УДК 517.972/974

В.С. САЖЕНЮК, В.М. БРУСНІКІН

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СІТОК ДО ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ІМПУЛЬСНОГО КЕРУВАННЯ

Abstract: *Examined is one class of impulsive management tasks, which is made by the tasks of determination of stop time for the dynamic systems with limitation. The method of numeral solution for this class of tasks, which is based on application of methods of penalty and finite difference approximation, is offered. The ground of method is given as theorems about convergence. The concerted estimations of velocity of convergence are got.*
Key words: *variation inequality, method of penalty, difference scheme.*

Анотація: *Розглядається один клас задач імпульсного керування, який складають задачі визначення часу зупинки динамічних систем з обмеженням. Пропонується метод чисельного розв'язування цього класу задач, який базується на застосуванні методів штрафу та скінченно-різницевої апроксимації. Подається обґрунтування методу у вигляді теорем про збіжність. Отримані узгоджені оцінки швидкості збіжності.*
Ключеві слова: *варіаційна нерівність, метод штрафу, різницева схема.*

Аннотация: *Рассматривается один класс задач импульсного управления, который составляют задачи определения времени остановки динамических систем с ограничением. Предлагается метод численного решения этого класса задач, который основан на использовании методов штрафа и конечно-разностной аппроксимации. Дано обоснование метода в виде теорем о сходимости. Получены согласованные оценки скорости сходимости.*
Ключевые слова: *вариационное неравенство, метод штрафа, разностная схема.*

1. Вступ

Важливий клас задач імпульсного керування складають задачі визначення часу зупинки. Під час розв'язування таких задач основним є не визначення еволюції стану, а знаходження моменту зупинки цієї еволюції, який називається часом зупинки. Цей момент є змінна, що підлягає визначенню у процесі розв'язування задачі оптимального керування.

У статті розглядаються задачі з оптимальним часом зупинки, математичні моделі яких наведені та досліджені у роботі [1].

Ідея побудови алгоритму чисельного розв'язування задачі з оптимальним часом зупинки полягає у наступному. Спочатку запишемо цю задачу у вигляді деякої варіаційної нерівності. До задачі з обмеженням, якою є варіаційна нерівність, застосуємо метод штрафу. Отриману таким чином нелінійну крайову задачу в подальшому апроксимуємо за методом сіток різницевою схемою.

З метою обґрунтування такого підходу у статті формулюються і доводяться відповідні теореми про збіжність та отримуються оцінки швидкості збіжності. При цьому суттєвим для коректної побудови алгоритму є встановлення співвідношень між параметрами методів штрафу та сіток.

2. Постановка задачі

Нехай $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, \quad t \in (0,T)\}$ – паралелепіпед, а $S_T = \{(x,t) : x \in \Gamma, \quad t \in (0,T)\}$ – бокова поверхня Q_T, де Ω – прямокутник з границею Γ.

Введемо у розгляд оператор:

$$A(t)v = -\sum_{i,j} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} + q(x,t)v .$$

Тоді, для вартості $u(x,t)$ стану $x = (x_1, x_2)$ динамічної системи в момент часу t з нульовою вартістю зупинки, маємо задачу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u - f(x,t) \ge 0\,,\ u(x,t) \ge 0\ ,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u - f(x,t)\right) u(x,t) = 0\,,\ (x,t) \in Q_T \tag{1}$$

$$u\ (x,t) = 0\,,\ (x,t) \in S_T\,,$$

$$u\ (x,0) = u_0(x)\,,\ \ x \in \Omega\,,$$

де $f(x,\ t) \in L_2(Q_T)$, $\sum\limits_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \alpha\,|\,\xi\,|^2$, $\forall \xi \in R^2$,

$$q(x_1, x_2, t) \ge q_0 > 0, \quad q(x_1, x_2, t) \in L_\infty(Q_T),$$

$$a_{ij}(x_1, x_2, t) = a_{ji}(x_1, x_2, t), \quad a_{ij}(x_1, x_2, .t) \in W^1_\infty(Q_T), \tag{2}$$

Задача (1) еквівалентна варіаційній нерівності з обмеженням в середині області:

знайти функцію $u \in \mathrm{K}$, $u\ (0,x) = u_0(x)$, $u_0(x) \ge 0, \quad x \in \Omega$ таку, що

$$-\int\limits_{Q_T} \frac{\partial v}{\partial t}(v-u)dxdt + \int\limits_0^T a(u, v-u)dt \ge \int\limits_0^T (f, v-u)dt - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\mathrm{v}(0,\mathrm{x}) - \mathrm{u}_0(\mathrm{x})|^2\ \mathrm{dx}\,,\quad \forall v \in \mathrm{K}\,,$$

де $u_0 \in W_2^2(\Omega)$, $\mathrm{K} = \{v \mid v \in W_2^{1,0}(Q_T), v \ge 0 \quad \text{майже всюди в } Q_T\}$,

$a(v_1, v_2)$ – білінійна, симетрична, коерцитивна форма, зв'язана з оператором $A(t)$:

$$a(v_1, v_2) = \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x_j}dx_1dx_2 + \int\limits_\Omega q(x\ ,t)v_1v_2dx_1dx_2\,,$$

$$(v_1, v_2) = \int\limits_\Omega v_1v_2dx_1dx_2\ , \forall v_1, v_2 \in W_2^{1,0}(Q_T).$$

3. Основні результати

Задача зі штрафом, асоційована з задачею (1), має вигляд:

знайти функцію $u_\varepsilon \in \overset{o}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ таку, що $u_\varepsilon(0,x) = u_0(x)$,

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + A(t)u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^{\ -} = f(x,t)\,,\ (x,t) \in Q_T\,,$$

$$u_\varepsilon(x,t) = 0\,,\ (x,t) \in S_T\,, \tag{3}$$

$$u_\varepsilon(x,0) = u_0(x)\,,\ x \in \Omega\,.$$

Відомо [1], що при виконанні умов (2) $u, u_\varepsilon \in W_2^{2,1}(Q_T)$. Справедлива [1, 2] наступна теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (2). Розв'язок задачі (3) збігається при $\varepsilon \to 0$ до розв'язку задачі (1), при чому має місце оцінка

$$\|u-u_\varepsilon\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \le M_1\sqrt{\varepsilon}\cdot(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}), \qquad (4)$$

(тут і надалі через M_i позначені додатні сталі, які не залежать від ε, τ та h).

Позначимо $g_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\dfrac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^-$. Задачу зі штрафом (3) перепишемо у такому вигляді:

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + q(x,t)u_\varepsilon + g_\varepsilon(u_\varepsilon) = f(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T, \qquad (5)$$

$$u_\varepsilon(x,t)=0,\ x\in S_T,\ u_\varepsilon(x,0)=u_0,\ \ x\in\Omega.$$

Легко бачити, що для функції $g_\varepsilon(\zeta)$ виконуються умови

$$\int\limits_{Q_T}[g_\varepsilon(v_1)-g_\varepsilon(v_2)](v_1-v_2)dxdt \ge \frac{1}{\varepsilon}\|v_1^- - v_2^-\|^2_{L_2(Q_T)},$$
$$|g_\varepsilon(v_1)-g_\varepsilon(v_2)| \le \frac{1}{\varepsilon}|v_1-v_2|,\quad \forall v_1,v_2\in W_2^{1,0}(Q_T). \qquad (6)$$

У прямокутнику $\overline{\Omega}$ введемо рівномірну сітку $\overline{\omega}=\omega\cup\gamma$, де ω – множина внутрішніх, а γ – множина граничних вузлів відповідно. Позначимо

$$\omega_\tau=\{t=t_j=j\tau,\ j=\overline{1,N};\ \tau=\tfrac{T}{N}\},\ \ \omega_T=\omega\times\omega_\tau,\ \ \gamma_T=\gamma\times\omega_\tau,$$

$$|y|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}=\left\{\max_{t\in\omega_\tau}\|y(x,t)\|^2+|y|^2_{W_2^{1,0}(\omega_T)}\right\}^{\frac12},\ \ \|y\|_*=\left\{|y|^2_{V_2^{1,0}(\omega_T)}+\tau\|y_{\bar t}\|^2_{L_2(\omega_T)}\right\}^{\frac12}.$$

Апроксимуємо задачу (5) неявною різницевою схемою:

$$y_{\bar t} - \sum_{i,j=1}^{2}(c_{ij}y_{\bar x_i})_{x_j} + c_0 y + P_0T_1T_2 g_\varepsilon(\tilde y) = P_0T_1T_2(f),\ \ (x,t)\in\omega_T,$$
$$y(x,t)=0,\ \ (x,t)\in\gamma_T,\quad y(x,0)=T_1T_2u_0,\quad x\in\omega, \qquad (7)$$

де [3]
$$T_\alpha v(x,t)=\int_{-1}^{1}(1-|\theta|)v(x_1+(2-\alpha)\theta h_1, x_2+(\alpha-1)\theta h_2)d\theta,\quad \alpha=1,2,$$

$$P_0 v(x,t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}v(x,\xi)d\xi,\quad t=\tau,\dots,N\tau.,$$

$$P_i v\ (x,t)=\int_{-1}^{0}v(x_1+(2-i)\theta h_1, x_2+(i-1)\theta h_2)d\theta,\quad i=1,2,$$

$$c_{ij}=P_0P_1P_2(a_{ij}),\ c_0=P_0T_1T_2(q),$$

$\tilde y(x,t)$ – полілінійне по x та кусково-стале по t поповнення сіткової функції $y(x,t)$.

В силу монотонності функції $g_\varepsilon(v)$

$$\sum_{\omega_\tau}\tau(P_0T_1T_2g_\varepsilon(\tilde{y}),y)=\sum_{\omega_\tau}\tau\cdot P_0\int_\Omega g_\varepsilon(\tilde{y})\tilde{y}dx=\int_{Q_T}g_\varepsilon(\tilde{y})\tilde{y}dxdt\geq 0\,.$$

Крім того, очевидна тотожність $y_{\bar{t}}y=\frac{1}{2}(y^2)_{\bar{t}}+\frac{\tau}{2}y_{\bar{t}}^2$. Використовуючи це та метод енергетичних нерівностей, можна отримати апріорну оцінку

$$|\,y\,|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}\leq M_2(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|\,u_0\,\|_{W_2^1(\Omega)})\,, \tag{8}$$

з якої випливає стійкість різницевої схеми (7) за початковими даними та правою частиною. Дослідимо збіжність та отримаємо оцінку швидкості збіжності. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (2). Тоді розв'язок різницевої задачі (7) збігається при $h\to 0$ до розв'язку задачі зі штрафом (5), при цьому має місце оцінка

$$|\,y-\bar{u}_\varepsilon\,|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}\leq M_3(h+\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{h^2}{\sqrt{\tau}}+\frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{\tau})(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|\,u_0\,\|_{W_2^1(\Omega)})\,, \tag{9}$$

де $\bar{u}_\varepsilon(x,t)=\begin{cases} P_0u_\varepsilon, & (x,t)\in\omega_T\,,\\ 0\;\;, & (x,t)\in\gamma_T\,,\\ T_1T_2u_0\,, & x\in\omega, t=0.\end{cases}$

Доведення. Застосуємо до рівняння (5) оператор $P_0T_1T_2$. Порівнявши отриману тотожність з рівнянням (7), для похибки $z=y-\bar{u}$ отримаємо задачу

$$z_{\bar{t}}-\sum_{i,j=1}^{2}(c_{ij}z_{\bar{x}_i})_{x_j}+c_0z+P_0T_1Tg_\varepsilon(\tilde{y})-P_0T_1T_2g_\varepsilon(\tilde{\bar{u}}_\varepsilon)=\Psi,\quad (x,t)\in\omega_T\,,$$

$$z(x,0)=0,\quad z(x,t)=0,\quad (x,t)\in\gamma_T\,, \tag{10}$$

де позначено

$$\Psi=-\sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij\,\bar{x}_i}^{(1)}-\sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij\bar{x}_i}^{(2)}-\sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij\bar{x}_i}^{(3)}+\psi_0+\eta_0-\mu_{\bar{t}}\,,\quad (x,t)\in\omega_T\,,$$

$$\eta_{ij}^{(1)}=P_0P_iT_{3-i}(a_{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j})-P_0P_iT_{3-i}(P_0(a_{ij})\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j})\,,$$

$$\eta_{ij}^{(2)}=P_0P_iT_{3-i}(P_0(a_{ij})\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j})-P_0P_1P_2(a_{ij})P_iT_{3-i}\frac{\partial(P_0u_\varepsilon)}{\partial x_j})\,,$$

$$\eta_{ij}^{(3)}=P_0P_1P_2(a_{ij})P_iT_{3-i}\frac{\partial(P_0u_\varepsilon)}{\partial x_j})-P_0P_1P_2(a_{ij})\bar{u}_{\varepsilon\bar{x}_j})\,,$$

$$\psi_0=P_0T_1T_2(q\;(\cdot)(u_\varepsilon(\cdot)-u_\varepsilon(x,t)))\,,\quad \mu=\bar{u}_\varepsilon-T_1T_2u_\varepsilon\,,\quad \eta_0=P_0T_1T_2(g_\varepsilon(u_\varepsilon)-g_\varepsilon((\tilde{\bar{u}}_\varepsilon))\,.$$

Помножимо скалярно (10) на z, скористаємось умовами (6), нерівністю Коші-Буньяковського, $\varepsilon-$нерівністю та співвідношенням $(P_0 T_1 T_2 g_\varepsilon(\tilde{y}), y) = \int\limits_{Q_T} g_\varepsilon(\tilde{y}) \cdot \tilde{y} dx dt$. Після нескладних перетворень отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \|z\|_* \le M_4 \{ \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} (\| \eta_{1j}^{(i)} |]_{L_2(\omega_T)} + \| \eta_{2j}^{(i)}]|_{L_2(\omega_T)}) + \| \psi_0 \|_{L_2(\omega_T)} \\ + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|u_\varepsilon - \tilde{\bar{u}}_\varepsilon\|_{L_2(Q_T)} + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \| \mu \|_{L_2(\omega_T)} \} . \end{aligned} \tag{11}$$

Оцінимо величини $\eta_{kj}^{(i)}, \psi_0, \mu$, $\| u_\varepsilon - \tilde{\bar{u}}_\varepsilon \|_{L_2(Q_T)}$.

Позначимо

$e_1(x) = (x_1 - h_1, x_1) \times (x_2 - h_2, x_2 + h_2)$, $e_2(x) = (x_1 - h_1, x_1 + h_1) \times (x_2 - h_2, x_2)$,

$e_{it}(x,t) = e_i(x) \times (t - \tau, t)$, $i = 1,2;$ $E_1 = (-1,0) \times (-1,1)$, $E_2 = (-1,1) \times (-1,0)$;

$\hat{u}$ – функція, яку можна отримати з u після заміни змінних, що переводить $e_i(x)$ в E_i.

Для $\eta_{ij}^{(1)}$ маємо

$$\eta_{ij}^{(1)} = P_0 P_i T_{3-i} (a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}) - P_0 P_i T_{3-i} (P_0 (a_{ij}) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}) = P_0 P_i T_{3-i} [\frac{1}{\tau} \int\limits_{t-\tau}^{t} (\int\limits_{\varsigma}^{\xi_3} \frac{\partial a_{ij}(\xi_1, \xi_2, \rho)}{\partial \rho} d\rho) d\varsigma \ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}].$$

Звідси отримаємо оцінку

$$| \eta_{ij}^{(1)} | \le \frac{M_5 \tau}{\sqrt{\tau h_1 h_2}} \| a_{ij} \|_{W_\infty^1(e_{it})} \cdot \| u_\varepsilon \|_{W_2^{1,0}(e_{it})} .$$

Підсумовуючи останню нерівність по вузлах сітки ω_T, знайдемо

$$\sum_{j=1}^{2} (\| \eta_{1j}^{(1)} |]_{L_2(\omega_T)} + \| \eta_{2j}^{(1)}]|_{L_2(\omega_T)}) \le M_6 \tau (\sum_{i,j} \| a_{ij} \|_{W_\infty^1(Q_T)}) \cdot \|u_\varepsilon\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} . \tag{12}$$

Функціонали $\eta_{ij}^{(2)}$ оцінимо за допомогою „білінійної леми” [4]. Маємо

$\eta_{ij}^{(2)} = P_0 P_i T_{3-i} (P_0 (a_{ij}) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}) - P_0 P_1 P_2 (a_{ij}) P_i T_{3-i} \frac{\partial (P_0 u_\varepsilon)}{\partial x_j}) = P_i T_{3-i} (\bar{a}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_\varepsilon}{\partial x_j}) - P_1 P_2 (\bar{a}_{ij}) P_i T_{3-i} \frac{\partial (\bar{u}_\varepsilon)}{\partial x_j})$ і

$| \eta_{ij}^{(2)} | \le \frac{M_7}{h} \| \hat{\bar{a}}_{ij} \|_{W_\infty^1(E_i)} \cdot \| \bar{u}_\varepsilon \|_{W_2^1(E_t)}$.

Крім того, білінійна форма $\eta_{ij}^{(2)}$ задовольняє умовам

$$\eta_{ij}^{(2)}(\hat{\bar{a}}_{ij}, 1) = 0 , \ \ \forall \hat{\bar{a}}_{ij} \in W_\infty^1(E_i) ; \ \ \eta_{ij}^{(2)}(1, \bar{u}) = 0 , \ \ \forall \bar{u} \in W_2^1(E_i) .$$

Тоді за допомогою „білінійної леми”,

$$| \eta_{ij}^{(2)} | \le \frac{M_8}{h} | \hat{\bar{a}}_{ij} |_{W_\infty^1(E_i)} \cdot | \bar{u}_\varepsilon |_{W_2^1(E_t)} .$$

Звідки випливає, що

$$|\eta_{ij}^{(2)}| \le M_9 \, |\hat{a}_{ij}|_{W_\infty^1(e_i)} \cdot |\bar{u}_\varepsilon|_{W_2^1(e_i)},$$

і так як

$|\hat{a}_{ij}|_{W_\infty^1(e_i)} \le \| a_{ij} \|_{W_\infty^1(Q_T)}$, $|\bar{u}_\varepsilon|_{W_2^1(e_i)} \le \dfrac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot |u_\varepsilon|_{W_2^{1,0}(e_{it})}$, то

$$|\eta_{ij}^{(2)}| \le \frac{M_{10}}{\sqrt{\tau}} \| a_{ij} \|_{W_\infty^1(e_{it})} \cdot \| u_\varepsilon \|_{W_2^{1,0}(e_{it})}.$$

Підсумовуючи останню нерівність по вузлах сітки ω_T :

$$\sum_{j=1}^{2} (\| \eta_{1j}^{(2)} |]_{L_2(\omega_T)} + \| \eta_{2j}^{(2)}] |_{L_2(\omega_T)}) \le M_{11} h (\sum_{i,j}^{2} \| a_{ij} \|_{W_\infty^1(Q_T)}) \cdot \| u_\varepsilon \|_{W_2^{1,0}(Q_T)}, \tag{13}$$

функціонал $\eta_{ij}^{(3)}$ представимо у такому вигляді :

$$\eta_{ij}^{(3)} = P_1 P_2 (\bar{a}_{ij}) P_i T_{3-i} (\frac{\partial(\bar{u}_\varepsilon)}{\partial x_j}) - P_1 P_2 (\bar{a}_{ij}) \bar{u}_{\varepsilon \bar{x}_j}.$$

Тоді $|\eta_{ij}^{(3)}| \le \dfrac{M_{12}}{h} \| \hat{\bar{a}}_{ij} \|_{L_\infty(E_i)} \cdot \| \bar{u}_\varepsilon \|_{W_2^2(E_t)}$.

Крім того, функціонал $\eta_{ij}^{(3)}(\bar{u})$ приймає нульові значення на поліномах нульової та першої степені. Скориставшись лемою Брембла – Гілберта [4], отримаємо

$$|\eta_{ij}^{(3)}| \le \frac{M_{13} h}{\sqrt{h_1 h_2}} \| \hat{a}_{ij} \|_{L_\infty(e_i)} \cdot |\bar{u}_\varepsilon|_{W_2^2(e_t)} \le \frac{M_{13} h}{\sqrt{h_1 h_2}} \| \hat{a}_{ij} \|_{W_\infty^1(Q_T)} \cdot \| u_\varepsilon \|_{W_2^{2,0}(e_{it})}.$$

Звідси випливає оцінка

$$\sum_{j=1}^{2} (\| \eta_{1j}^{(3)} |]_{L_2(\omega_T)} + \| \eta_{2j}^{(3)}] |_{L_2(\omega_T)}) \le M_{14} h (\sum_{i,j}^{2} \| a_{ij} \|_{W_\infty^1(Q_T)}) \cdot \| u_\varepsilon \|_{W_2^{1,0}(Q_T)}. \tag{14}$$

Вираз $\mu(x,t)$ представимо у вигляді

$$\mu = \bar{u}_\varepsilon - T_1 T_2 u_\varepsilon = \bar{u}_\varepsilon - P_0 T_1 T_2 u_\varepsilon + T_1 T_2 \bar{u}_\varepsilon - P_0 T_1 T_2 u_\varepsilon = \mu^{(1)} + \mu^{(2)}.$$

Очевидно, що $|\mu^{(2)}| \le \dfrac{M_{15}\sqrt{\tau}}{\sqrt{h_1 h_2}} \| \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \|_{L_2(e_t)}$,

де $e_t = e\,(x) \times (t-\tau, t)$, $e(x) = (x_1 - h_1, x_1 + h_1) \times (x_2 - h_2, x_2 + h_2)$.

Функціонал $\mu^{(1)}$ оцінюється за допомогою леми Брембла – Гілберта:

$$|\mu^{(1)}| \le \frac{M_{16} h^2}{\sqrt{\tau h_1 h_2}} \| u_\varepsilon \|_{W_2^{2,0}(e_t)}.$$

Таким чином,

$$|\mu| \le M_{17} (\frac{h^2}{\sqrt{h_1 h_2 \tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{h_1 h_2}}) \| u_\varepsilon \|_{W_2^{2,1}(e_t)}.$$

Звідси

$$\| \mu \|_{L_2(\omega_T)} \le M_{18}(h^2+\tau)\| u_\varepsilon \|_{W_2^{2,1}(Q_T)} . \qquad (15)$$

Вираз $\psi_0(x,t)$ перепишемо у такому вигляді:

$$\psi_0(x,t) = P_0T_1T_2(q(\xi_1,\xi_2,\xi_3))[\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}(\int_{\varsigma}^{\xi_3}\frac{\partial a_{ij}(\xi_1,\xi_2,\rho)}{\partial\rho}d\rho)d\varsigma\ ] + T_1T_2(\hat{q}(\overline{u}_\varepsilon(\cdot)-\overline{u}_\varepsilon)) = \psi_0^{(1)}+\psi_0^{(2)} .$$

Тоді

$$|\psi_0^{(1)}| \le \frac{M_{19}\sqrt{\tau}}{\sqrt{h_1h_2}}\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\|_{L_2(e_t)} \cdot \| q \|_{L_\infty(e_t)} , \quad |\psi_0^{(2)}| \le \frac{M_{20}}{\sqrt{\tau}}\| u_\varepsilon \|_{W_2^{2,0}(e_t)} \cdot \| q \|_{L_\infty(e_t)} .$$

Звідси

$$|\psi_0| \le M_{21}(\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{h_1h_2}}+\frac{1}{\sqrt{\tau}})\| u_\varepsilon \|_{W_2^{2,1}(e_t)} \cdot \| q \|_{L_\infty(e_t)} .$$

Просумувавши по вузлах сітки, отримаємо

$$\| \psi_0 \|_{L_2(\omega_T)} \le M_{22}(\tau+h)\| u_\varepsilon \|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \cdot \| q \|_{L_\infty(Q_T)} . \qquad (16)$$

Вираз $\| u_\varepsilon - \tilde{\overline{u}}_\varepsilon \|_{L_2(Q_T)}$ оцінимо таким чином:

$$\| u_\varepsilon - \tilde{\overline{u}}_\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} \le \| u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} + \| \overline{u}_\varepsilon - \tilde{\overline{u}}_\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} ,$$

$$\| u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon \|^2_{L_2(Q_T)} = \int_{Q_T}\left[u_\varepsilon(\xi_1,\xi_2,\theta) - \frac{1}{\tau}\int_{t_{j-1}}^{t_j}u_\varepsilon(\xi_1,\xi_2,\theta_1)d\theta_1\right]^2 d\xi_1 d\xi_2 d\theta =$$

$$= \int_{Q_T}\left[\frac{1}{\tau}\int_{t_{j-1}}^{t_j}u_\varepsilon(\xi_1,\xi_2,\theta) - u_\varepsilon(\xi_1,\xi_2,\theta_1)d\theta_1\right]^2 d\xi_1 d\xi_2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\int_{Q_T}(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\int_{\theta_1}^{\theta}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial p}(\xi_1,\xi_2,p)dp)d\theta_1)^2 d\xi_1 d\xi_2 d\theta \le$$

$$\le \frac{1}{\tau^2}\sum_{j=1}^{m}\ (\int_{\Omega}(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\int_{t_{j-1}}^{t}|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial p}(\xi_1,\xi_2,p)|\,dp)d\theta_1)^2 d\xi_1 d\xi_2 d\theta \le$$

$$\le \tau^2\sum_{j=1}^{m}\ (\int_{\Omega}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial p}(\xi_1,\xi_2,p))^2 dp)\ d\xi_1 d\xi_2 \le M_{23}\tau^2 \| u_\varepsilon \|^2_{W_2^{1,1}(Q_T)} .$$

Значить,

$$\| u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} \le M_{24}\tau \| u_\varepsilon \|_{W_2^{2,1}(Q_T)} . \qquad (17)$$

Далі, маємо

$$\| \overline{u}_\varepsilon - \tilde{\overline{u}}_\varepsilon \|^2_{L_2(Q_T)} = \| v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon \|^2_{L_2(Q_T)} .$$

Лінійний фунціонал $\vartheta = v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon$ $(v_\varepsilon = \overline{u}_\varepsilon)$ обмежен у $W_2^2(e_\theta(x))$ та приймає нульові значення на поліномах першої степені.

Значить,

$$| \vartheta | \le M_{25} h^2 (h_1 h_2)^{-\frac{1}{2}} | v_\varepsilon |_{W_2^2(e_\theta(x))} \le M_{26} h^2 (h_1 h_2 \tau)^{-\frac{1}{2}} | u_\varepsilon |_{W_2^{2,0}(e_\theta)}.$$

Звідси

$$\| \bar{u}_\varepsilon - \tilde{\bar{u}}_\varepsilon \|^2_{L_2(Q_T)} \le M_{27} h^4 \sum_{x \in \omega} \sum_{j=1}^{m} | u_\varepsilon |^2_{W_2^{2,0}(e_t)} \le M_{28} h^4 .$$

Таким чином,

$$\| u_\varepsilon - \tilde{\bar{u}}_\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} \le M_{29} (\tau + h^2) \| u_\varepsilon \|_{W_2^{2,1}(Q_T)} . \qquad (18)$$

Підставляючи (12) – (18) в (11) отримаємо (9). Теорему доведено.

Теорема 3. Розв'язок різницевої схеми (7) ($\tau = h^2, \varepsilon = h^2$) збігається при $h \to 0$ до задачі (1), при цьому має місце оцінка

$$\| y - \bar{u} \|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le M_{30} h (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| u_0 \|_{W_2^1(\Omega)}) . \qquad (19)$$

Доведення. Очевидна нерівність

$$\| y - \bar{u} \|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le \| \bar{u} - \bar{u}_\varepsilon \|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} + \| \bar{u}_\varepsilon - y \|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le M_{31} (\| \bar{u} - \bar{u}_\varepsilon \|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} + | y - \bar{u}_\varepsilon |_{V_2^{1,0}(\omega_T)}). \qquad (20)$$

Використовуючи лему Брембла-Гільберта, можна отримати оцінку [5]

$$\| \bar{u} - \bar{u}_\varepsilon \|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le M_{32} \left(\| u - u_\varepsilon \|_{W_2^{1,0}(Q_T)} + o(h) \right).$$

Звідси, (20), (9), та з нерівності (4) випливає оцінка

$$\| y - \bar{u} \|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le M_{33} \left(h + \frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{h^2}{\sqrt{\tau}} + \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\tau} + \sqrt{\varepsilon}\right) \cdot (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| u_0 \|_{W_2^1(\Omega)}) .$$

Поклавши $\tau = h^2, \varepsilon = h^2$, отримаємо (19). Теорему доведено.

4. Висновки

Як показано, різницева схема (7) є стійкою при довільних h, τ і ε. Однак саме при $\tau = h^2, \varepsilon = h^2$ неявна схема (7) є, в деякому розумінні, оптимальною по точності, коли вхідні дані належать відповідним класам функцій (2). У цьому випадку оцінка швидкості збіжності (19) узгоджена за вхідними даними. Така ситуація повністю відповідає результатам, щодо скінченно-різницевих та варіаційно-різницевих схем, які мають місце для першої початково-крайової задачі [6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства: Пер. с франц. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
2. Саженюк В.С., Черній Д.І., Риженко А.І. Обгрунтування методу сіток для параболічних варіаційних нерівностей другого порядку з обмеженням усередині області // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. наук. – 2006. – № 3. – С. 176–180.
3. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Высшая школа, 1987. – 296 с.
4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
5. Войцеховский С.А., Гаврилюк И.П. О сходимости разностных решений к обобщенным решениям первой краевой задачи для квазилинейного уравнения четвертого порядка в областях произвольной формы. – М.: Диффер. уравнения. – 1985. – Т. 21, №9. – С. 1582–1590.
6. Войцеховский С.А., Новиченко В.Н. Об оценке скорости сходимости разностных схем для параболических уравнений второго порядка в классах обобщенных решений. – Киев, 1985. – 18 с. Деп. в УкрНИИТИ 2.09.85 г., № 2006, Ук-ДЕП.