УДК 519.865.5

В.И. НОРКИН, С.В. БОЙКО

ОПТИМИЗАЦИЯ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА БЕЗОПАСНОСТИ

Ключевые слова: *финансовый портфель, оптимизация, доходность, односторонний риск, безопасность по Рою, оценка вероятности, эффективная граница.*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье совершенствуется подход А.Д. Роя [1] к безопасной оптимизации финансового портфеля, состоящий в минимизации оценки вероятности критического падения доходности портфеля при ограничении снизу на его среднюю доходность. Улучшение заключается в более точной оценке вероятности негативных доходностей с помощью пороговых функций риска. Поиск оптимального безопасного портфеля сводится к построению и анализу нового эффективного фронта недоминируемых по функциям риска портфелей. Для случая конечного множества сценариев доходности задача выбора безопасного портфеля сведена к задаче линейного смешанного булевого программирования.

Широко известна модель Марковица (1952) [2] оптимизации финансового портфеля по критериям доходность–риск, в которой в качестве меры риска используется дисперсия (или стандартное отклонение) доходности. Суть модели Марковица состоит в построении эффективной границы портфелей, имеющих минимальную дисперсию доходности при заданных значениях средней доходности, и выборе эффективного портфеля, максимизирующего некоторую функцию полезности [3]. В 1952 г. независимо была опубликована близкая работа английского экономиста А.Д. Роя [1], в которой предлагалось оптимизировать портфель по критерию минимума вероятности недополучения заданного уровня прибыли (Safety First критерий, SF-критерий). Поскольку оптимизация функции вероятности в 50-х годах прошлого столетия являлась трудной вычислительной задачей, А.Д. Рой предложил минимизировать ее верхнюю оценку, полученную из неравенства Чебышева. Для приближенной задачи А.Д. Рой дал простое и элегантное геометрическое решение, лежащее на эффективной границе недоминируемых портфелей в плоскости средняя доходность — риск (дисперсия доходности). Хотя эта работа не получила широкой популярности, тем не менее идеи А.Д. Роя продолжали развиваться в таких работах, как, например, [4] (максимизируется средняя доходность при ограничении на вероятность получения дохода меньше заданного предела), [5] (оптимизируется некоторый квантиль доходности), [6] (максимизируется доход и минимизируется вероятность недополучения заданного уровня дохода), [7] (используется лексико-графический SF-принцип), [8] (рассматривается многопериодная SF-оптимизация), [9] (используется оценка вероятности недополучения дохода с помощью экстремальных распределений), [10] (максимизируется вероятность превышения целевого уровня дохода и минимизируется вероятность непревышения заданного уровня дохода), [11, 12] (рассматриваются приложения SF-оптимизации к портфелям с сильно рискованными активами). В работах А.И. Кибзуна, Ю.С. Кана и их соавторов [13–19] изучаются задачи оптимального управления финансовым портфелем с квантильным целевым критерием, тесно связанным с вероятностью непревышения заданного уровня доходности.

Долгое время работа А.Д. Роя находилась в тени теории Г. Марковица, но, вероятно, это положение изменится. Здесь мы процитируем фрагмент из статьи [20].

«Осенью 2001 г. знаменитый французский социолог Брюно Латур написал предисловие к французскому переводу книги не менее знаменитого немецкого социолога Ульриха Бека «Risikogesellschaft — Auf dem Weg in eine andere Moderne» («Общество риска. На пути к другому модерну» [21]) и указал там на странное совпадение. Книга Бека вышла в Германии сразу после взрыва Чернобыльской АЭС. Ее французский перевод появился сразу после трагедии 9/11. Общество начинает осознавать стоящие перед ним опасности, в том числе те, которые возникли в силу его же собственного развития. Время доброй надежды прошло, у истории науки не будет счастливого конца. В эпоху постмодерна, которую Латур вслед за Беком предлагает называть эпохой рисков, наука нужна для другого — для минимизации неизбежных потерь.»

В свете недавних глобальных финансовых кризисов слова процитированных социологов кажутся еще более пророческими. В любом случае представляется, что портфели пенсионных и других фондов социального страхования должны оптимизироваться по SF-критерию.

В настоящей статье SF-подход А.Д. Роя к оптимизации финансового портфеля усовершенствуется в следующих направлениях. Первоначальная постановка А.Д. Роя дополняется ограничением на минимум средней доходности портфеля как и в подходе Г. Марковица. Тем самым показана полная аналогия между обоими подходами. Устраняется один из недостатков модели А.Д. Роя (и Г. Марковица) — симметричность относительно среднего дисперсии как меры риска — путем замены дисперсии средним односторонним отклонением доходности от заданного порога.

В неравенстве Чебышева используется не дисперсия, как в оригинальном подходе А.Д. Роя, а среднее одностороннее отклонение доходности от произвольного заданного уровня (односторонний риск) для оценки вероятности критического падения доходности. Этот уровень затем выбирается оптимальным образом. В результате получаются более точные оценки вероятности. Эффективный фронт портфелей строится не в плоскости дисперсия – доход, а в другой плоскости — односторонний риск – доход.

Таким образом, в данной статье SF-оптимизация портфеля состоит в приближенной минимизации вероятностной меры риска (вероятности того, что доходность меньше заданного критического уровня) при ограничении снизу на уровень доходности. Решение приближенной задачи состоит в построении и анализе эффективного фронта портфелей.

Кроме того, для конечного множества сценариев доходности задача оптимизации вероятности критического падения доходности эквивалентно сводится к задаче частичного булевого программирования, которая решается методом ветвей и границ. Точное решение позволяет оценить степень ошибки аппроксимационного подхода А.Д. Роя и предлагаемых в данной статье его модификаций.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ

Финансовый портфель описывается вектором $x=(x_1,\dots,x_n)$ стоимостей x_i и вектором случайных доходностей $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\Omega$ активов вида $i=1,\dots,n$ за некоторый фиксированный период времени. Обозначим $X=\left\{x\in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \le 1,\ x_i \ge c_i \ge -\infty\right\}$ множество допустимых портфелей с единичной суммарной начальной стоимостью всего портфеля, c_i – ограничения снизу на значения компонент портфеля (ограничения по заимствованию активов). В определении множества X допустимых портфелей используется неравенство $\sum_{i=1}^{n} x_i \le 1$, которое означает, что неиспользуемые средства $x_0=1-\sum_{i=1}^{n} x_i$ имеют нулевую доходность. Портфель характеризуется суммарной случайной доходностью за рассматриваемый период времени $f(x,\omega)=\omega' x=\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i$, средней доходностью $\mu(x)=E_\omega f(x,\omega)=\sum_{i=1}^{n}x_i E_\omega \omega_i$ и дисперсией доходности $\sigma^2(x)=E_\omega(f(x,\omega)-$ $-E_\omega f(x,\omega))^2$, где E_ω — математическое ожидание по распределению случайной величины ω, а ω' — транспонированный в строку вектор-столбец ω.

Согласно Г. Марковицу [2, 3] портфель оптимизируется по двум критериям — средней доходности $\mu(x)$ и стандартному отклонению доходности $\sigma(x)$, $(\mu(x),-\sigma(x))\to\max_{x\in X}$. Множество образов недоминируемых портфелей $\Gamma=(y\in R^1,\sigma^*(y))$ таких, что $[\sigma^*(y)]^2=\min_{x\in X,\,\mu(x)\ge y}\sigma^2(x)\ \forall y>u$, называется эффективным множеством (эффективной границей). Оптимальный портфель выбирается из эффективного множества, исходя из оптимизации некоторой функции полезности $\Phi(\sigma,\mu)$, определенной в плоскости риск – доходность (σ,μ).

1.1. SF-подход к выбору финансового портфеля. Согласно А.Д. Рою [1] оптимизация портфеля должна проводиться по критерию безопасности (Safety First) и состоит в минимизации вероятности

$$P_u(x)=\Pr_\omega\{f(x,\omega)\le u\}\to\min_{x\in X} \tag{1}$$

того, что доходность портфеля окажется меньше некоторого заданного критического уровня $u>0$, например $u=1$. Так как оптимизация вероятности является трудной задачей, А.Д. Рой предложим минимизировать ее верхнюю оценку, полученную из неравенства Чебышева,

$$P_u(x)=\Pr_\omega\{f(x,\omega)\le u\}=P_\omega\{-f(x,\omega)\ge -u\}=\Pr_\omega\{\mu(x)-f(x,\omega)\ge\mu(x)-u\}\le$$

$$\le\frac{\sigma^2(x)}{(\mu(x)-u)^2}=\bar{P}_u(x)\to\min_{x\in X}. \tag{2}$$

А.Д. Рой замечает, что в плоскости (σ,μ) величина $\sigma(x)/(\mu(x)-u)$ является котангенсом угла, который образует линия, проходящая через точки $(0,u)$ и $(\sigma(x),\mu(x))$, с горизонтальной осью σ. Максимальный такой угол соответствует минимальному значению $\bar{P}_u(x)$. Таким образом, решение аппроксимирующей задачи (2) подразделяется на следующие подзадачи.

Подзадача 1. Построение эффективной границы $\Gamma_u=(y>u,\sigma^*(y))$ такой, что

$$[\sigma^*(y)]^2=\min_{x\in X,\,\mu(x)\ge y}\sigma^2(x)\quad\forall y>u. \tag{3}$$

Подзадача 2. Нахождение касательной к эффективной границе Γ_u, проходящей через точку $(0,u)$; точке касания соответствует оптимальный портфель $x^*(u)$.

Отметим, что в рамках подхода А.Д. Роя можно учитывать также ограничение снизу на среднюю доходность, $\mu(x)\ge z$, где z — заданная константа, $z>u$. Для этого достаточно рассматривать точки эффективной границы, лежащие выше уровня z, т.е. точки на $\Gamma_z=(y\ge z,\sigma^*(y))$.

Таким образом, разница между аппроксимационным подходом А.Д. Роя (2) и подходом Г. Марковица, по сути, состоит только в способе выбора оптимального портфеля из множества эффективных портфелей Γ.

1.2. Точное решение задачи минимизации вероятности для конечного множества сценариев. Пусть случайный вектор ω в (1) принимает конечное множество значений Ω с вероятностями p_ω, $\omega\in\Omega$. Рассмотрим задачу

$$\Pi_u(x)=\sum_{\omega\in\Omega}p_\omega I_{\{f(x,\omega)<u\}}\to\min_{x\in X,\ \mu(x)\ge y}, \tag{4}$$

где $I_{\{f(x,\omega)<u\}}$ — индикаторная функция события $\{f(x,\omega)<u\}$, т.е. $I_{\{f(x,\omega)<u\}}=1$, если $f(x,\omega)<u$, и $I_{\{f(x,\omega)<u\}}=0$ в противном случае. Легко видеть, что для непрерывных по x функций $f(x,\omega)$ разрывные функции $I_{\{f(x,\omega)<u\}}$ и, следовательно, $\Pi_u(x)$ полунепрерывны снизу по x, поэтому для компактного множества допустимых портфелей задача (4) имеет решение. Заметим, что между функциями $P_u(x)$ из (1) и $\Pi_u(x)$ из (4) справедливо соотношение $\Pi_u(x)\le P_u(x)$, поэтому любые оценки сверху для $P_u(x)$ справедливы и для $\Pi_u(x)$. Условия непрерывности функций $P_u(x)$ и $\Pi_u(x)$ имеются в [13, sec. 2.2.2; 22; 23, sec. 7.2.4].

Задача (4) может быть решена стохастическим методом ветвей и границ [24]. Далее сведем ее к задаче частично целочисленного (булева) программирования. Пусть $\inf_{x\in X,\,\omega\in\Omega} f(x,\omega)\ge -M>-\infty$ и $M+u>0$, где M — некоторая константа. Каждому $\omega\in\Omega$ поставим в соответствие бинарную переменную $z_\omega\in\{0,1\}$. Рассмотрим задачу

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega z_\omega \to \min_{x\in X,\, z_\omega\in\{0,1\}} \tag{5}$$

при дополнительных ограничениях

$$\mu(x)\ge y, \tag{6}$$

$$-f(x,\omega)+u\le (M+u)z_\omega,\ \omega\in\Omega. \tag{7}$$

Теорема 1. Пусть множество X компактно, а Ω — конечно; функции $f(\cdot,\omega)$ непрерывны для любого $\omega\in\Omega$; $\inf_{x\in X,\,\omega\in\Omega} f(x,\omega)\ge -M>-\infty$, $M+u>0$. Тогда задачи (4) и (5)–(7) эквивалентны в том смысле, что их решения существуют и оптимальные значения целевых функций совпадают. При этом если x^* – оптимальное решение задачи (4), то $(x^*,\ z_\omega^*=I_{\{f(x^*,\omega)<u\}})$ — оптимальное решение задачи (5)–(7), и наоборот: если $(x^*,\ z_\omega^*)$ — оптимальное решение задачи (5)–(7), то x^* — оптимальное решение (4).

Теорема 1 является частным случаем более общей теоремы 2 (см. приложение).

Задача (5)–(7) может быть численно решена стандартным методом ветвей и границ. Ветвление осуществляется по булевым переменным. Процесс решения состоит в переборе на дереве задач вида (5)–(7), где $z_\omega\in Z_\omega\subseteq\{0,1\}$, с использованием нижних и верхних оценок оптимальных значений целевой функции (5). Нижние оценки находятся с помощью непрерывной релаксации $0\le z_\omega\le 1$ свободных булевых ограничений $z_\omega\in Z_\omega=\{0,1\}$, а верхние оценки – путем фиксации свободных булевых переменных на верхних значениях $z_\omega=1$.

1.3. Модификации SF-подхода А.Д. Роя с помощью односторонних мер риска. Как отмечал Г. Марковиц в [3], недостатком стандартного отклонения $\sigma(x)$ как меры риска является то, что в $\sigma(x)$ учитываются (как риски) события превышения доходности $f(x,\omega)$ над средним значением $\mu(x)=Ef(x,\omega)$, которые к понятию риска отношения не имеют. Очевидно, этот недостаток имеет место и в аппроксимационном подходе А.Д. Роя. Поэтому наше первое усовершенствование подхода А.Д. Роя состоит в замене стандартного отклонения $\sigma(x)$ на другие, более точные и адекватные односторонние (down side) меры риска. Следуя Г. Марковицу [3], определим стандартное полуотклонение вниз случайной доходности $f(x,\omega)$ от среднего значения $\mu(x)$:

$$R_{(\mu)}(x)=E\max\{0,\ \mu(x)-f(x,\omega)\}. \tag{8}$$

В силу неравенства Чебышева справедлива следующая оценка при $u < \mu(x)$:

$$P_u(x) = \Pr_\omega \{f(x, \omega) \le u\} = \Pr_\omega \{-f(x, \omega) \ge -u\} =$$
$$= \Pr_\omega \{\mu(x) - f(x, \omega) \ge \mu(x) - u\} \le$$
$$\le \Pr_\omega \{\max\{0, \mu(x) - f(x, \omega)\} \ge \mu(x) - u\} \le$$
$$\le \frac{E \max\{0, \mu(x) - f(x, \omega)\}^r}{(\mu(x) - u)^r} \le \frac{E|\mu(x) - f(x, \omega)|^r}{(\mu(x) - u)^r}, \quad r > 0. \tag{9}$$

Таким образом,
$$P_u(x) \le \frac{R_{(\mu)}(x)}{\mu(x) - u} = P_u^-(x), \tag{10}$$

причем в силу (9) выполнено неравенство $P_u^-(x) \le \overline{P}_u(x)$, т.е. оценка (10) является более точной, чем (2).

Следуя идее А.Д. Роя [1], можно минимизировать вместо вероятности $P_u(x)$ ее верхнюю оценку (10). Последняя задача сводится к решению следующих подзадач.

Подзадача 3. Построение эффективной границы $\Gamma_- = (y > u, R_{(\mu)}^*(y))$ такой, что
$$R_{(\mu)}^*(y) = \min_{x \in X,\, \mu(x) \ge y} R_{(\mu)}(x) \quad \forall y > u. \tag{11}$$

Подзадача 4. Нахождение касательной к эффективной границе Γ_-, проходящей через точку $(0, u)$.

Вычислительно задача (11) отличается от (3) тем, что функционал $R_{(\mu)}(x)$ в (11) не выражается в замкнутом виде через коэффициенты ковариации доходностей активов, а также тем, что $R_{(\mu)}(x)$ является негладкой функцией. Задача (11) относится к классу задач выпуклого стохастического программирования [25].

Рассмотрим еще одну модификацию подхода А.Д. Роя. Введем α-квантиль $q_\alpha(x) = \max\{q\colon \Pr\{f(x, \omega) \le q\} \le \alpha\}$ и меру риска

$$R_{q_\alpha}(x) = \frac{E_\omega \max\{0, q_\alpha(x) - f(x, \omega)\}}{\Pr\{f(x, \omega) \le q_\alpha(x)\}},$$

которая называется средним односторонним отклонением (в сторону меньших значений) от α-квантиля $q_\alpha(x)$. При $q_\alpha(x) > u$ в силу неравенства Чебышева аналогично (9) выполнено неравенство

$$P_u(x) \le \frac{E_\omega \max\{0, q_\alpha(x) - f(x, \omega)\}}{q_\alpha(x) - u}. \tag{12}$$

Эту оценку можно привести к виду

$$P_u(x) \le \frac{\Pr\{f(x, \omega) \le q_\alpha(x)\}}{q_\alpha(x) - u} \frac{E_\omega \max\{0, q_\alpha(x) - f(x, \omega)\}}{\Pr\{f(x, \omega) \le q_\alpha(x)\}} \le \frac{\alpha R_{q_\alpha}(x)}{q_\alpha(x) - u}. \tag{13}$$

Частным случаем этой оценки является медианная оценка при $\alpha = 1/2$. Теперь проблема сводится к минимизации правой части соотношения (13), которая, в свою очередь, сводится к построению эффективного фронта $\left\{ r(y) = \min_{x \in X,\, q_\alpha(x) \ge y} R_{q_\alpha}(x),\ y > u \right\}$ и касательной к нему, проходящей через точку $(0, u)$.

Описанный аппроксимационный подход А.Д. Роя и его модификации показывают, как связана SF-оптимизация портфеля с традиционными и некоторыми новыми односторонними мерами риска. Обобщим описанные модификации аппроксимационного подхода А.Д. Роя.

2. ОБОБЩЕНИЕ SF-ПОДХОДА А.Д. РОЯ К ОПТИМИЗАЦИИ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ ПО КРИТЕРИЮ БЕЗОПАСНОСТИ

Определим величину $R_{(y)}(x) = E\max\{0,\ y - f(x,\omega)\}$. Аналогично (9) при любом $y > u$ имеет место оценка

$$P_u(x) \le \frac{E_\omega \max\{0,\ y - f(x,\omega)\}}{y - u} = \frac{R_{(y)}(x)}{y-u}, \tag{14}$$

поэтому

$$P_u(x) \le \min_{\{y:\ y>u\}} \frac{R_{(y)}(x)}{y-u}. \tag{15}$$

Очевидно, оценка (15) точнее оценок (10), (12), которые получаются из более слабой оценки (14) путем подстановки соответственно $y = \mu(x)$ и $y = q_\alpha(x)$. Оценка снизу для $P_u(x)$ имеет вид

$$P_u(x) = E_\omega I_{\{f(x,\omega)\le u\}} = E_\omega I_{\{f(x,\omega)\le u\}} \frac{u - f(x,\omega)}{u - f(x,\omega)} \ge$$

$$\ge \frac{E_\omega (u - f(x,\omega)) I_{f(x,\omega)\le u}}{u - \min\limits_{\{\omega\in\Omega:\ f(x,\omega)\le u\}} f(x,\omega)} = \frac{E_\omega \max\{0, u - f(x,\omega)\}}{u - \min\limits_{\{\omega\in\Omega:\ f(x,\omega)\le u\}} f(x,\omega)}.$$

Следуя А.Д. Рою [1], вместо $P_u(x)$ будем минимизировать верхнюю оценку (15) по $x \in X$ и, кроме того, наложим ограничение снизу $z \le \mu(x)$ на среднюю доходность $\mu(x)$ портфеля x. Таким образом, получаем задачу с параметрами $(u,\ z)$:

$$\frac{R_{(y)}(x)}{y-u} \to \min_{\{(x,\ y):\ x\in X,\ \mu(x)\ge z,\ y>u\}}. \tag{16}$$

Фактически в этой постановке приближенно минимизируется вероятность критического падения доходности портфеля при ограничении снизу на его среднюю доходность. Очевидно,

$$\min_{\{(x,\ y):\, x\in X,\ \mu(x)\ge z,\ y>u\}} \frac{R_{(y)}(x)}{y-u} = \min_{y>u} \frac{\min\limits_{x\in X,\ \mu(x)\ge z} R_{(y)}(x)}{y-u} = \min_{y>u} \frac{r(y,\ z)}{y-u},$$

где функция риска имеет вид

$$r(y,\ z) = \min_{x\in X,\ \mu(x)\ge z} R_{(y)}(x) = \min_{x\in X,\ \mu(x)\ge z} [E_\omega \max\{0,\ y - f(x,\omega)\}].$$

Для фиксированного z построим эффективную границу

$$\Gamma_z = \left\{ (r(y,\ z),\ y) \in R^2,\ \ y \ge \min_{x\in X,\ \omega\in\Omega} f(x,\omega) \right\}.$$

Из геометрических соображений следует, что минимум в задаче (16) достигается в точке $(r^* = r(y^*,\ z),\ y^*)$ касания эффективной границы Γ_z прямой, проходящей через точку $(0,\ u)$ и имеющей минимальный угол наклона по отношению к вертикальной оси y (рис. 1).

Отметим, что если функция случайной доходности $f(x,\omega)$ вогнута по x на выпуклом множестве X, то $\max\{0,\ y - f(x,\omega)\}$ выпукла по совокупности переменных $(x,\ y)$, а функция минимума $r_z(y) = \min\limits_{x\in X,\ \mu(x)\ge z} R_{(y)}(x)$ выпукла и монотонно возрастает по y. Отсюда следует, что эффективная граница вогнута вверх по отношению к горизонтальной оси r и монотонна по r. Таким образом, если существует портфель x такой, что с положительной вероятностью его доходность $f(x, \omega)$ больше u, то задача имеет единственное решение.

Задача нахождения эффективной границы $r(y) = \min\limits_{x \in X,\, \mu(x) \geq z} R_{(y)}(x)$, $y > u$, является задачей выпуклого стохастического программирования и может решаться, например, методом стохастических квазиградиентов [25]. Стохастический субградиент функции $R_{(y)}(\cdot)$ имеет вид

$$g(x, \omega) = \begin{cases} -\omega, & y - \omega^T x > 0, \\ \omega, & y - \omega^T x \leq 0, \end{cases}$$

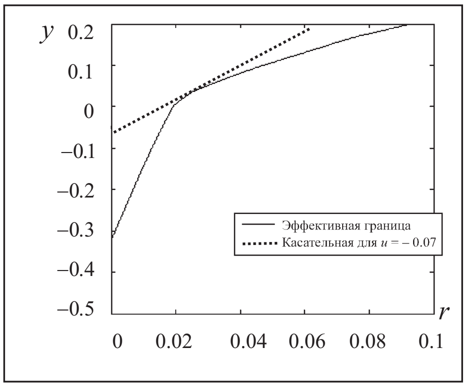

Рис. 1. График функции риска $r(y, z)$ для $z = 0.15$

при этом $E_\omega g(x, \omega) \in \partial R_{(y)}(x)$, где $\partial R_{(y)}(x)$ — субдифференциал функции $R_{(\mu)}(\cdot)$ в точке x.

Другой подход к решению задач стохастического программирования состоит в аппроксимации распределения векторной случайной величины ω дискретным распределением со значениями ω^s и вероятностями p_s [26]. Тогда математические ожидания в $R_{(y)}(x) = E_\omega \max\{0,\ y - f(x, \omega)\}$ можно аппроксимировать средним значением

$$R^S_{(y)}(x) = \sum_{s=1}^{S} p_s \max\{0,\ y - f(x, \omega^s)\}$$

и вместо нахождения $r(y, z) = \min\limits_{x \in X,\, \mu(x) \geq z} R_{(y)}(x)$ решать задачи

$$R^S_{(y)}(x) \to \min_{x \in X,\, \mu(x) \geq z} \quad \forall y > u\,.$$

В случае эмпирической аппроксимации случайные точки $\{\omega^s\}$ являются независимыми одинаково распределенными векторами (с таким же распределением, как у вектора ω), а $p_s = 1/S$.

Отметим, что для линейных функций $f(\cdot, \omega)$ задачи минимизации кусочно-линейной функции $R^S_{(y)}(x)$ сводятся к решению задач линейного программирования.

3. ДРУГИЕ ПОДХОДЫ К БЕЗОПАСНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ

3.1. Максимизация доходности портфеля при ограничении на вероятность недополучения заданного уровня прибыли. Л. Телсер [4] рассмотрел следующую задачу:

$$\mu(x) = Ef(x, \omega) \to \max{}_{x \in X} \qquad (17)$$

при ограничении

$$P_{(u)}(x) = P_\omega \{f(x, \omega) \leq u\} \leq \alpha\,, \qquad (18)$$

где $f(x, \omega)$ — доходность портфеля x со случайным вектором доходностей ω. Отметим, что сложное вероятностное ограничение (18) можно заменить на эквивалентное и также весьма сложное квантильное ограничение $q_\alpha(x) \geq u$. Для приближенного решения задачи (17), (18) применим верхнюю аппроксимацию вероятности $P_{(u)}(x)$, заменив вероятностное ограничение (18) одним из более сильных ограничений:

$$\text{а)}\ \frac{R_{(\mu)}(x)}{\mu(x) - u} \leq \alpha\,, \quad \text{б)}\ \frac{\alpha R_{q_\alpha}(x)}{q_\alpha(x) - u} \leq \alpha\,, \quad \text{в)}\ \min_{y > u} \frac{R_{(y)}(x)}{y - u} \leq \alpha\,. \qquad (19)$$

В случае а) решение задачи сводится к нахождению максимально удаленной от начала координат точки пересечения эффективной границы $\Gamma_{-} = (R^{*}_{(\mu)}(y),\ y > u)$ с прямой, проходящей через точку $(0, u)$ и имеющей тангенс $1/\alpha$ угла наклона к горизонтальной оси.

Для конечного множества сценариев Ω задача (17), (18) может быть сведена к задаче частично целочисленного (булевого) программирования. Для равновероятных сценариев ограничение (18) означает, что в допустимом решении x должно выполняться не более чем $\alpha|\Omega|$ ограничений $f(x, \omega) \le u$, где $|\Omega|$ — общее число сценариев. В дискретном программировании известен способ сведения таких задач к задачам частично целочисленного программирования [27, гл. 2, § 4]. Пусть $\inf_{x \in X,\, \omega \in \Omega} f(x, \omega) \ge -M > -\infty$. Каждому $\omega \in \Omega$ поставим в соответствие бинарную переменную $z_\omega \in \{0, 1\}$. Рассмотрим задачу

$$Ef(x, \omega) \to \max_{x \in X,\ \{z_\omega \in \{0,1\}\}} \tag{20}$$

при ограничениях

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega z_\omega \le \alpha , \tag{21}$$

$$-f(x, \omega) + u \le (M + u) z_\omega ,\ \ \omega \in \Omega . \tag{22}$$

Эквивалентность задач (17), (18) и (20)–(22) следует из теоремы 2 приложения.

3.2. Минимизация денежного резерва (VaR), гарантирующего выполнение вероятностного ограничения на суммарные денежные средства. Катаока [5] рассмотрел следующую задачу:

$$v \to \min_{x \in X,\, v} ,$$

$$P_{u,v}(x) = P_\omega \{v + f(x, \omega) \le u\} \le \alpha . \tag{23}$$

Очевидно, что эта задача эквивалентна максимизации квантиля

$$q_\alpha(x) = \max\{q\colon \Pr\{f(x, \omega) \le q\} \le \alpha\} \to \max_{x \in X} .$$

Аналогично (19) вероятностное ограничение (23) можно заменить на более сильное, используя оценки сверху для вероятности $P_{u,v}(x)$. Например, рассмотрим задачу

$$v \to \min_{x \in X,\, v} ,$$

$$\min_{y > u - v} \frac{E_\omega \max\{0,\ y - f(x, \omega)\}}{y - (u - v)} \le \alpha .$$

Из геометрических соображений следует, что оптимум в последней задаче достигается на портфеле x^*, соответствующем точке (r^*, y^*) эффективной границы $\Gamma^0 = \left\{(r,\ y) \in R^2\colon\ r(y) = \min_{x \in X} R_{(y)}(x),\ y > u\right\}$ такой, что касательная к границе Γ^0 имеет тангенс $1/\alpha$ угла наклона к горизонтальной оси, при этом оптимальное значение целевой функции определяется как $v^* = u + r^*/\alpha - y^*$.

3.3. Оптимизация портфеля как задача лексикографической оптимизации. В работе [7] рассмотрена следующая задача лексикографической оптимизации:

$$(\pi_{u,\alpha}(x),\ \mu(x)) \to \mathrm{Lex}\max_{x \in X} ,$$

где

$$\pi_{u,\alpha}(x) = \begin{cases} 1 - \Pr\{f(x, \omega) \le u\}, & \Pr\{f(x, \omega) \le u\} > \alpha, \\ 1, & \Pr\{f(x, \omega) \le u\} \le \alpha. \end{cases}$$

При этом подходе сначала решается задача

$$\Pr\{f(x,\omega)\le u\}\to\min_{x\in X},$$

и если она имеет допустимое решение x^* такое, что $\Pr\{f(x^*,\omega)\le u\}\le\alpha$, то затем решается задача

$$\mu(x)\to\min_{x\in X},$$

$$\Pr\{f(x,\omega)\le u\}\le\alpha .$$

В этом подходе вероятности $\Pr\{f(x,\omega)\le u\}$ также можно заменить на их верхние оценки (10), (12), (15).

Дальнейшее обсуждение задачи оптимизации финансового портфеля на основе критериев безопасности можно найти в [28].

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Сравним на численном примере, взятом из [3], решения задачи SF-оптимизации финансового портфеля по оригинальному (разд. 1.1) и модифицированному (разд. 2) методу А.Д. Роя с точным решением задачи, полученным методом ветвей и границ (разд. 1.2). В рассматриваемом примере портфель состоит из девяти позиций – акций девяти крупных американских компаний, годовые доходности которых за 18 лет (1937–1954) приведены в [3, табл.1, с. 13]. Таким образом, векторы x и ω имеют по девять компонент, а множество (равновероятных) сценариев Ω содержит 18 элементов (векторов-строк из табл. 1).

Таблица 1

Год	Годовые доходности акций компаний								
	Am.T.	A.T. &T.	U.S.S.	G.M.	A.T.& Sfe	C.C.	Bdn.	Frstn.	S.S.
1937	–0,305	–0,173	–0,318	–0,477	–0,457	–0,065	–0,319	–0,400	–0,435
1938	0,513	0,098	0,285	0,714	0,107	0,238	0,076	0,336	0,238
1939	0,055	0,200	–0,047	0,165	–0,424	–0,078	0,381	–0,093	–0,295
1940	–0,126	0,030	0,104	–0,043	–0,189	–0,077	–0,051	–0,090	–0,036
1941	–0,280	–0,183	–0,171	–0,277	0,637	–0,187	0,087	–0,400	–0,240
1942	–0,003	0,067	–0,039	0,476	0,865	0,156	0,262	1,113	0,126
1543	0,428	0,300	0,149	0,225	0,313	0,351	0,341	0,580	0,639
1944	0,192	0,103	0,260	0,290	0,637	0,233	0,227	0,473	0,282
1945	0,446	0,216	0,419	0,216	0,373	0,349	0,352	0,229	0,578
1946	–0,088	–0,046	–0,078	–0,272	–0,037	–0,209	0,153	–0,126	0,289
1947	–0,127	–0,071	0,169	0,144	0,026	0,355	–0,099	0,009	0,184
1948	–0,015	0,056	–0,035	0,107	0,153	–0,231	0,038	0,000	0,114
1949	0,305	0,038	0,133	0,321	0,067	0,246	0,273	0,223	–0,222
1950	–0,096	0,089	0,732	0,305	0,579	–0,248	0,091	0,650	0,327
1951	0,016	0,090	0,021	0,195	0,040	–0,064	0,054	–0,131	0,333
1952	0,128	0,083	0,131	0,390	0,434	0,079	0,109	0,175	0,062
1953	–0,010	0,035	0,006	–0,072	–0,027	0,067	0,210	–0,084	–0,048
1954	0,154	0,176	0,908	0,715	0,469	0,077	0,112	0,756	0,185

На рис. 1 для средней доходности $z=0.15$ представлены эффективная граница $\Gamma_{0.15}=\{(r(y,0.15),\ y)\in R^2,\ \ y\ge-0.477\}$ из разд. 2, а также касательная к ней, проходящая через точку $(0,u=-0.07)$, соответствующая оптимальному портфелю с $u=-0.07$. Касание происходит в точке с координатами $(0.0252, 0.0352)$, которой соответствует оптимальный портфель $x^*=(0,\ 0,\ 0.3951,\ 0,\ 0.2151,\ 0,\ 0.3846,\ 0,\ 0.0052)$.

На рис. 2 для средней доходности $z=0.1$ представлены графики точной функции вероятности

$$\Pi(u)=\min_{x\in X,\,\mu(x)\ge z}\Pr\{f(x,\omega)<u\},$$

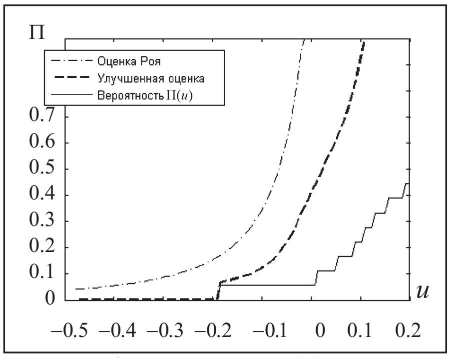

Рис. 2. График вероятности $\Pi(u)$ и ее оценок для $z = 0.1$

ее аппроксимации А.Д. Роя

$$\overline{\Pi}(u) = \min_{x \in X,\, \mu(x) \geq z} [\sigma^2(x) / (\mu(x) - u)^2]$$

и улучшенной оценки из разд. 2

$$\widetilde{\Pi}(u) = \min_{y > u} [r(y, z) / (y - u)],$$

где

$$r(y, z) = \min_{x \in X,\, \mu(x) \geq z} E_\omega \max\{0, y - f(x, \omega)\}.$$

Для других значений параметра средней доходности z картина аналогична; при уменьшении параметра z кривые смещаются вправо, при увеличении – влево. Приведенный пример показывает, что аппроксимация А.Д. Роя $\overline{\Pi}(u)$ является плохой оценкой функции $\Pi(u)$ во всем диапазоне значений u. Улучшенная оценка $\widetilde{\Pi}(u)$ намного точнее, но может применяться только для отрицательных значений u. Для критического уровня $u = -0.1$ и средней доходности $z = 0.1$ в табл. 2 приведена структура оптимальных портфелей, найденных по методике Г. Марковица (для средней доходности $z = 0.1$), А.Д. Роя (разд. 1.1), приближенной (разд. 2) и точной SF-методике (разд. 1.2).

Характеристики оптимальных портфелей из табл. 2 приведены в табл. 3, где $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$, $P_{-0.1}(\cdot)$ и $P_0(\cdot)$ – вероятности доходностей портфеля, меньших соответственно -0.1 и 0, $\mu(\cdot)$ – средняя доходность, $\sigma(\cdot)$ – стандартное отклонение доходности.

Таблица 2

Методика	**Структура оптимальных портфелей**								
	Am.T.	**A.T. &T.**	**U.S.S.**	**G.M.**	**A.T. & Sfe**	**C.C.**	**Bdn.**	**Frstn.**	**S.S.**
Марковиц	0	0	0.1152	0.0226	0.084	0	0.4907	0	0
Рой	0	0	0.1154	0.0226	0.0841	0	0.4913	0	0
Приближенная SF	0	0	0.3534	0	0.0769	0.0015	0.2590	0	0
Точная SF	0.0582	0.0708	0.0417	0.0869	0.1354	0.0577	0.1843	0.2154	0.0943

Таблица 3

Методика	**Характеристики оптимальных портфелей**							
	x_0	$\overline{\Pi}$	$\widetilde{\Pi}$	Π	$P_{-0.1}(\cdot)$	$P_0(\cdot)$	$\mu(\cdot)$	$\sigma(\cdot)$
Марковиц	0.2875	–	–	–	0.0556	0.1667	0.1	0.1174
Рой	0.2867	0.3448	–	–	0.0556	0.1667	0.1001	0.1175
Приближенная SF	0	–	0.122	–	0.0556	0.0556	0.1	0.1362
Точная SF	0.0552	–	–	0.0556	0.0556	0.0556	0.1323	0.2044

Из табл. 2, 3 сделаем следующие выводы. Первые два портфеля Марковица и Роя мало отличаются. Структура третьего приближенного SF-оптимального портфеля подобна структуре портфелей Марковица и Роя, но этот портфель является более безопасным, поскольку вероятность $P_0 = 0.0556$ отрицательных значений доходности у него меньше. Четвертый SF-оптимальный портфель значительно отличается от остальных: он более диверсифицирован, более безопасен, имеет большую среднюю доходность, но менее сфокусирован вокруг средней доходности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье усовершенствован подход А.Д. Роя [1] к безопасной (Safety First) оптимизации финансовых портфелей. В данном подходе минимизируется оценка вероятности критического падения доходности портфеля при ограничении снизу на его среднюю доходность. Подходы А.Д. Роя и Г. Марковица к оптимизации финансового портфеля достаточно близки и различаются только способом выбора точки на одной и той же эффективной границе в плоскости доходность – риск (дисперсия доходности). В данной статье, во-первых, улучшена оценка риска негативных доходностей портфеля с помощью односторонних пороговых мер риска. Поиск оптимального портфеля сводится к построению и анализу нового эффективного фронта портфелей в плоскости порог – пороговая мера риска. Построение этого эффективного фронта состоит в решении задач выпуклого стохастического программирования — минимизации пороговых мер риска. Оптимальный безопасный портфель находится простым и элегантным геометрическим методом А.Д. Роя. Во-вторых, для случая конечного множества сценариев доходности задача выбора безопасного портфеля сведена к задаче линейного частично булевого программирования, в которой непрерывные переменные соответствуют компонентам портфеля, а число булевых компонентов совпадает с числом сценариев. Задача решается стандартным методом ветвей и границ. Теоретические построения и выводы проиллюстрированы на численном примере поиска безопасного портфеля с девятью компонентами и восемнадцатью сценариями доходности.

ПРИЛОЖЕНИЕ. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ СЦЕНАРИЕВ К ЗАДАЧЕ СМЕШАННОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть случайный вектор ω в (1) принимает конечное множество значений Ω с вероятностями p_ω, $\omega \in \Omega$. Обозначим $P_k(x) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega I_{\{f_k(x,\omega)<0\}}$, $k = 1,\dots,K$, где $I_{\{f_k(x,\omega)<0\}}$ — индикаторная функция события $\{f_k(x,\omega)<0\}$, т.е. $I_{\{f_k(x,\omega)<0\}} = 1$, если $f_k(x,\omega)<0$, и $I_{\{f_k(x,\omega)<0\}} = 0$ в противном случае. Функция $P_k(x)$ имеет смысл вероятности события $\{f_k(x,\omega)<0\}$. Рассмотрим задачу

$$G_0(x, P_1(x), \dots, P_K(x)) \to \min_{x \in X}, \tag{24}$$

$$G_j(x, P_1(x), \dots, P_K(x)) \le 0, \ \ j = 1,\dots,m, \tag{25}$$

где функции $G_j(x, \pi_1, \dots, \pi_K)$, $j = 0, 1, \dots, m$, монотонны (не убывают) по аргументам $\pi_1 \ge 0, \dots, \pi_K \ge 0$, X — компактное множество. Частными случаями задачи (24), (25) являются задача оптимизации вероятностей и задача оптимизации с вероятностными ограничениями. Далее сведем задачу (24), (25) к задаче смешанного целочисленного программирования. Предположим, что

$$\inf_{x \in X} f_k(x,\omega) \ge -M_{k\omega} > -\infty .$$

Введем переменные $z_{k\omega} \in \{0,1\}$, $z_k = \{z_{k\omega}, \omega \in \Omega\}$ и линейные булевы функции $p_k(x, z_k) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega z_{k\omega}$. Рассмотрим задачу

$$G_0(x, p_1(x, z_1), \dots, p_K(x, z_K)) \to \min_{x \in X,\, \{z_{k\omega}\}}, \tag{26}$$

$$G_j(x, p_1(x, z_1), \dots, p_K(x, z_K)) \le 0, \ \ j = 1,\dots,m, \tag{27}$$

$$-f_k(x,\omega) \le M_{k\omega} z_{k\omega}, \ \ z_{k\omega} \in \{0,1\}, \ \omega \in \Omega, \ k = 1,\dots,K. \tag{28}$$

Теорема 2. Пусть множество X компактно, а Ω – конечно; функции $f_k(\cdot,\omega)$ непрерывны для любого $\omega \in \Omega$; функции $G_j(x, \pi_1, \dots, \pi_K)$ непрерывны по совокупности аргументов и монотонны (не убывают) по $\pi_1, \dots, \pi_K$; $\inf_{x \in X} f_k(x,\omega) \ge -M_{k\omega} > -\infty$, $M_{k\omega} > 0$. Тогда задачи (4) и (5), (7) эквивалентны в том смысле, что их решения существуют и оптимальные значения целевых функций совпадают. При этом если x^* — оптимальное решение задачи (24), (25), то $(x^*, \{z^*_{k\omega} = I_{\{f_k(x^*,\,\omega)<0\}}\})$ — оптимальное решение задачи (26)–(28), и наоборот, если $(x^*, \{z^*_{k\omega}\})$ — оптимальное решение задачи (26)–(28), то x^*— оптимальное решение (24), (25).

Доказательство. Докажем эквивалентность оптимизационных задач (24), (25) и (26)–(28) согласно [29, с. 131], т.е. покажем, что оптимальные решения задач одновременно существуют или не существуют, установим соответствия между оптимальными решениями и докажем, что в случае существования решений оптимальные значения целевых функций совпадают. Для этого достаточно указать для каждой допустимой точки одной задачи допустимую точку другой с не бо́льшим значением целевой функции.

Пусть $(x, \{z_{k\omega}\})$ — допустимое решение задачи (26)–(28). Если $f_k(x,\omega) < 0$, то из (28) следует, что $z_{k\omega} = 1$. В противном случае (28) не накладывает ограничений на $z_{k\omega} \in \{0,1\}$. Таким образом,

$$p_k(x, z_k) = \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega z_{k\omega} \ge \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega I_{\{f_k(x,\,\omega)<0\}} = P_k(x),$$

и в силу монотонности функций $G_j(x, \pi_1, \ldots, \pi_K)$ по аргументам $\pi_1 \ge 0, \ldots, \pi_K \ge 0$ имеет место

$$G_j(x, p_1(x, z_1), \ldots, p_K(x, z_K)) \ge G_j(x, P_1(x), \ldots, P_K(x)).$$

Таким образом, каждому допустимому решению $(x, \{z_{k\omega}\})$ задачи (26)–(28) поставим в соответствие допустимое решение x задачи (24), (25) с не бо́льшим значением целевой функции $G_0(x, P_1(x), \ldots, P_K(x)) \le G_0(x, p_1(x, z_1), \ldots, p_K(x, z_K))$.

Наоборот, пусть x — произвольное допустимое решение задачи (24), (25). Вычислим $z_{k\omega} = I_{\{f_k(x,\,\omega)<0\}}$ для всех k и ω. Очевидно, что

$$G_j(x, P_1(x), \ldots, P_K(x)) = G_j(x, p_1(x, z_1), \ldots, p_K(x, z_K)).$$

Таким образом, каждому допустимому решению x задачи (24), (25) поставим в соответствие допустимое решение $(x, \{z_{k\omega} = I_{\{f_k(x,\,\omega)<0\}}\})$ задачи (26)–(28) с не бо́льшим значением целевой функции.

Отсюда следует, что задачи (24), (25) и (26)–(28) одновременно либо имеют, либо не имеют допустимых решений.

В условиях теоремы в задаче (24), (25) функции $I_{\{f_k(x,\,\omega)<0\}}$, $G_j(x, P_1(x), \ldots, P_K(x))$, $j = 0,1,\ldots,m$, полунепрерывны снизу, а множество X компактно. Поэтому если допустимое решение задачи (24), (25) существует, то существует и ее оптимальное решение x^*. В задаче (26)–(28) функции $(f_k(x,\omega) + M_{k\omega} z_{k\omega})$ и $G_j(x, p_1(x, z_1), \ldots, p_K(x, z_K))$ непрерывны, а множество X и множество возможных значений $\{z_{k\omega}\}$ компактны. Поэтому если допустимое решение задачи (26)–(28) существует, то существует и ее оптимальное решение $(x^*, \{z^*_{k\omega}\})$. Отсюда в силу установленного соответствия допустимых решений $x \leftrightarrow (x, \{z_{k\omega} = I_{\{f_k(x,\,\omega)<0\}}\})$ следует, что в случае допустимости задач (24), (25) и (26)–(28) оптимальные значения их целевых функций совпадают. Кроме того, если x^* — оптимальное решение задачи (24), (25), то $(x^*, z^*_{k\omega} = I_{\{f_k(x^*,\,\omega)<0\}})$ — оптимальное решение задачи (26)–(28). Наоборот, если $(x^*, \{z^*_{k\omega}\})$ – оптимальное решение задачи (26)–(28), то x^* — оптимальное решение задачи (24), (25). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Roy A.D. Safety first and the holding of assets // Econometrica. — 1952. — **20**. — P. 431–449.
2. Markowitz H. Portfolio selection // The J. of Finance. — 1952. — **7**, N 1. — P. 77–91.
3. Markowitz H.M. Portfolio selection. Efficient diversification of investments. — New York: John Wiley & Sons. — London: Chapman & Hall, 1959. — 344 p.
4. Telser L.G. Safety first and hedging // Review of Economic Studies. — 1955/56. — **23**. — P. 1–16.
5. Kataoka S. A stochastic programming model // Econometrica. — 1963. — **31**. — P. 181–196.
6. Bawa V.S. Safety first, stochastic dominance, and optimal portfolio choice // J. of Financial and Quantitative Analysis. — 1978. — **13**. — P. 255–271.
7. Arzac E.R., Bawa V.S. Portfolio choice and equilibrium in capital markets with safety first investors // J. of Financial Economics. — 1977. — **4**. — P. 277–288.
8. Li D., Chan T.F., Ng W.L. Safety-first dynamic portfolio selection // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. — 1998. — **4**. — P. 585–600.
9. Jansen D.W., Koedijk K.G., de Vries C.G. Portfolio selection with limited downside risk // J. of Empirical Finance. — 2000. — **7**. — P. 247–269.

10. Goodall T. Adequate decision rules for portfolio choice problems. — New York: PALGRAVE, 2002. — 114 p.

11. Haque M., Hassan M.K., Varela O. Safety-first portfolio optimization for US investors in emerging global, Asian and Latin American markets // Pacific-Basin Finance Journal. — 2004. — **12.** — P. 91–116.

12. Haque M., Varela O., Hassan M.K. Safety-first and extreme value bilateral U.S. – Mexican portfolio optimization around the peso crisis and NAFTA in 1994 // The Quarterly Review of Economics and Finance. — 2007. — **47**. — P. 449–469.

13. Kibzun A.I., Kan Y.S. Stochastic programming problems with probability and quantile functions. — Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, 1996. — 301 p.

14. Кибзун А.И., Кузнецов Е.А. Оптимальное управление портфелем // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 9. — С. 101–113.

15. Кибзун А.И., Кузнецов Е.А. Позиционная стратегия формирования инвестиционного портфеля // Там же. — 2003. — № 1. — С. 151–166.

16. Kibzun A.I., Lepp R. Discrete approximation in quantile problem of portfolio selection // Stochastic Optimization: Algorithms and Applications / S. Uryasev and P.M. Pardalos, Eds. — Dordrecht: Kluwer, 2001. — P. 119–133.

17. Kan Yu.S. Application of the quantile optimization to bond portfolio selection // Stochast. Optim. Techniques: Numerical Methods and Technical Appl. / K. Marti, Ed. — Berlin: Springer, 2002. — **513**. — P. 285–308.

18. Григорьев П.В., Кан Ю.С. Оптимальное управление инвестиционным портфелем по отношению к квантильному критерию // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 2. — С. 179–197.

19. Кан Ю.С., Краснопольская А.Н. Выбор портфеля с фиксированной доходностью // Там же. — 2006.— № 4. — С. 97–104.

20. Баюк Д. Русский регресс. Остается ли массовый отток ученых за рубеж громадной проблемой для России? // Троицкий вариант. — 2009. — № 22(41). — С. 6–7.

21. Бек У. Общество риска. На пути к другому модерну / Пер. с нем. — М.: Прогресс-Традиция, 2000. — 384 с.

22. Raik E. On the stochastic programming problem with the probability and quantile functionals // Изв. АН ЭССР, Физика-Математика. — 1972. — **21**, № 2. — P. 142–148.

23. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczynski A. Lectures on stochastic programming: Modeling and theory. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 436 p.

24. Norkin V. Global optimization of probabilities by the stochastic branch and bound method / Stochastic optimization: Numerical methods and technical applications / Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 458. — Berlin: Springer, 1998. — P. 186–201.

25. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. — М. : Наука, 1976. — 240 с.

26. Ruszczynski A., Shapiro A. Stochastic Programming. — Amsterdam: Elsvier, 2003. — 688 p.

27. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969. — 368 с.

28. Prigent J.-L. Portfolio optimization and performance analysis. — Chapman & Hall/CRC, 2007. — 434 p.

29. Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И. Методы невыпуклой оптимизации. — М.: Наука, 1987. — 280 с.

Поступила 02.03.2010