УДК 519.85

Ю.Г. СТОЯН, А.В. ПАНКРАТОВ, Т.Е. РОМАНОВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ДОПУСТИМЫЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Ключевые слова: *математическое моделирование, геометрические объекты, допустимые расстояния, Ф-функция.*

При построении математических моделей оптимизационных задач упаковки и раскроя [1] возникает необходимость формализации ограничений на минимально и максимально допустимые расстояния между реальными объектами. Применение нормализованных Ф-функций [2] иногда приводит к сложным вычислительным процедурам. Цель данной работы — построение свободных от радикалов Ф-функций, учитывающих ограничения на допустимые расстояния между двумерными геометрическими объектами.

Имеются замкнутые ограниченные φ-объекты $A, B \subset R^2$[3]. Полагаем, что граница объекта A задана последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых, R^2 — двумерное арифметическое евклидово пространство. Допускаются аффинные отображения трансляции и поворота объекта A, т.е. объект A — неориентированный. Положение A в пространстве R^2 определяет вектор $u=(x_t, y_t, \theta)$, а координаты точек $(x, y) \in A$ определяются по формуле $x = x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta + x_t$, $y = -x_0 \cdot \sin\theta + y_0 \cdot \cos\theta + y_t$, где (x_0, y_0) — произвольная точка объекта A в собственной системе координат объекта A; θ — угол поворота объекта A; (x_t, y_t) — вектор трансляции объекта A в пространстве R^2.

Пусть задано ограничение на допустимое расстояние ρ между объектами A и B, т.е. $\operatorname{dist}(A, B) \ge \rho^-$, если $\rho = \rho^-$, или $\operatorname{dist}(A, B) \le \rho^+$, если $\rho = \rho^+$, где $\rho^-(\rho^+)$ — минимально (максимально) допустимое расстояние между объектами A и B, $\operatorname{dist}(A, B) = \min\limits_{a \in A, b \in B} d(a, b)$, где $d(a, b)$ — евклидово расстояние между точками a и b в R^2. В терминах Ф-функций ограничение $\operatorname{dist}(A, B) \ge \rho^-$ можно описать в виде $\widetilde{\Phi}^{AB} \ge \rho^-$, а $\operatorname{dist}(A, B) \le \rho^+ \Leftrightarrow 0 \le \widetilde{\Phi}^{AB} \le \rho^+$, где $\widetilde{\Phi}^{AB}$ — нормализованная Ф-функция объектов A и B [4].

Заметим, что Ф-функция зависит от $u^A = (x_t^A, y_t^A, \theta^A)$ и $u^B = (x_t^B, y_t^B, \theta^B)$.

Построение нормализованных Ф-функций для произвольных φ-объектов — достаточно сложная процедура. Кроме того, нормализованные Ф-функции неизбежно содержат радикалы, что нежелательно для решения оптимизационных задач упаковки и раскроя с применением градиентных методов оптимизации.

Определение. Непрерывная всюду определенная функция $\widehat{\Phi}^{AB}$ называется псевдонормализованной Ф-функцией объектов A и B, если выполняются следующие свойства:

$$\widehat{\Phi}^{AB} > 0, \text{ если } \operatorname{dist}(A, B) > \rho, \ \widehat{\Phi}^{AB} = 0, \text{ если } \operatorname{dist}(A, B) = \rho,$$

$$\widehat{\Phi}^{AB} < 0, \text{ если } \operatorname{dist}(A, B) < \rho.$$

В частности, из определения следуют соотношения

$$\begin{gathered} \operatorname{dist}(A, B) \ge \rho^{-} \Leftrightarrow \widetilde{\Phi}^{AB} \ge \rho \Leftrightarrow \widehat{\Phi}^{AB} \ge 0, \\ \operatorname{dist}(A, B) \le \rho^{+} \Leftrightarrow 0 \le \widetilde{\Phi}^{AB} \le \rho^{+} \Leftrightarrow \min\{-\widehat{\Phi}^{AB}, \Phi^{AB}\} \ge 0 . \end{gathered} \tag{1}$$

Таким образом, $\widetilde{\Phi}^{AB} = \rho$ влечет $\widehat{\Phi}^{AB} = 0$, где ρ — заданное допустимое расстояние между объектами A и B.

Рассмотрим множество $\widehat{A} = A \oplus C(\rho)$, где $C(\rho)$ — круг радиуса ρ с центром в начале собственной системы координат множества A, $\oplus$ — символ операции суммы Минковского [5]. Тогда $\widehat{\Phi}^{AB} = \Phi^{\widehat{A}B}$, где $\Phi^{\widehat{A}B}$ — Ф-функция для $\widehat{A}$ и B.

Как известно [3], всегда существует свободная от радикалов Ф-функция для двух произвольных φ-объектов, граница которых описывается последовательностью отрезков прямых и дуг окружностей. В частности, Ф-функция для $\widehat{A}$ и B может быть определена так:

$$\Phi^{\widehat{A}B} = \min\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{\widehat{n}}\}, \tag{2}$$

где $\widehat{n}$ — число пар базовых объектов [3], полученных в результате декомпозиции объектов $\widehat{A}$ и B (в качестве базовых объектов, представленных ниже, рассматриваются объекты, для которых Ф-функции известны). В этом случае для построения Ф-функции (2) необходимо формирование множества $\widehat{A}$ в явном виде.

Один из очевидных методов формирования множества $\widehat{A}$ — построение эквидистанты для границы множества $\widehat{A}$ с использованием трудоемких алгоритмов, например приведенных в [6, 7]. В пределах данного исследования предлагается иной подход, учитывающий особенности построения Ф-функций для φ-объектов, граница которых описывается дугами окружностей и отрезками прямых.

В [3] приведено утверждение о том, что объект A всегда может быть представлен в виде

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n . \tag{3}$$

Здесь $\operatorname{int} A_i \cap \operatorname{int} A_j = \varnothing$, $i, j \in I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \ne j$, A_i, $A_j \in \mathfrak{F} = \{K, D, H, V\}$, $\operatorname{int}(\cdot)$ — внутренность множества $(\cdot)$; K — выпуклый многоугольник, заданный вершинами $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$; $D = C \cap T$ — круговой сегмент, $T = \operatorname{conv}\{p_1, p_2, p_3\}$, где $\operatorname{conv}\{\cdot\}$ — выпуклая оболочка множества $\{\cdot\}$, C — круг радиуса r с центром (x_c, y_c), p_1 и p_2 — концевые точки хорды сегмента D; $H = T \cap C^*$, $C^* = R^2 \setminus \operatorname{int} C$, $T = \operatorname{conv}\{H\}$ с вершинами p_1, p_2, p_3; $V = T \cap C_1^* \cap C_2$, где C_2 — круг радиуса $r_2 > r_1$; при этом объекты C_1^* и C_2 касаются, т.е. $\Phi^{C_2^* C_1} = 0$ [8].

Представим $\widehat{A}$ в виде $\widehat{A} = A \cup \delta A$, где $\delta A = \operatorname{fr} A \oplus C(\rho)$, $\operatorname{fr}(\cdot)$ — граница множества $(\cdot)$.

Поскольку $\operatorname{fr} A$ задается последовательностью дуг окружностей a и отрезков прямых s, представим множество $\delta\widehat{A}$ в виде объединения объектов из $\mathfrak{F} = \{\widehat{R}, \widehat{P}\}$, где $\widehat{R} = s \oplus C(\rho)$ (рис. 1, *а*), $\widehat{P} = a \oplus C(\rho)$. В зависимости от соотношений ρ и r_a множество $\widehat{P}$ имеет вид $\widehat{P}_1$, если $\rho < r_a$ (рис. 1, *б*), или $\widehat{P}_2$, если $\rho \ge r_a$ (рис. 1, *в*).

Таким образом, имеем

$$\delta\widehat{A} = \widehat{A}_1 \cup \ldots \cup \widehat{A}_p , \tag{4}$$

где $\widehat{A}_i \in \mathfrak{F}$.

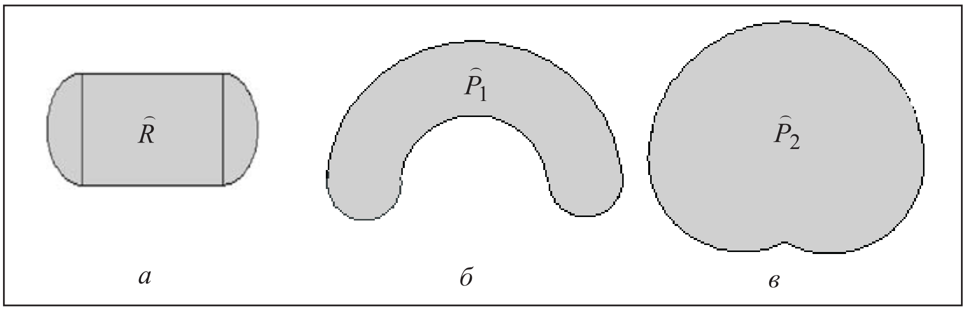

Рис. 1

Учитывая (4), Ф-функция для $\widehat{A}$ и B примет вид

$$\widehat{\Phi}^{AB} = \min\{\Phi^{AB}, \Phi_i, i \in I_p\}, \tag{5}$$

здесь Φ^{AB} — Ф-функция множеств A и B [3, 9], Φ_i — Ф-функция множеств $\widehat{A}_i \in \widehat{\mathfrak{I}}$ и B.

Следуя (3), $B = B_1 \cup \ldots \cup B_q$, $B_j \in \mathfrak{I}$, поэтому $\Phi_i = \min\{\Phi_{ij}, j \in I_q\}$, где Φ_{ij} — Ф-функция множеств $\widehat{A}_i \in \widehat{\mathfrak{I}}$ и $B_j \in \mathfrak{I}$.

Таким образом, для построения Ф-функции (5) требуется определение Ф-функций для всех пар множеств из $\widehat{\mathfrak{I}}$ и $\mathfrak{I}$. В работе [9] приведен полный класс Ф-функций для базовых объектов из $\mathfrak{I}$. В данном исследовании рассмотрим Ф-функции для объектов $\widehat{A}_i \in \widehat{\mathfrak{I}}$ и B.

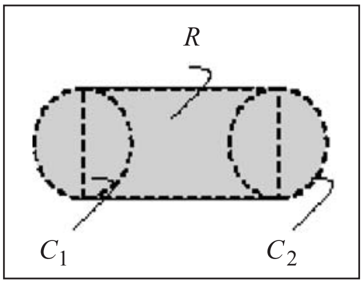

Рис. 2

Ф-функция объектов $\widehat{R}$ и B. Полагаем $\widehat{R} = C_1 \cup R \cup C_2$ (рис. 2), тогда

$$\Phi^{\widehat{R}B} = \min\{\Phi^{C_1B}, \Phi^{C_2B}, \Phi^{RB}\}. \tag{6}$$

Ф-функция объектов $\widehat{P}_1$ и B. Пусть $\widehat{P}_1 = C_1 \cup E \cup C_2$, $\rho < r$ (рис. 3, *а*), где $E = W_1 \cup H \cup W_2$ (рис. 3, *б*), $W_i = D_i \cup K_i$, $i = 1, 2$ (рис. 3, *в*).

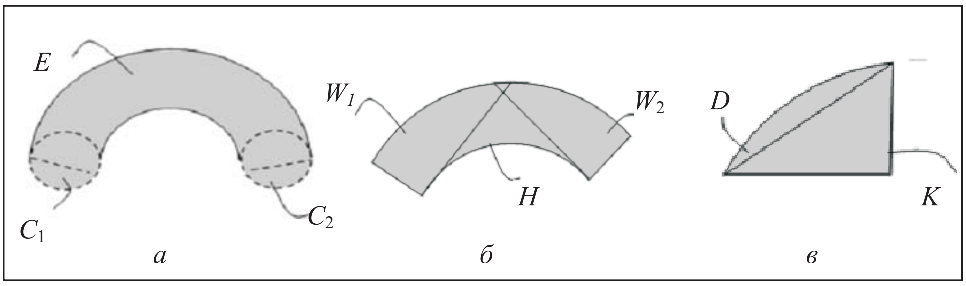

Рис. 3

Тогда Ф-функция имеет вид

$$\Phi^{\widehat{R}B} = \min\{\Phi^{BW_1}, \Phi^{BW_2}, \Phi^{BH}\}, \tag{7}$$

где $\Phi^{BW} = \min\{\Phi^{BD}, \Phi^{BT}\}$ [10].

Если $\widehat{P}$ имеет вид, приведенный на рис. 4, представим $E = W_1 \cup (C \cap H) \cup \cup W_2$. Тогда

$$\Phi^{\widehat{P}B} = \min\{\Phi^{C_1B}, \Phi^{C_2B}, \Phi^{BW_1}, \Phi^{BW_2}, \max\{\Phi^{BH}, \Phi^{BC}\}\}. \tag{8}$$

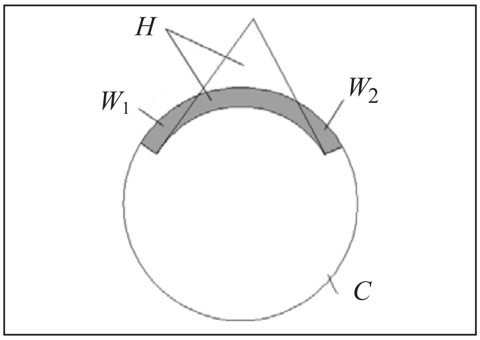

Рис. 4

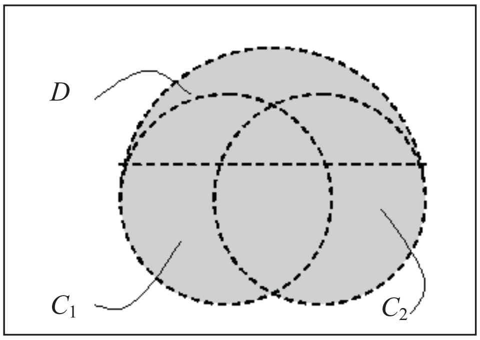

Рис. 5

Ф-функция объектов $\widehat{P}_2$ и B. В случае $\rho \geq r$ полагаем $\widehat{P}_2 = C_1 \cup D \cup C_2$ (рис. 5), тогда

$$\Phi^{\widehat{P}B} = \min\{\Phi^{BC_1}, \Phi^{BC_2}, \Phi^{BD}\}, \; \Phi^{BD} = \max\{\Phi^{BC}, \Phi^{BT}\}. \tag{9}$$

Пусть $\mathrm{fr}\, A = \bigcup_{i=1}^{m} l_i$, $l_i \in \{s, a\}$, тогда $\delta A = \bigcup_{i=1}^{m} \widehat{A}_i$, где $\widehat{A}_i \in \mathfrak{F} = \{\widehat{R}, \widehat{P}\}$. Поскольку каждый из элементов $\widehat{A}_i$ включает два круга с центрами в точках $v_i = l_i \cap l_{i+1}$, $i = 1, \dots, m$, объекта A и при этом $\widehat{A}_i \cap \widehat{A}_{i+1} = C_{i+1}(\rho)$, $(m+1=1)$, то множество $\delta\widehat{A}$ можно описать в виде $\delta\widehat{A} = \bigcup_{i=1}^{2m} \widehat{l}_i$, где каждой точке v_i соответствует круг $\widehat{l}_i = C_i(v_i, \rho)$, а каждому элементу $l_i \in \{s, a\}$ — элемент $\widehat{l}_i \in \{R(s), E(a)\}$. На рис. 6 приведен пример построения множества $\delta\widehat{A}$ для множества A, граница которого состоит из четырех элементов $\{s_1, a_2, s_3, a_4\}$:

$$\delta A = \bigcup_{i=1}^{8} \widehat{l}_i = \bigcup_{i=1}^{4} C_i \cup E \cup D \cup \bigcup_{i=1}^{2} R_i.$$

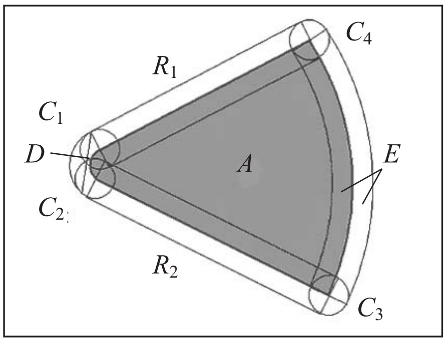

Рис. 6

Таким образом, Ф-функцию объектов $\widehat{A}$ и B можно определить так:

$$\Phi^{\widehat{A}B} = \min\{\Phi^{AB}, \Phi_i, \; i \in I_{2m}\}, \tag{10}$$

где Φ_i — Ф-функция множеств $\widehat{l}_i \in \{C, R, E\}$ и B.

Теорема. Для φ-объектов A и B, границы которых формируются последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых, всегда существует свободная от радикалов псевдонормализованная Ф-функция $\widehat{\Phi}^{AB}$.

Справедливость этого утверждения следует из утверждения о разбиении множества A на базовые объекты [3] формул, определяющих полный класс Φ-функций для базовых объектов [9] и соотношений (5)–(10).

Для формирования псевдонормализованной Φ-функции $\widehat{\Phi}^{AB}$ также может использоваться Φ-функция $\Phi^{A\widehat{B}}$ для объектов A и $\widehat{B}$. Этот факт позволяет сократить вычислительные процедуры за счет выбора наименьшего числа базовых объектов при декомпозиции, а также выбора наиболее простых Φ-функций.

Заметим, что при построении Φ-функций $\widehat{\Phi}^{AB}$ используются только линейные, квадратичные и тригонометрические функции вида $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

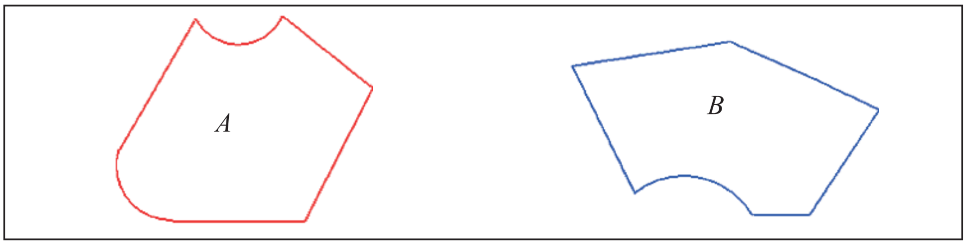

Рис. 7

Алгоритм построения псевдонормализованных Φ-функций для φ-объектов A и B, граница которых задана последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых (рис. 7), включает в себя следующие этапы.

1. Декомпозиция объектов A и B в виде объединения базовых объектов: $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n, B = B_1 \cup \ldots \cup B_q$ (рис. 8) согласно алгоритму, приведенному в [10].

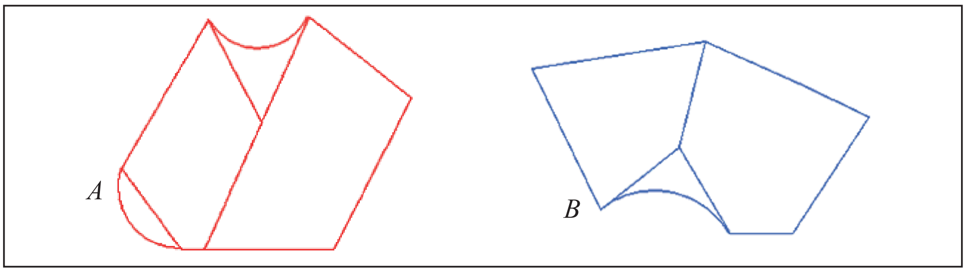

Рис. 8

2. Построение множества δA (рис. 9, *а*) в виде $\delta A = \bigcup\limits_{i=1}^{2m} \widehat{l}_i, \widehat{l}_i \in \{C, R, E\}$ (рис. 9, *б*).

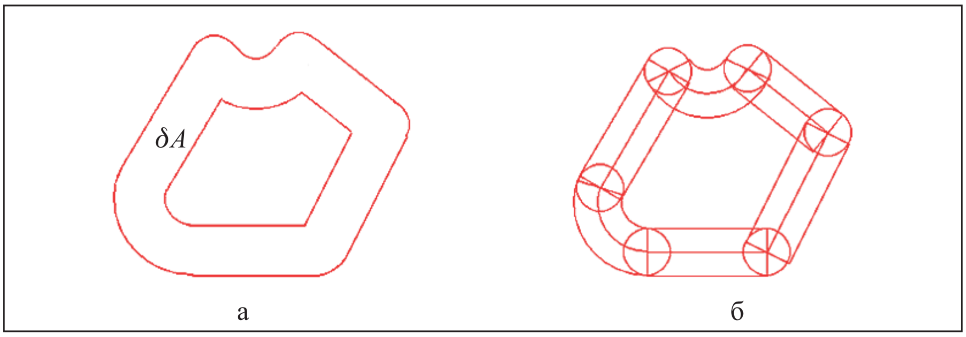

Рис. 9

3. Построение псевдонормализованной Ф-функции $\widehat{\Phi}^{AB}$ объектов A и B в виде Ф-функции объектов $\widehat{A} = A \cup \delta\widehat{A}$ и B:

$$\Phi^{\widehat{A}B} = \min \{\Phi_{ij}, \Phi_{kj},\ i \in I_n,\ j \in I_q,\ k \in I_{2m}\},$$

где Φ_{ij} — Ф-функция множеств $A_i \in \mathfrak{F}$ и $B_j \in \mathfrak{F}$, Φ_{kj} — Ф-функция множеств $\widehat{l}_i \in \{C, R, E\}$ и $B_j \in \mathfrak{F}$.

По результатам исследований создан программный продукт, реализующий построение псевдонормализованных Ф-функций для произвольных неориентированных двумерных φ-объектов, граница которых задана последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wäscher G., Hauβner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // Europ. J. of Oper. Res. — 2007. — **183**. — P. 1109–1130.
2. Stoyan Y. G., Chugay A. Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them // Ibid. — 2008. — **197**. — P. 446–455.
3. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Appls. — 2010. — **43**, N 5. — P. 535–553.
4. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems // J. Annals of Oper. Res. — 2010. — **179**, N 1. — P. 343–368.
5. Minkowski H. Dichteste gitterformige Lagerung kongruenter Korper. — Nachr. Qes. Wiss. Qottingen, 1904. — P. 311–355.
6. Farouki R.T., Koenig T., Tarabanis K.A., Korein J.U., Batchelder J.S. Path planning with offset curves for layered fabrication processes // J. Manufact. Syst. — 1995. — N 14. — P. 355–368.
7. Gray A. Parallel curves // Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed., CRC Press, 1997. — P. 115–117.
8. Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil N. , Romanova T. Phi-functions for primary 2D-objects // Studia Informatica Universalis. — 2001. — N 2. — P. 1–32.
9. Гиль Н.И., Романова Т.Е., Злотник М.В. Декомпозиция двумерных геометрических объектов // Доп. НАН України. — 2010. — № 8. — С. 43–48.
10. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Чернов Н.И., Панкратов А.В. Полный класс Ф-функций для базовых объектов // Там же. — 2010. — № 12. — С. 25–30.

Поступила 07.12.2010