φ и непрерывное по совокупности переменных отображение $\mathbb{R}_+ \times C([-\tau, 0])$ в $\mathbb{R}^1$; $\alpha(t) \in (0, t]$ при любых $t > 0$ и непрерывна; $\xi(\omega)$ — случайная величина с $p_\xi(x)$; $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — беровская функция.

Наряду с (26) рассмотрим линейное ДФУ

$$dx(t) = a(t, x_t) dt. \tag{27}$$

Пусть $h(t,\tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, — решение (27) с начальными условиями

$$h(t,s) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t = s, \\ 0 & \text{при} \quad t \in [-\tau + s, s]. \end{cases}$$

Существование такого решения установлено в [28], причем $\forall t \ge \tau \ge 0$ фундаментальное решение $h(t,\tau)$ и его производная $h'_t(t,\tau)$ непрерывны по совокупности аргументов. Поэтому согласно теореме 1 решение линейного ДСДФУ можно записать в форме интегрального уравнения с помощью $h(t,\tau)$ в виде

$$y(t,0,\varphi) = x(t,0,\varphi) + f(\xi) \int_0^t h(t,\tau) b(\tau)\, y(\alpha(\tau)) dW(\tau),$$

где $y(t,0,\varphi)$ — решение (20), $x(t,0,\varphi)$ — решение (27) при $t \ge 0$.

Вначале установим вспомогательный результат для уравнения

$$u(t) = v(t) + L\int_0^t \hat{h}(t,\tau)\hat{b}(\tau, u_{\alpha(\tau)})d\tau \tag{28}$$

с начальным условием $u(t) = \varphi(t)\ \ \forall t \in [-\tau, 0]$, где $L > 0$.

Лемма 2. Пусть для непрерывных неотрицательных функций $\hat{h}(t,\tau)$, $v(t)$ и $L > 0$ выполнены условия:

1) $\underline{\lim}_{t \to +\infty} \alpha(t) = +\infty$;

2) $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$;

3) $\sup_{t \ge \tau \ge 0} \hat{h}(t,\tau) \equiv L < \infty$; $\sup_{t \ge 0} \int_0^t \hat{h}(t,\tau) \equiv r < \infty$;

4) $\lim_{t \to +\infty} \hat{h}(t,\tau) = 0\ \ \forall \tau \ge 0$;

5) $\sup|\hat{b}(t)| < \infty$;

6) $B \equiv \overline{\lim}_{t\to\infty} \hat{b}(t) \int_0^{\alpha(t)} \hat{h}(\alpha(t),\tau)d\tau < 1$.

Тогда $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.

Доказательство. Проведем доказательство по схеме доказательства леммы 3.2.2 [27]. Пусть $m(t) \equiv L\hat{B}(t)u(\alpha(t))$, тогда $\forall t \ge 0$ можно записать

$$m(t) = g(t) + \int_0^{\alpha(t)} \hat{b}(t)\hat{h}(\alpha(t),\tau)m(\tau)d\tau,$$

где $\hat{h}(t,\tau) = 0$ при $t < \tau$, а $g(t) = L\hat{b}(t)v(\alpha(t))$.

Выбрав $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ такими, чтобы для $t \ge T$ выполнялось неравенство $\sup_{l \ge T} B(l) \le B + \varepsilon$, и приняв $M(t,\tau) \equiv \max_{T \le \tau \le t} m(\tau)$, можно записать неравенство

$$M(t,T) \le \max_{T\le l\le t} g(l) + \max_{T\le l\le t} L\hat{B}(l) \int_0^{\alpha(l)} \hat{h}(\alpha(l),\tau)m(\tau)d\tau. \tag{29}$$

Выбрав T_0 таким, чтобы $\min_{t \ge T_0} \alpha(t) \ge T$ и $\beta(T_0) \equiv \min_{t\ge T_0} \alpha(t) \ge T_0$, можно увидеть, что имеет место интегральное неравенство

$$M(t,T) \le \max_{T\le l\le t} g(l) + \max_{T\le l\le t} B(l)M(t,T) + \max_{T\le l\le t} L\hat{B}(l) \int_0^{\beta(T_0)} \hat{h}(\alpha(t),\tau)m(\tau)d\tau, \tag{30}$$

откуда легко получить, что $\overline{\lim}_{t\to\infty} M(t,T) < \infty$.

Учитывая условия 1, 2, 4, 5 леммы 2, имеем

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \left[g(t) + L\hat{B}(t) \int_0^{\beta(T_1)} \hat{h}(\alpha(t),\tau)m(\tau)d\tau \right] = 0,$$

откуда для достаточно большого $T_1 > T_0$ выполняется неравенство $\overline{\lim}_{t\to\infty} m(t) \le$

$\leq (B+\varepsilon) \overline{\lim_{t \to \infty}} M(t, \beta(T_1))$, или, учитывая (29), (30), получим $\overline{\lim_{t \to \infty}} m(t) \leq$ $\leq (B+\varepsilon) \lim_{t \to \infty} m(t)$.

Далее следует выбрать $\varepsilon > 0$ таким малым, чтобы из условия 6 леммы 2 получить $\overline{\lim_{t \to \infty}} m(t) = 0$.

Наконец, зададимся таким числом $\varepsilon > 0$ и найдем соответствующее $T \equiv T(\varepsilon) > 0$, чтобы $\forall t \geq T$ выполнилось $m(t) < \varepsilon$. Значит,

$$u(t) = v(t) + \int_0^T \hat{h}(t, \tau) m(\tau)\, d\tau + \varepsilon.$$

Далее, совершив предельный переход при $t \to \infty$, в силу произвольно выбранного малого $\varepsilon > 0$ получим утверждение леммы 2.

Замечание 5. В условиях леммы 2 решение (28) $u(t)$ и неоднородность $v(t)$ принадлежат $C(\mathbb{R}_+)$. Из доказательства леммы 2 можно сделать вывод о существовании такого $k > 0$, что

$$\| u(t) \|_{C(\mathbb{R}_+)} \leq k \| v(t) \|_{C(\mathbb{R}_+)}. \tag{31}$$

Теорема 5. Пусть:

1) тривиальное решение (27) экспоненциально устойчиво в целом;

2) $\overline{\lim} \, \mathbb{E}\{f^2(\xi)\} b^{2(t)} \int_0^{\alpha(t)} h^2(\alpha(t), \tau) d\tau < 1$;

3) $\mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\} < +\infty$;

4) $\sup_{t \geq 0} \int_0^t h^2(t, \tau) d\tau < \infty$;

5) $\sup_{t \geq 0} |b(t)| < \infty$.

Тогда тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ (26) при $s = 0$ асимптотически устойчиво в среднем квадратичном.

Доказательство. Возведя левую и правую части интегрального уравнения в квадрат, взяв математическое ожидание и используя свойства математического ожидания от интегралов Винера–Ито как функций верхнего предела по t, получим уравнение (28) с $u(t) \equiv \mathbb{E}\{| y(t, 0, \varphi)|^2\}$, $v(t) \equiv \mathbb{E}\{| x(t, 0, \varphi)|^2\}$, $\hat{h}(t, \tau) = h^2(t, \tau)$, $\hat{b}(t) = b^2(t)$, $L \equiv \mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\}$.

Условия теоремы 5 гарантируют выполнение условий 1–6 леммы 2, поскольку

$$\mathbb{E}\{| x(t, 0, \varphi)|^2\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{| x(t, 0, \varphi)|^2\} / \mathfrak{F}_0\} \leq\leq M e^{-\gamma t} \mathbb{E}\{\| \varphi \|^2\}, \tag{32}$$

где φ — $\mathfrak{F}_0$-измерима, а тривиальное решение (27) экспоненциально устойчиво в целом.

Далее согласно лемме 2 получим $\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\{| y(t, 0, \varphi)|^2\} \equiv \lim_{t \to \infty} m(t) = 0$ для $\forall \varphi \in \mathbb{H}_1(-\tau, 0)$. Теорема 5 доказана.

Замечание 5. Из (31) и (32) следует устойчивость тривиального решения $dy(t) = a(t, y_t) dt + f(\xi(\omega)) b(t, y_t) dW(t)$.

Модельная задача 3. Рассмотрим ДСДФУ (25). Найдем условие асимптотической устойчивости в среднем квадратичном.

Решение. Заметим, что $\hat{h}(t, \tau) = e^{-a(t-\tau)}$. Проверим условие 2 теоремы 5. Имеем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\}b^2(t)\int_0^{\alpha(t)} h^2(\alpha(t),\tau)d\tau =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\}\int_0^{\alpha(t)} b^2 e^{-2(\alpha t-\tau)}d\tau = \mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\}\frac{b^2}{2a}.$$

Поэтому условием асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения $y(t)\equiv 0$ уравнения (25) является $\mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\}b^2 < 2a$. Однако условие интегрируемости второго момента решения (25), как показано выше, имеет вид $\mathbb{E}\{f^2(\xi(\omega))\}b^2 < 2a\alpha$. Отсюда следует, что существуют решения (25), которые стремятся к нулю при $t\to\infty$ медленнее, чем $\frac{1}{t^{1+\alpha}}$ при любом $\varepsilon > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье осуществлен переход к интегральной записи решения ДСДФУ с помощью фундаментального решения соответствующего детерминированного ДФУ, получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном сильного решения автономного ДСДФУ с конечным последействием с учетом случайных факторов (действие на систему извне случайных функций с различными законами распределения). Изучено поведение на бесконечности сильных решений неавтономных ДСДФУ с учетом случайных факторов, а также рассмотрен отдельный случай линейного неавтономного ДСДФУ более общего вида. Полученные результаты являються обобщением известных результатов Е.Ф. Царькова [9] и его учеников [27, 29, 30].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г и х м а н И. И. Граничная задача для стохастического уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. — 1979. — **31**, №5. — С. 31–38.

2. Г и х м а н И. И. О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа // Там же. — 1980. — **32**, №3. — С. 367–377.

3. Г и х м а н И. И. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными // Качественные методы и исследование нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. — С. 25–59.

4. Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.

5. Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В. Управляемые случайные процессы. — Киев: Наук. думка, 1977. — 312 с.

6. А н д р е е в а Е. А., К о л м а н о в с к и й В. Б., Ш а й х е т Л. Е. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992. — 336 с.

7. К о л м а н о в с к и й В. Б., Н о с о в В. Р. Устойчивость и периодические решения регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

8. Х а с ь м и н с к и й Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

9. Ц а р ь к о в Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.

10. К о р о л ю к В. С., Ц а р к о в Є. Ф., Я с и н с ь к и й В. К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика: в 3-х т. Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. — Чернівці: Золоті литаври, 2009. — 798 с.

11. Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г. Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части // Укр. мат. журн. — 1985. — **37**, № 1. — С. 13–20.

12. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.

13. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1987. — 495 с.

14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 541 с.

15. Смит Дж.М. Автоматическое регулирование. — М.: Физматгиз, 1982. — 847 с.

16. Эрриот П. Регулирование производственных процессов. — М.: Энергис, 1987. — 480 с.

17. Плетнев Т.П. Автоматическое регулирование и защита теплоэнергетических электрических станций. — М.: Энергис, 1990. — 488 с.

18. Ротач В.Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования. — М.: Энергис, 1973. — 440 с.

19. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. — М.: Машиностроение, 1984. — 327 с.

20. Шигин Е.К. Классификация динамических моделей объектов регулирования химико-технологических процессов // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 6. — С. 149–168.

21. Фаерман Е. Проблемы долгосрочного планирования. — М.: Наука, 1991. — 467 с.

22. Cargill T.F., Meyer R.A. Wages, prices and unemployment distributed log estimates // J. Amer. Statist. Assos. — 1971. — **69**, N 345. — P. 98–107.

23. Clark C.W. Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources. — New York: Wiley, 1976. — 352 p.

24. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процесы. — М.: Наука, 1998. — 358 с.

25. Махин В.А., Присняков В.Ф., Белик Н.П. Динамики жидкостных ракетных двигателей. — М.: Машиностроение, 1998. — 429 с.

26. Minorsky N. Control problems // J. Franklin Inst. — 1941. — **232**, N 6. — P. 519–551.

27. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. — Рига: Ориентир, 1992. — 328 с.

28. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.

29. Ясинский В.К., Ясинская Л.И. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 1980. — **32**, № 1. — С. 89–98.

30. Ясинский В.К., Береза В.Ю., Ясинский Е.В. Существование второго момента решения линейного стохастического уравнения в частных производных с марковскими параметрами и его поведение на бесконечности // Зб. наук. праць. Сер. фіз.-мат. наук. Математичне та комп'ютерне моделювання. — 2010. — № 4. — С. 223–238.

Поступила 21.07.2011