УДК 519.242.5

С.Г. РАДЧЕНКО*

МНОГОФАКТОРНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ СОВМЕСТНОГО ПРОВЕДЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

*Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", Киев, Украина

Анотація. *Проаналізовані методи оптимізації – круте сходження по поверхні відгуку і послідовне симплекс планування. Сформульовані вимоги до планів експериментів для оптимізації і моделювання. Запропоновано використовувати як плани* $ЛП_\tau$ *рівномірно розподілені послідовності. Наведено їх переваги.*
Ключові слова: *методи оптимізації, статистичне моделювання,* $ЛП_\tau$ *рівномірно розподілені послідовності, планування експерименту.*

Аннотация. *Проанализированы методы оптимизации – крутое восхождение по поверхности отклика и последовательное симплекс планирование. Сформулированы требования к планам экспериментов для оптимизации и моделирования. Предложено использовать в качестве планов* $ЛП_\tau$ *равномерно распределенные последовательности. Приведены их преимущества.*
Ключевые слова: *методы оптимизации, статистическое моделирование,* $ЛП_\tau$ *равномерно распределенные последовательности, планирование эксперимента.*

Abstract. *The methods of optimization have been analyzed: steep ascension on the response surface and successive simplex design. Requirements to designs of experiments for optimization and modeling have been formulated. It is suggested to use uniformly distributed sequences as* $ЛП_\tau$ *designs. Their advantages are presented.*
Keywords: *methods of optimization, statistical modeling,* $ЛП_\tau$ *of uniformly distributed sequences, experiment design.*

1. Введение

Постановка проблемы

При создании и совершенствовании технических систем и процессов одними из основных задач являются многокритериальная компромиссная оптимизация и многофакторное математическое моделирование. Свойства реальных систем и процессов характеризуются сложностью математического описания и формализации, неопределенностью исходного состояния и функционирования. Не известны статистически значимые влияющие факторы, структуры математических моделей, закон распределения результатов экспериментов по случайным погрешностям.

Использование теоретико-аналитического подхода затруднено и в некоторых случаях невозможно и поэтому используется экспериментально-статистический подход.

Анализ публикаций

Для оптимизации систем и процессов обычно применяют метод крутого восхождения по поверхности отклика [1] или метод последовательного симплекс планирования [2].

Метод крутого восхождения по поверхности отклика не позволяет устойчиво решать задачи. Затраты на его реализацию пропорциональны $k+1$ (k – количество факторов). Метод не позволяет гарантированно найти глобальный экстремум. По проведенным экспериментам не представляется возможным получить математическую модель с хорошими критериями качества для всего факторного пространства.

Метод последовательного симплекс планирования характеризуется затратами на его реализацию пропорционально $k+1$. Не позволяет устойчиво решать задачи. Требует сравнительно много времени на его проведение. Получение математической модели с хорошими критериями качества по проведенным экспериментам невозможно.

Приведенные свойства методов не позволяют рекомендовать их как надежные и устойчивые при решении ответственных задач по сложным системам и процессам.

Существующая методология оптимизации по приведенным методам предполагает, что моделирование зоны оптимума проводится по другому плану эксперимента, что требует дополнительных затрат.

Цель статьи

Изложение возможности использования многофакторных планов экспериментов для совместного проведения оптимизации и моделирования систем и процессов с получением наилучших возможных критериев качества как по оптимизации, так и по моделированию.

2. Планы экспериментов для оптимизации и моделирования

Планы экспериментов должны соответствовать следующим условиям.

1. При заданном числе опытов N получать максимально возможное количество информации из факторного пространства R^k с ограничениями $X_{i\min}$, $X_{i\max}$ – минимальное и максимальное значения i-го фактора; $1 \le i \le k$.

2. Главные эффекты x_i и взаимодействия факторов $x_i x_j$ должны быть ортогональны друг к другу либо слабо коррелированы (коэффициент парной корреляции $\left|r\left(x_i, x_j\right)\right| < 0,4$).

3. Число опытов должно быть ограниченным N =32…64.

4. План эксперимента должен быть устойчивым относительно используемых структур моделей и поиска экстремумов.

Анализ известных планов экспериментов показал, что такие планы отсутствуют. Наиболее близкие по критериям планы – многофакторные регулярные. Однако первое условие при их использовании не выполняется, так как число различных уровней s_i всегда меньше числа опытов N. Так, например, если $s_i = 2...4$ и $N = 16...32$, то каждый уровень любого фактора повторяется несколько раз.

При небольшом числе уровней варьирования в подавляющем числе экспериментальных исследований для быстро изменяющихся функций при наличии хорошей аппроксимации в точках плана эксперимента имеют место значительные отклонения между ними [3, с. 128].

Количество информации можно увеличить, если число различных уровней s_i будет равно числу опытов N. Данное условие будет выполняться, если использовать $ЛП_\tau$ равномерно распределенные последовательности в качестве планов экспериментов [4, с. 10, 14, 83]. Оптимальность расположения точек в многомерном пространстве заключается в их равномерности в пространстве R^k. Теория построения, алгоритмы получения приведены в работах д.ф.-м.н. И.М. Соболя [4, с. 102–106].

Последовательность точек $P_1, ..., P_i, ...$ называется равномерно распределенной [4, с. 10] в n-мерном кубе K^n, если для любого параллелепипеда П

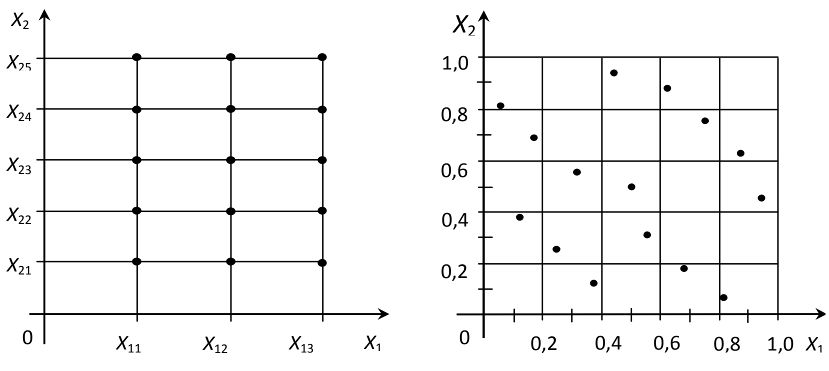
$$\lim_{N\to\infty} S_N(\Pi) / N = V_\Pi,$$

где $S_N(\Pi)$ – количество точек P_i с номерами $1 \le i \le N$, принадлежащими П;

V_Π – объем (n-мерный) параллелепипеда П.

Последовательность точек $P_0, P_1, ..., P_i, ...$ n-мерного куба K^n называется $ЛП_\tau$ последовательностью, если любой ее двоичный участок, содержащий не менее $2^{\tau+1}$ точек, представляет собой Π_τ-сетку [4, с. 83]. Название «$ЛП_\tau$ последовательность» образовано как сокращение фразы «последовательность, любой двоичный участок которой представляет собой Π_τ-сетку» [4, с. 83].

$ЛП_\tau$ равномерно распределенные последовательности характеризуются следующими замечательными свойствами: проекции N точек в k-мерном пространстве на любую $(k-j)$-мерную грань $(1 \le j \le k-1)$ многомерного единичного куба образуют также равномерно распределенные последовательности и, следовательно, содержат N проекций точек.



а б

Рис. 1. Расположение опытов в факторном пространстве:
а) эксперимент 3×5//15; б) – эксперимент 15^2//15

На рис. 1а показано расположение опытов по плану полного факторного эксперимента 3×5//15, а на рис. 1б – по плану эксперимента 15^2//15 $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей $X_1 = \xi_3$; $X_2 = \xi_5$.

Обратим внимание, что при одинаковом числе опытов $N = 15$ в первом эксперименте число уровней факторов $s_1 = 3$ для X_1, $s_2 = 5$ для X_2, а во втором случае $s_1 = s_2 = 15$ для X_1 и X_2, то есть равно числу опытов N.

Пример расположения точек для $N = 64$ показан на рис. 2. В табл. 1 приведены значения $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей для X_1, X_3.

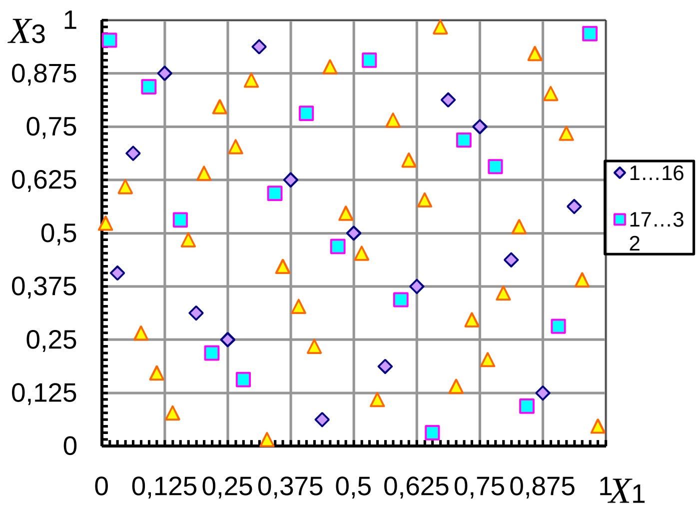


Рис. 2. Расположение точек $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей в факторном пространстве X_1, X_3

Таблица 1. $ЛП_\tau$ равномерно распределенные последовательности для X_1, X_3

Номер пробной точки	Значения факторов		Номер пробной точки	Значения факторов	
	$\xi_1 = X_1$	$\xi_3 = X_3$		$\xi_1 = X_1$	$\xi_3 = X_3$
1	0,5	0,5	33	0,515625	0,453125
2	0,25	0,25	34	0,265625	0,703125
3	0,75	0,75	35	0,765625	0,203125
4	0,125	0,875	36	0,140625	0,078125
5	0,625	0,375	37	0,640625	0,578125
6	0,375	0,625	38	0,390625	0,328125
7	0,875	0,125	39	0,890625	0,828125
8	0,0625	0,6875	40	0,078125	0,265625
9	0,5625	0,1875	41	0,578125	0,765625
10	0,3125	0,9375	42	0,328125	0,015625
11	0,8125	0,4375	43	0,828125	0,515625
12	0,1875	0,3125	44	0,203125	0,640625
13	0,6875	0,8125	45	0,703125	0,140625
14	0,4375	0,0625	46	0,453125	0,890625
15	0,9375	0,5625	47	0,953125	0,390625
16	0,03125	0,40625	48	0,046875	0,609375
17	0,53125	0,90625	49	0,546875	0,109375
18	0,28125	0,15625	50	0,296875	0,859375
19	0,78125	0,65625	51	0,796875	0,359375
20	0,15625	0,53125	52	0,171875	0,484375
21	0,65625	0,03125	53	0,671875	0,984375
22	0,40625	0,78125	54	0,421875	0,234375
23	0,90625	0,28125	55	0,921875	0,734375
24	0,09375	0,84375	56	0,109375	0,171875
25	0,59375	0,34375	57	0,609375	0,671875
26	0,34375	0,59375	58	0,359375	0,421875
27	0,84375	0,09375	59	0,859375	0,921875
28	0,21875	0,21875	60	0,234375	0,796875
29	0,71875	0,71875	61	0,734375	0,296875
30	0,46875	0,46875	62	0,484375	0,546875
31	0,96875	0,96875	63	0,984375	0,046875
32	0,015625	0,953125	64	0,007812	0,523438

$ЛП_\tau$ равномерно распределенные последовательности по сравнению с регулярными планами позволяет получить расположение точек плана эксперимента, более близкое к тем точкам многомерного пространства отклика, в которых эта поверхность принимает экстремальные значения или имеет точки перегиба. Именно эти точки определяют границы изменения характера направления кривой линии, а в многомерном пространстве – криволинейной поверхности. В задачах аппроксимации многомерных поверхностей отклика эти точки (экстремума и перегиба) являются наиболее информативными для получения правильной структуры многофакторной математической модели.

Анализ информационных возможностей $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей целесообразно провести для планов экспериментов с $k=8$, $N=32$ и $k=20$, $N=64$ (эти планы можно обозначить $32^8//32$ и $64^{20}//64$ соответственно). Первый план является типичным для большинства исследований и числа факторов, второй план используется для проведения сложных исследований со значительным числом факторов.

Планы были получены посредством использования ПС ПРИАМ. Практика многих лет показывает, что ресурсные возможности решения технических, технологических экспериментальных задач ограничиваются числом опытов $N \approx 64$.

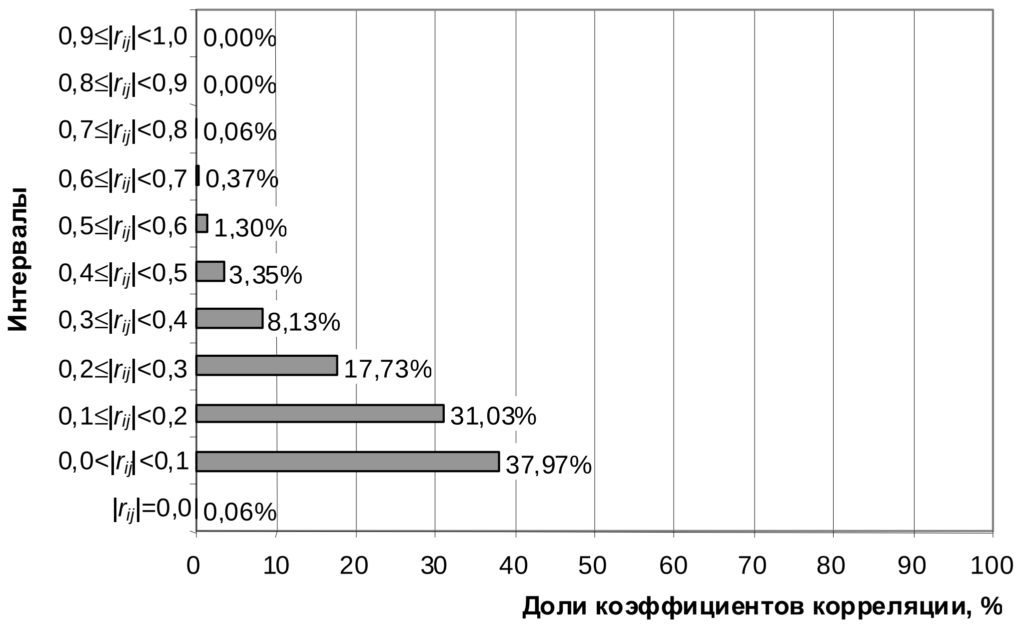
Для первого плана эксперимента в расширенную матрицу эффектов были введены главные эффекты до третьей степени включительно (24 эффекта) и взаимодействия по два элемента (252 взаимодействия) без ограничения взаимодействий по степени. Всего было проанализировано 276 эффектов.

На рис. 3 показана диаграмма распределения коэффициентов парной корреляции r_{ij} (выраженная в процентах) по интервалам 0,0; 0,0–0,1; ...; 0,9–1,0. Доля эффектов с коэффициентами корреляции $\left|r_{ij}\right| < 0,4$ в исследуемой расширенной матрице составила 94,92 %. Среднее абсолютных величин коэффициентов парной корреляции по всей расширенной матрице $\left|\overline{r}_{ij}\right| = 0,1601$.

Во втором плане эксперимента в расширенную матрицу эффектов были введены главные эффекты также до третьей степени включительно (60 эффектов) и взаимодействия факторов по два элемента с ограничением по степени эффекта до двух (190 взаимодействий). Всего было проанализировано 250 эффектов.

Результаты анализа приведены на рис. 4. Доля эффектов в расширенной матрице с коэффициентами корреляции $\left|r_{ij}\right| < 0,4$ составила 97,78 %. Среднее абсолютных величин коэффициентов парной корреляции по всей расширенной матрице $\left|\overline{r}_{ij}\right| = 0,0873$.

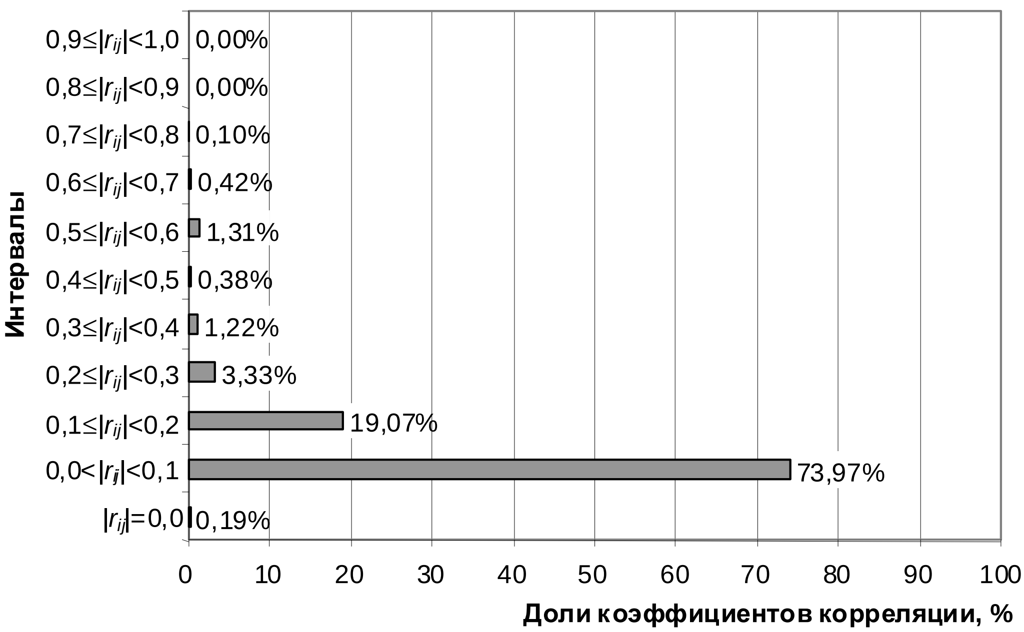
В обоих анализируемых планах экспериментов коррелированность исследованных эффектов достаточно малая. Сравнительно высокую коррелированность $\left|r_{ij}\right| \geq 0,4$ имеет незначительная доля коэффициентов парных корреляций – 5,08% в первом плане и 2,21 % во втором. Полученные по этим планам экспериментов математические модели с произвольной структурой будут устойчивыми.



Среднее абсолютных величин коэффициентов корреляции 0,160122.

Среднее квадратичное отклонение 0,015146.

Рис. 3. Диаграмма распределения коэффициентов корреляции эффектов плана эксперимента на основе $ЛП_{\tau}$ равномерно распределенных последовательностей для $N = 32$, $k = 8$



Среднее абсолютных величин коэффициентов корреляции 0,087265.
Среднее квадратичное отклонение 0,008477.

Рис. 4. Диаграмма распределения коэффициентов корреляции эффектов плана эксперимента на основе $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей для $N = 64$, $k = 20$

Для качественных и дискретных факторов в многофакторных равномерных планах число их уровней s_i не будет соответствовать N. Необходимо использовать алгоритм RASTA8 и построить план эксперимента для этих факторов [5, с. 115–120].

Использование $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей для оптимизации и моделирования позволяет получить следующие результаты.

1. Существенно повышена вероятность нахождения экстремума особенно для случаев плохой обусловленности поверхности отклика (овражные функции) и ограничений по факторам и критерию качества системы.

2. Затраты на исследования, проведенные по опытам, при прочих равных условиях по сравнению с методом крутого восхождения и последовательным симплексным методом меньше и пропорциональны $\sqrt{k}$.

3. Метод оптимизации и моделирования с использованием $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей максимально устойчивый (робастный), так как не накладываются никакие условия на свойства поверхности отклика, и в плане эксперимента отражены все равномерно распределенные точки факторного пространства из общего числа точек N. С возрастанием N устойчивость решения стремится по вероятности к 1.

4. Метод оптимизации позволяет в одном эксперименте получить информацию по глобальному и локальным экстремумам.

5. Однократно проведенный эксперимент позволяет найти максимальные и минимальные экстремумы.

6. Полученные по плану $ЛП_\tau$ эксперимента результаты можно использовать как для оптимизации, так и для статистического моделирования.

3. Выводы и перспективы дальнейших исследований

1. Использование $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей в качестве планов экспериментов позволяет существенно сократить затраты на проведение

исследований и получить больше информации при прочих равных условиях по сравнению с многофакторными регулярными планами.
2. Необходимо провести исследование статистических свойств $ЛП_{\tau}$ планов экспериментов с целью установления ортогонального множества различных факторов друг к другу.

С разработанными методами оптимизации и моделирования и полученными результатами можно ознакомиться в [6, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
2. Дамбраускас А.П. Симплексный метод / Дамбраускас А.П. – М.: Энергия, 1979. – 176 с.
3. Лапач С.Н. Основные проблемы построения регрессионных моделей / С.Н. Лапач, С.Г. Радченко // Математичні машини і системи. – 2012. – № 4. – С. 125 – 133.
4. Соболь И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболь, Р.Б. Статников. – М.: Наука, 1981. – 111 с.
5. Радченко С.Г. Методология регрессионного анализа / Радченко С.Г. – К.: «Корнійчук», 2011. – 376 с.
6. Лаборатория экспериментально-статистических методов исследований (ЛЭСМИ) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.n-t.org/sp/lesmi.
7. Сайт кафедры «Технология машиностроения» Механико-машиностроительного института Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://tm-mmi.kpi.ua/index.php/ru/1/publications.

Стаття надійшла до редакції 23.04.2013