УДК 519.21

А.А. ФОМИН-ШАТАШВИЛИ, Т.А. ФОМИНА, А.Д. ШАТАШВИЛИ

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР, ПОРОЖДЕННЫХ РЕШЕНИЯМИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ВОЗМУЩЕННЫХ ГАУССОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ. II

Ключевые слова: *эволюционные дифференциальные уравнения, эволюционное семейство ограниченных операторов, плотность Радона–Никодима, эквивалентность вероятностных мер, производящий оператор, оператор Гильберта–Шмидта.*

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Здесь в гильбертовом пространстве рассматриваются два нелинейных эволюционных дифференциальных уравнения, возмущенных одним и тем же гауссовским процессом, но разными нелинейными слагаемыми и в определенном смысле разными линейными неограниченными эволюционными операторами. Выводятся достаточные условия на коэффициенты рассматриваемых уравнений, обеспечивающие существование и единственность решений этих уравнений, эквивалентность мер, порожденных решениями этих уравнений, а также в явном виде вычисляются соответствующие плотности Радона–Никодима в терминах коэффициентов рассматриваемых уравнений.

Обозначим $\{\Omega, \wp, P\}$ фиксированное вероятностное пространство, H— сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\|$, $x, y \in H$. Далее $L_2 = L_2\{[0, a], H\}$ будем обозначать пространство функций, определенных на отрезке $[0, a]$ со значениями из H и интегрируемых со своим квадратом по норме H. Пространство L_2 является гильбертовым. Обозначим в пространстве L_2 скалярное произведение $(f, g)_L$ и норму $\|f\|_L$, $f, g \in L_2$, и введем их таким образом:

$$(f, g)_L = \int_0^a (f(t), g(t))dt, \quad \|f\|_L = \int_0^a |f(t)|^2\, dt, \tag{1}$$

где $f(t), g(t) \in H$.

Пусть, далее, $B(t, s)$ обозначает операторную функцию, действующую при каждом $t, s \in [0, a]$ в пространстве H. Обозначим $|B(t, s)|$ норму операторной функции в пространстве H. Известно, что операторная функция $B(t, s)$ как ядро порождает в пространстве L_2 интегральный оператор $\boldsymbol{B}$ по следующему принципу:

$$(\boldsymbol{B}\varphi)_t = \int_0^a B(t, s)\varphi(s)ds, \quad \varphi \in L_2. \tag{2}$$

Обозначим в L_2 норму оператора $\boldsymbol{B}$ через $|\boldsymbol{B}|_L$ по следующему принципу:

$$|\boldsymbol{B}|_L^2 = \int_0^a\int_0^a |B(t, s)|^2\, dtds < \infty. \tag{3}$$

Норма оператора, определенная по формуле (3), называется гильберто-шмидтовской нормой, а оператор $\boldsymbol{B}$, обладающий такой нормой, называется оператором Гильберта–Шмидта.

В гильбертовом пространстве H рассмотрим два нелинейных эволюционных дифференциальных уравнения:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} - A(t)y_1(t) + A_1(t)y_1(t) + f_1(t,\ y_1(t)) = \xi(t)\,, \tag{4}$$

$$0 \le t \le a\,,\ \ y_1(0) = \xi(0) = 0\ \ (\mathrm{mod}\, P)\,;$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} - A(t)y_2(t) + A_2(t)y_2(t) + f_2(t,\ y_2(t)) = \xi(t)\,, \tag{5}$$

$$0 \le t \le a\,,\ \ y_2(0) = \xi(0) = 0\ \ (\mathrm{mod}\, P)\,,$$

для которых предполагается следующее.

Условие 1: а) операторы $A(t)$ являются семейством линейных, неограниченных операторов с плотной, независимой от t областью определения $D(A) \subseteq H$;

б) операторы $A(t)$ являются производящими операторами эволюционного семейства $U(t, s)$ ограниченных операторов при $0 \le t, s \le a$, действующих в H, сильно непрерывно зависящих от t и s и удовлетворяющих условию

$$\int_0^a \int_0^a |U(t, s)|^2\, dtds < \infty; \tag{6}$$

отсюда видно, что по определению (2) и (3) интегральный оператор $\boldsymbol{U}$ в пространстве L_2, порожденный ядром $U(t, s)$, является оператором Гильберта-Шмидта;

в) линейные операторы $A_i(t)$, $i = 1, 2$, являются неограниченными операторами с одинаковой плотной, независимой от t областью определения $D(A) \subseteq H$, но такими, что операторы

$$U_i(t, s) = U(t, s)A_i(s)\,,\ \ i = 1, 2\,, \tag{7}$$

при каждом $0 \le t, s \le a$ являются ограниченными, а интегральный оператор $\boldsymbol{U}_i$, $i = 1, 2$, порожденный ядром $U_i(t, s)$, $i = 1, 2$, является оператором Гильберта–Шмидта, т.е.

$$\int_0^a \int_0^a |U_i(t, s)|^2\, dtds < \infty,\ \ i = 1, 2\,; \tag{8}$$

г) число -1 не принадлежит спектру операторов $U_i(t, s)$, $i = 1, 2$.

Условие 2. $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс, определенный на отрезке $[0, a]$ со значениями из H с нулевым математическим ожиданием $M\xi(t) = 0$, а его корреляционная операторная функция $R_\xi^2(t, s)$, $0 \le t, s \le a$, удовлетворяет условию

$$\int_0^a |R_\xi^2(t, t)|\, dt < \infty. \tag{9}$$

Иными словами, операторная функция $R_\xi^2(t, s)$, действующая в H как ядро в пространстве L_2, порождает ядерный корреляционный оператор $\boldsymbol{R}_\xi^2$ гауссовского случайного элемента $\xi \in L_2$.

Пусть корреляционная операторная функция представима в виде

$$R_\xi^2(t, s) = \int_0^a R_\xi(t, u) R_\xi^*(u, s)\, du\,, \tag{10}$$

где операторная функция $R_\xi(t, s)$ и сопряженная к ней $R_\xi^*(t, s)$ при каждом $0 \le t, s \le a$ как ядра порождают в пространстве L_2 интегральные операторы Гильберта–Шмидта соответственно $\boldsymbol{R}_\xi$ и $\boldsymbol{R}_\xi^*$.

Условие 3. Нелинейные функции $f_i(t, y_i(t))$, $i = 1, 2$, определенные на $[0, a] \times H$, принимают свои значения из H, являются интегрируемыми функциями со своим квадратом по норме H для всех $y_i(t) \in H$, $i=1,2$, и дифференцируемыми по y_i, $i=1,2$. При этом производные $f'_{y_i}(t, y_i(t))$ для всех $t \in [0; a]$ являются операторами Гильберта–Шмидта, действующими в H.

Как известно [2, 3], при выполнении условий 1–3 уравнения (4) и (5) имеют единственные решения $(\mathrm{mod}\, P)$.

Если в пространстве L_2 формально связать корреляционные операторы $\boldsymbol{R}_x^2$ и $\boldsymbol{R}_\xi^2$ гауссовских элементов x и ξ соответственно соотношением

$$\boldsymbol{R}_x^2 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_\xi^2 \boldsymbol{C}^*, \tag{11}$$

то его можно расписать более подробно:

$$\boldsymbol{R}_x^2 = \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{R}_x^* = \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_\xi \boldsymbol{R}_\xi^* \boldsymbol{C}^*, \tag{12}$$

отсюда имеем

$$\boldsymbol{R}_x = \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_\xi, \ \boldsymbol{R}_x^* = \boldsymbol{R}_\xi^* \boldsymbol{C}^*. \tag{13}$$

Одновременно с нелинейными дифференциальными уравнениями (4) и (5) рассмотрим линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_1(t)}{dt} - A(t)x_1(t) + A_1(t)x_1(t) = \xi(t), \tag{14}$$

$$0 \le t \le a, \ x_1(0) = \xi(0) = 0 \ (\mathrm{mod}\, P);$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} - A(t)x_2(t) + A_2(t)x_2(t) = \xi(t), \tag{15}$$

$$0 \le t \le a, \ x_2(0) = \xi(0) = 0 \ (\mathrm{mod}\, P),$$

где семейство операторов $A(t)$ и $A_i(t)$, $i=1,2$, а также гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяют условиям 1 и 2 настоящей статьи.

Как известно из теории эволюционных дифференциальных уравнений [4], уравнения (14) и (15) могут быть представлены в следующем виде:

$$x_1(t) + \int_0^a U(t, s)A_1(s)x_1(s)ds = \int_0^a U(t, s)\xi(s)ds \tag{16}$$

и

$$x_2(t) + \int_0^a U(t, s)A_2(s)x_2(s)ds = \int_0^a U(t, s)\xi(s)ds. \tag{17}$$

В пространстве L_2 уравнения (16) и (17) записываются как линейные преобразования:

$$x_1 + \boldsymbol{U}_1 y = \boldsymbol{U}\xi, \tag{18}$$

$$x_2 + \boldsymbol{U}_2 x = \boldsymbol{U}\xi. \tag{19}$$

Отсюда следует для (18)

$$x_1 = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1)^{-1}\boldsymbol{U}\xi \tag{20}$$

и аналогично для (19)

$$x_2 = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_2)^{-1}\boldsymbol{U}\xi. \tag{21}$$

Таким образом, выражения (20) и (21) в явном виде определяют решения уравнений (18) и (19) при условии, что операторы $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_i)^{-1}$, $i=1,2$, существуют, ограничены и определены на всем пространстве L_2. Из теории функционального анализа [5] условия 1 обеспечивают обратимость операторов $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_i)$, $i=1,2$, а также ограниченность и непрерывность их обратных операторов. Следовательно, выражения (20) и (21) имеют смысл. Кроме того, поскольку уравнения (14) и (15), а также (18) и (19) являются линейными, а случайный процесс $\xi(t)$ и случайный элемент ξ — гауссовский случайный процесс и гауссовский случайный элемент со значениями соответственно в пространствах H и L_2, случайные процессы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются гауссовскими случайными процессами в H, а случайные элементы x_1 и x_2 — соответственно гауссовскими случайными элементами в L_2. Обозначим μ_{x_1} и μ_{x_2} меры, порожденные случайными процессами $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в пространстве H (т.е. случайными элементами x_1 и x_2 в пространстве L_2). Если будут найдены условия, обеспечивающие эквивалентность мер μ_{x_1} и μ_{x_2}, вычислена соответствующая плотность Радона–Никодима $\frac{d\mu_{x_1}}{d\mu_{x_2}}(z)$, то, используя теорему 1 или теорему 2 из работы [1], можно найти условия, обеспечивающие эквивалентность мер μ_{y_1} и μ_{y_2}, порожденных случайными процессами $y_1(t)$ и $y_2(t)$ и вычислить соответствующую плотность Радона–Никодима $\frac{d\mu_{y_1}}{d\mu_{y_2}}(z)$ по формуле

$$\lambda(z)=\frac{d\mu_{y_1}}{d\mu_{y_2}}(z)=\frac{d\mu_{y_1}}{d\mu_{x_1}}(z)\frac{d\mu_{x_1}}{d\mu_{x_2}}(z)\frac{d\mu_{x_2}}{d\mu_{y_2}}(z) \tag{22}$$

или, если

$$\lambda_1(z)=\frac{d\mu_{y_1}}{d\mu_{x_1}}(z),\ \lambda_2(z)=\frac{d\mu_{y_2}}{d\mu_{x_2}}(z),\ \lambda_3(z)=\frac{d\mu_{x_1}}{d\mu_{x_2}}(z), \tag{23}$$

вычислить по формуле

$$\lambda(z)=\lambda_1(z)\lambda_2^{-1}(z)\lambda_3(z)=\lambda_1(z)\widetilde{\lambda}_2(z)\lambda_3(z), \tag{24}$$

где положено

$$\widetilde{\lambda}_2(z)=\lambda_2^{-1}(z)=\frac{d\mu_{x_2}}{d\mu_{y_2}}(z). \tag{25}$$

С этой целью следует воспользоваться результатами работы [6]. В связи с этим проведем некоторые вычисления для доказательства эквивалентности мер μ_{x_1} и μ_{x_2}, используя плотность $\frac{d\mu_{x_1}}{d\mu_{x_2}}$, которая является сомножителем формулы (22). Воспользовавшись обозначениями работы [6], получаем

$$x_1=\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{U}\xi, \tag{26}$$

$$x_2=\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{U}\xi, \tag{27}$$

где $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_2$ соответственно.

Следуя той же методике, определим корреляционные операторы $\boldsymbol{R}_{x_1}^2$ и $\boldsymbol{R}_{x_2}^2$ гауссовских случайных элементов x_1 и x_2:

$$\boldsymbol{R}_{x_1}^2=\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}_\xi^2\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{B}_1^{-1})^*, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{R}_{x_2}^2=\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}_\xi^2\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{B}_2^{-1})^*. \tag{29}$$

Корреляционные операторы $\boldsymbol{R}_{x_1}^2$ и $\boldsymbol{R}_{x_2}^2$ как интегральные операторы в пространстве H порождают ядра $R_{x_1}^2(t,s)$ и $R_{x_2}^2(t,s)$, которые являются корреляционными операторными функциями гауссовских процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно.

Далее необходимо вычислить разность $\boldsymbol{R}_{x_1}^2 - \boldsymbol{R}_{x_2}^2$, а также произведение $\boldsymbol{R}_{x_1}^2 (\boldsymbol{R}_{x_2}^2)^{-1}$. Если ввести факторизованные представления корреляционных операторов $\boldsymbol{R}_{x_1}^2$ и $\boldsymbol{R}_{x_2}^2$:

$$\boldsymbol{R}_{x_1}^2 = \boldsymbol{R}_{x_1} (\boldsymbol{R}_{x_1})^*, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{R}_{x_2}^2 = \boldsymbol{R}_{x_2} (\boldsymbol{R}_{x_2})^*, \tag{31}$$

то, используя (28) и (29), получим

$$\boldsymbol{R}_{x_1}^2 - \boldsymbol{R}_{x_2}^2 = \boldsymbol{R}_{x_2} \boldsymbol{C} (\boldsymbol{R}_{x_2})^*, \tag{32}$$

где

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}_{x_2}^{-1} \boldsymbol{B}_1^{-1} \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{R}_{x_2} (\boldsymbol{R}_{x_2})^* \boldsymbol{B}_2^* (\boldsymbol{B}_1^{-1})^* (\boldsymbol{R}_{x_2}^{-1})^* - \boldsymbol{I}. \tag{33}$$

Очевидно, что условия 1 и 2 настоящей статьи обеспечивают условия теоремы 1 из работы [6]. Поэтому оператор $\boldsymbol{C}$ в формуле (33) является оператором Гильберта–Шмидта. Аналогично можно посчитать произведение операторов $\boldsymbol{R}_{x_1} \cdot \boldsymbol{R}_{x_2}^{-1} = \boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}_{x_1} \cdot \boldsymbol{R}_{x_2}^{-1} = \boldsymbol{B}_1^{-1} \boldsymbol{U} \boldsymbol{R}_\xi^2 \boldsymbol{U}^* (\boldsymbol{B}_1^{-1})^* (\boldsymbol{B}_2^{-1} \boldsymbol{U} \boldsymbol{R}_\xi^2 \boldsymbol{U}^* (\boldsymbol{B}_2^{-1})^*)^{-1} =$$

$$= \boldsymbol{B}_1^{-1} \boldsymbol{Y} (\boldsymbol{B}_1^{-1})^* \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{Y}^{-1} \boldsymbol{B}_2^*, \tag{34}$$

где

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U} \boldsymbol{R}_\xi^2 \boldsymbol{U}^*. \tag{35}$$

Таким образом, имеем

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{B}_1^{-1} \boldsymbol{Y} (\boldsymbol{B}_1^{-1})^* \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{Y}^{-1} \boldsymbol{B}_2^*. \tag{36}$$

Следовательно, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть в гильбертовом пространстве H заданы два линейных эволюционных дифференциальных уравнения (14) и (15) с заданными начальными условиями, для которых выполняются условия 1 и 2 настоящей статьи. Тогда в выражении (32) оператор $\boldsymbol{C}$, определенный в (33), на основании теоремы 1 из работы [6] является оператором Гильберта–Шмидта. Поэтому условие (32) в силу теоремы Далецкого (см. [10]) обеспечивает эквивалентность мер μ_{x_1} и μ_{x_2}, а их плотность Радона–Никодима $\frac{d\mu_{x_1}}{d\mu_{x_2}}(z)$ вычисляется по формуле (см. теорему 1 из [6])

$$\lambda_2(z) = \frac{d\mu_{x_1}}{d\mu_{x_2}}(z) = \sqrt{\widetilde{\det}\, \boldsymbol{L}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left\langle (\boldsymbol{L} - \boldsymbol{I})\, z, z \right\rangle \right\}, \quad z \in L_2, \tag{37}$$

или

$$\lambda_2(z) = \frac{d\mu_{x_1}}{d\mu_{x_2}}(z) = \sqrt{\widetilde{\det}\, \boldsymbol{L}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_0^a \left\langle [L(t, s) z(s) - z(s),\, dz(y)] \right\rangle \right\}, \tag{38}$$

где $L(t, s)$ — ядро, порожденное интегральным оператором $\boldsymbol{L}$, определенным по формуле (36), символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает расширенный стохастический интеграл в гильбертовом пространстве $L_2 = L_2\{[0; a], H\}$.

Рассмотрим теперь системы дифференциальных уравнений (4) и (14) с заданными начальными условиями (5), (15). Необходимо найти условия, обеспечивающие эквивалентность мер μ_{y_1}, μ_{x_1} и μ_{y_2}, μ_{x_2}, а также вычислить соответствующие плотности $\frac{d\mu_{y_1}}{d\mu_{x_1}}(z)$ и $\frac{d\mu_{y_2}}{d\mu_{x_2}}(z)$ с учетом выполнения условий 1–3. Указанные системы можно записать в следующем виде:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} - A(t)y_i(t) + A_i(t)y_i(t) + f_i(t, y_i(t)) = \xi(t), \quad i = 1, 2, \tag{39}$$

$$0 \le t \le a, \quad y_i(0) = \xi(0) = 0 \pmod P; \tag{40}$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} - A(t)x_i(t) + A_i(t)x_i(t) = \xi(t), \quad i = 1, 2, \tag{41}$$

$$0 \le t \le a, \quad x_i(0) = \xi(0) = 0 \pmod P, \tag{42}$$

где операторы $A(t)$, $A_i(t)$, $i = 1, 2$, нелинейные функции $f_i(t, y_i(t))$, $i = 1, 2$, и гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяют условиям 1–3. Применив к уравнениям (39) и (41) известные методы из теории эволюционных дифференциальных уравнений [4], запишем их в виде

$$y_i(t) + \int_0^a U(t, s)A_i(s)y(s)ds +$$

$$+ \int_0^a U(t, s)f_i(s, y_i(s))ds = \int_0^a U(t, s)\xi(s)ds, \quad i = 1, 2, \tag{43}$$

и

$$x_i(t) + \int_0^a U(t, s)A_i(s)x(s)ds = \int_0^a U(t, s)\xi(s)ds, \quad i = 1, 2. \tag{44}$$

В пространстве L_2 уравнения (43) и (44) можно записать так:

$$y_i + \boldsymbol{U}_i y_i + \boldsymbol{U}_i f_i(\cdot, y_i) = \boldsymbol{U}\xi, \quad i = 1, 2, \tag{45}$$

и

$$x_i + \boldsymbol{U}_i x_i = \boldsymbol{U}\xi, \quad i = 1, 2. \tag{46}$$

Проводя аналогичные, как и в работе [1], рассуждения, окончательно вместо двух уравнений (45) и (46) получим одно нелинейное преобразование

$$y_i + (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_i)^{-1}\boldsymbol{U} f_i(\cdot, y_i) = x_i, \quad i = 1, 2. \tag{47}$$

При этом если число -1 не принадлежит спектрам операторов $\boldsymbol{U}_i$, $i = 1, 2$, то операторы $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_i)$, $i = 1, 2$, обратимы и их обратные операторы $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_i)^{-1}$, $i = 1, 2$, непрерывны, ограничены и определены на всем гильбертовом пространстве L_2. Кроме того, поскольку по условию 1*б* и формуле (6) оператор $\boldsymbol{U}$ является оператором Гильберта–Шмидта, то и операторы

$$\boldsymbol{B}_i = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_i)^{-1}\boldsymbol{U}, \quad i = 1, 2, \tag{48}$$

являются операторами Гильберта-Шмидта (см. [5]).

Из преобразования (46) следует, что элементы $x_i \in L_2$, $i = 1, 2$, являются гауссовскими случайными элементами. Действительно, имеем

$$x_i = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_i)^{-1}\boldsymbol{U}\xi = \boldsymbol{B}_i\xi, \quad i = 1, 2. \tag{49}$$

Так как ξ — гауссовский элемент в L_2, а $\boldsymbol{B}_i$ — линейные операторы, действующие в L_2, то очевидно, что x_i, $i = 1, 2$, — гауссовские элементы в L_2. Их корреляционные операторы определяются, как и выше, по формуле

$$\boldsymbol{R}_{x_i}^2 = \boldsymbol{R}_{x_i} \boldsymbol{R}_{x_i}^* = \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{R}_\xi \boldsymbol{R}_\xi^* \boldsymbol{B}_i^*, \; i = 1, 2 . \tag{50}$$

Отсюда имеем

$$\boldsymbol{R}_{x_i} = \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{R}_\xi \text{ и } \boldsymbol{R}_{x_i}^* = \boldsymbol{R}_\xi^* \boldsymbol{B}_i^*, \; i = 1, 2 . \tag{51}$$

Из формул (47) и (48) следует

$$y_i + \boldsymbol{B}_i f_i(\cdot, y_i) = x_i, \; i = 1, 2, \tag{52}$$

или

$$S_i y_i : \; y_i + \boldsymbol{R}_{x_i} G_i(\cdot, y_i) = x_i, \; i = 1, 2, \tag{53}$$

где положено

$$\boldsymbol{B}_i f_i(\cdot, y_i) = \boldsymbol{R}_{x_i} G_i(\cdot, y_i), \; i = 1, 2 . \tag{54}$$

Очевидно, что при выполнении условия 3 функции $G_i(\cdot, y_i)$, $i = 1, 2$, дифференцируемы по y_i, а операторы $\boldsymbol{G}'_{y_i}(\cdot, y_i)$, $i = 1, 2$, являются операторами Гильберта–Шмидта. Если при этом известно, что функции $G_i(\cdot, y_i)$ принимают свои значения из пространства $R_{x_i} L_2$, $i = 1, 2$, соответственно, то уравнения (54) однозначно разрешимы относительно функции $G_i(\cdot, y_i)$, т.е.

$$G_i(\cdot, y_i) = \boldsymbol{R}_{x_i}^{-1} \boldsymbol{B}_i f_i(\cdot, y_i), \; i = 1, 2 . \tag{55}$$

Если использовать другой метод, как это было сделано в первой части данной статьи (см. [1]), то можно избежать этого ограничения. В этом случае следует наложить на функции $f_i(\cdot, y_i)$ дополнительные условия. По ходу будет доказана обратимость преобразований S_i, $i = 1, 2$, и существование преобразований $T_i = S_i^{-1}$, где T_i будут нелинейными преобразованиями гауссовских случайных элементов x_i, $i = 1, 2$, и определятся в виде

$$T_i x_i : \; x_i + \boldsymbol{R}_{x_i} \overline{G}_i(\cdot, y_i) = y_i, \; i = 1, 2, \tag{56}$$

где функции $\overline{G}_i(\cdot, y_i)$ следуют из соотношения

$$G_i(\cdot, x_i) = -\overline{G}_i(\cdot, Tx_i), \; i = 1, 2 . \tag{57}$$

Для получения дополнительных условий на функции $f_i(\cdot, y_i)$, $i = 1, 2$, как и в [1] обратимся к результатам работы [7] и по той же методике в пространстве H получаем преобразования (53) и (56). Эти преобразования и формула (54) могут быть записаны в виде

$$(S_i y_i)_t : y_i(t) + \int_0^a R_{x_i}(t, s) G_i(s, y_i(s)) ds = x_i(t), \; i = 1, 2, \tag{58}$$

$$(T_i x_i)_t : \; x_i(t) + \int_0^a R_{x_i}(t, s) \overline{G}_i(s, x_i(s)) ds = y_i(t), \; i = 1, 2, \tag{59}$$

$$\int_0^a B_i(t, s) f_i(s, y(s)) ds = \int_0^a R_{x_i}(t, s) G_i(s, y_i(s)) ds, \; i = 1, 2, \tag{60}$$

$$G_i(t, x(t)) = -\overline{G}_i(t, Tx(t)), \; i = 1, 2, \tag{61}$$

где функции $B_i(t, s)$, $G_i(t, x_i(t))$, $\overline{G}_i(t, Tx_i(t))$, $i = 1, 2$, являются ядрами соответственно интегральных операторов $\boldsymbol{B}_i$, $\boldsymbol{G}_i(\cdot, x_i)$ и $\overline{\boldsymbol{G}}_i(\cdot, Tx_i)$. Из выражения (61) следует, что из существования функций $G_i(t, x_i(t))$ автоматически имеем и существование функций $\overline{G}_i(t, Tx_i(t))$ и наоборот. Ниже, используя метод, приведенный в первой части данной работы (см. [1]), получаем условия, обеспечивающие существование функций $G_i(t, y_i(t))$ и их производных $G'_{y_i}(t, y(t))$, $i=1,2$, а также их конструктивный вид. Действительно, обозначим $\{\varphi_k^{(i)}(t)\}$ и $\{\lambda_k^{(i)}\}$, $i=1,2$, собственные функции и собственные числа корреляционных операторных функций $R_{x_i}^2(t,s)$, которые допускают разложение

$$R_{x_i}^2(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^i\varphi_k^i(t)(\varphi_k^i(s),\cdot),\ i=1,2, \tag{62}$$

а «корнем квадратным» от этих функция является

$$R_{x_i}(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k^i}\,\varphi_k^i(t)(\varphi_k^i(s),\cdot),\ i=1,2. \tag{63}$$

Введем обозначения:

$$\psi_k^i(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^i}}\varphi_k^i(t),\ i=1,2. \tag{64}$$

Повторяя аналогичные выкладки, проведенные в [1], получаем следующее выражение для функций $G_i(t, y_i(\cdot))$ в виде ряда Фурье:

$$G_i(t, y_i(\cdot))=\sum_{k=1}^{\infty}G_k^i(y_i)\varphi_k^i(t),\ i=1,2, \tag{65}$$

коэффициенты Фурье $G_k^i(y)$ определяются из соотношения

$$G_k^i(y)=\int_0^a(b_i(t, y_i(\cdot)),\psi_k(t))dt,\ i=1,2, \tag{66}$$

где

$$b_i(t, y_i(\cdot))=\int_0^a B_i(t,s)f_i(t, y_i(s))ds,\ i=1,2. \tag{67}$$

Чтобы функции $G_i(t, y_i(\cdot))$ существовали, необходима сходимость рядов (65), а для этого достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}(G_k^i(y))^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^a(b_i(t, y_i(\cdot)),\psi_k^i(t))dt\right)^2,\ i=1,2, \tag{68}$$

или, окончательно, сходились ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^a(b_i(t, y_i(\cdot)),\psi_k^i(t))dt\right)^2<\infty,\ i=1,2. \tag{69}$$

Рассуждая аналогично относительно существования и ограниченности интегральных операторов $\boldsymbol{G}'_{y_i}(\cdot, y_i)$ в L_2, получаем следующее:

$$(\boldsymbol{G}'_{y_i}(\cdot,\ y_i)z)_t=\int_0^a K_i(t,s,y_i(\cdot)z(s)ds,\ i=1,2, \tag{70}$$

где $K_i(t,s,y_i(\cdot))$, $i=1,2$, — ядра операторов $\boldsymbol{G}'_{y_i}(\cdot, y_i)$.

Формально из соотношений (65) и (66), продифференцировав выражение (65), можно записать

$$(\boldsymbol{G}'_{y_i}(\cdot,\ y_i)z)_t=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^a(b'_{y_i}(s, y_i(\cdot))z(s),\psi_k^i(s))ds\,\varphi_k^i(t),\ i=1,2. \tag{71}$$

С учетом (70) имеем

$$\int_0^a K_i\ (t, s, y_i\ (\cdot) z(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a (b'^{*}_{y_i} (s, y_i\ (\cdot)) \psi_k (s), z(s)) ds \varphi_k (t)\ ,\ i = 1, 2\ . \quad (72)$$

Таким образом, для существования операторов $\boldsymbol{G}'_{y_i}(\cdot, y_i)$, их ограниченности, справедливости дифференцирования ряда в правой части формулы (65) достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a | b'_{y_i} (s, y_i\ (\cdot)) \psi_k^i (s)|^2 ds < \infty\ ,\ i = 1, 2\ . \quad (73)$$

Далее, в пространстве L_2 вводим интегральные операторы

$$\boldsymbol{F}_i(\cdot, \boldsymbol{y}_i) = \boldsymbol{G}'_{y_i}(\cdot, y_i)\, \boldsymbol{R}^2_{x_i} \boldsymbol{G}'^{*}_{y_i}(\cdot, y_i)\ ,\ i = 1, 2\ , \quad (74)$$

$$\boldsymbol{C}_i(\cdot, y_i) = \boldsymbol{R}_{x_i} \boldsymbol{G}'_{y,i}(\cdot, y_i) + \boldsymbol{G}'^{*}_{y,i}(\cdot, y_i)\, \boldsymbol{R}_{x_i} +$$
$$+ \boldsymbol{R}_{x_i} \boldsymbol{G}'_{y,i}(\cdot, y_i)\, \boldsymbol{G}'^{*}_{y_i}(\cdot, y_i)\, \boldsymbol{R}_{x_i}\ ,\ i = 1, 2\ , \quad (75)$$

которые в пространстве H порождают соответственно ядра $F_i(t, s, y_i)$ и $C_i(t, s, y_i)$, $i = 1, 2$. С учетом (74) и (75) функции $F_i(t, s, y_i)$ и $C_i(t, s, y_i)$ определяются из соотношений

$$F_i(t, s, y_i) = \int_0^a \int_0^a K_i(t, u, y_i) R^2_{x_i}(u, v) K_i^{*}(v, s, y_i) du dv,\ i = 1, 2\ , \quad (76)$$

и

$$C_i(t, s, y_i) = \int_0^a R_{x_i}(t, u) K_i(u, s, y_i) du + \int_0^a K_i^{*}(t, u, y_i) R_{x_i}(u, s) du +$$
$$+ \int_0^a \int_0^a \int_0^a R_{x_i}(t, u) K_i(u, v, y_i) K_i^{*}(v, z, y_i) R_{x_i}(z, s) du dv dz\ ,\ i = 1, 2\ . \quad (77)$$

В силу того, что R_{x_i} является оператором Гильберта–Шмидта, а по условию (73) операторы $F_i(t, s, y_i)$ и $C_i^2(t, s, y_i)$, $i = 1, 2$, являются операторами Гильберта–Шмидта и ограничены, то они имеют ограниченный след, т.е.

$$\int_0^a \int_0^a \mathrm{Sp} F_i\ (t, s, y_i\ ) dt ds < \infty,\ i = 1, 2\ , \quad (78)$$

и

$$\int_0^a \int_0^a \mathrm{Sp} C_i^2 (t, s, y_i\ ) dt ds < \infty\ ,\ i = 1, 2\ . \quad (79)$$

Далее, как и ранее, необходимо доказать обратимость отображений S'_i, определенных по формуле

$$(S'_i z)_t : y_i\ (t) + \int_0^a B_i(t, s) f'_i(s, y_i\ (s)) ds = x_i\ (t)\ , \quad (80)$$

т.е. доказать существование и ограниченность преобразований

$$T'_i = S'^{-1}_i,\ i = 1, 2,\ | S'^{-1}_i(z)| = | T'_i(z)| < \infty,\ z \in L_2\ . \quad (81)$$

Для этого введем обозначения

$$A_i\ (t, s, y_i\ (\cdot)) = B_i(t, s) f_i\ (s, y_i\ (s))\ ,\ i = 1, 2\ , \quad (82)$$

откуда

$$A'_{y,i}(t, s, y_i\ (\cdot)) = B_i(t, s) f'_y(s, y_i\ (s))\ ,\ i = 1, 2\ , \quad (83)$$

и положим, что

$$|A'_{y,i}(t, s, y_i(\cdot))| < c_i < \infty, \quad i = 1, 2. \tag{84}$$

Тогда, используя методику, изложенную выше при доказательстве аналогичного утверждения в [1], получаем

$$|S_i'^{-1}(z)| = |T_i'(z)| < e^{ac_i} < \infty, \quad z \in L_2, \quad i = 1, 2, \tag{85}$$

что и требовалось доказать.

Для преобразования $T(x)$ введем в L_2 интегральные операторы $\overline{F}_i(t, s, x_i)$ и $\overline{C}_i(t, s, x_i)$, $i = 1, 2$, которые, учитывая формулу (57), определяются аналогично (76) и (77):

$$\overline{F}_i(t, s, x_i(\cdot)) = \int_0^a \int_0^a \overline{K}_i(t, u, x_i(\cdot)) R_{x_i}^2(u, v) K_i^*(v, s, x_i(\cdot)) du dv, \quad i = 1, 2, \tag{86}$$

и

$$\overline{C}_i(t, s, x_i(\cdot)) = \int_0^a R_{x_i}(t, u) \overline{K}_i(u, s, x_i) du + \int_0^a \overline{K}_i^*(t, u, x_i) R_{x_i}(u, s) du +$$

$$+ \int_0^a \int_0^a \int_0^a R_{x_i}(t, u) \overline{K}_i(u, v, x_i) \overline{K}_i^*(v, z, x_i) R_{x_i}(u, s) du dv dz, \quad i = 1, 2, \tag{87}$$

где функции $\overline{K}_i(t, u, x_i)$ и $\overline{K}_i^*(t, u, x_i)$ — ядра интегральных операторов $\overline{\boldsymbol{G}}'_{x,i}(\cdot, x_i)$ и $\overline{\boldsymbol{G}}'^*_{x,i}(\cdot, x_i)$ соответственно. Учитывая теперь соотношения (57), (69) и (73), можем утверждать, что операторные функции $\overline{F}_i(t, s, x_i)$ и $\overline{C}_i(t, s, x_i)$, $i = 1, 2$, существуют, ограничены и имеют ограниченный след

$$\int_0^a \int_0^a \mathrm{Sp} \overline{F}_i(t, s, x_i) dt ds < \infty, \quad i = 1, 2, \tag{88}$$

и

$$\int_0^a \int_0^a \mathrm{Sp} \overline{C}_i^2(t, s, x_i) dt ds < \infty, \quad i = 1, 2. \tag{89}$$

Обозначим $\{e_k^i(x_i)\}$ и $\{\widetilde{e}_k^i(x_i)\}$, $i = 1, 2$, множество собственных чисел операторов $C_i(t, s, x_i)$ и $\overline{C}_i(t, s, x_i)$ соответственно. Тогда (см. [7]) существуют выражения

$$D_i(x_i) = \left[\prod_{k=1}^{\infty} (1 + e_k^i(x_i)) e^{-c_k^i(x_i)} \right] \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \mathrm{Sp} C_i^2(t, s, x_i) dt ds \right\}, \quad i = 1, 2, \tag{90}$$

$$\widetilde{D}_i(x_i) = \left[\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \widetilde{e}_k^i(x_i)) e^{-\widetilde{c}_k^i(x_i)} \right] \exp \left\{ \int_0^a \int_0^a \mathrm{Sp} \overline{C}_i^2(t, s, x_i) dt ds \right\}, \quad i = 1, 2. \tag{91}$$

Далее для использования методики из работы [7] необходимо определить обобщенную случайную величину, так называемый «белый шум», в L_2 и с его помощью построить расширенные стохастические интегралы.

В гильбертовом пространстве H с помощью гауссовских процессов $x_i(t)$, $i = 1, 2$, и их корреляционных операторных функций $R_{x_i}^2(t, s)$, $i = 1, 2$, построим винеровские процессы $w_i(t)$, определенные на интервале $[0, a]$ со значениями из H, следующим образом (аналогично, как это было сделано в первой части данной работы):

$$x_i(t) = \int_0^a R_{x_i}(t, s) dw_i(s), \quad i = 1, 2. \tag{92}$$

С их помощью строим расширенные стохастические интегралы

$$\int_0^a \left\langle G_i(t, x_i(\cdot)), dw_i(t)\right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^a \int_0^a (G_i(t, x_i(\cdot)), \varphi_k^i(t))(x_i(s), \varphi_k^i(s))dtds -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^a \int_0^a (K_i(s, t, x_i(\cdot)) R_{x_i}(t, v)\varphi_k^i(v), \varphi_k^i(s))dsdtdv, \ i = 1, 2, \qquad (93)$$

и

$$\int_0^a \left\langle \overline{G}_i(t, x_i(\cdot)), dw_i(t)\right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^a \int_0^a (\overline{G}_i(t, x_i(\cdot)), \varphi_k^i(t))(x_i(s), \varphi_k^i(s))dtds -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^a \int_0^a (\overline{K}_i(s, t, x_i(\cdot)) R_{x_i}(t, v)\varphi_k^i(v), \varphi_k^i(s))dsdtdv, \ i = 1, 2, \qquad (94)$$

где ряды в правой части формул (93) и (94) сходятся по мерам μ_{x_i}, $i = 1, 2$, соответственно на основании условий (69) и (73), проводя необходимые оценки.

Таким образом, из проведенных выше исследований и полученных условий в соответствии с теоремой 1 из работы [7] нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть в гильбертовом пространстве H заданы две системы нелинейных и линейных эволюционных дифференциальных уравнений (39) и (41) с начальными условиями (40) и (42), для которых выполняются условия 1–3 настоящей статьи и, кроме того, условия (69), (73) и (84), где $B_i(t, s)$, $i = 1, 2$, — ядра интегральных операторов, определенных по формуле (48), а функции $b_i(t, y_i(t))$ и $A_i(t, s, y_i(\cdot))$ определяются из формул (67) и (82) соответственно. Тогда имеют место следующие утверждения.

Утверждение 2: а) преобразования S_i (58) и T_i (59) взаимно однозначны, обратимы и имеют единственные решения $y_i(t)$ и $x_i(t)$, $i = 1, 2$, которые также являются решениями дифференциальных уравнений (4), (5) и (14), (15) соответственно;

б) преобразования $S_i'(x)$, $i = 1, 2$, (81) всегда обратимы и существуют их обратные преобразования $(S_i')^{-1}(x) = T_i'(x)$;

в) вероятностные меры μ_{y_i} и μ_{x_i}, порожденные решениями $y_i(t)$ и $x_i(t)$, $i = 1, 2$, дифференциальных уравнений (4), (5) и (14), (15) соответственно, эквивалентны и их плотности Радона–Никодима вычисляются по формулам

$$\lambda_i(z) = \frac{d\mu_{y_i}}{d\mu_{x_i}}(z) = |D_i(z)| \times$$

$$\times \exp\left\{-\int_0^a \left\langle G_i(s, z(\cdot)), dw_i(s)\right\rangle - \frac{1}{2}\int_0^a \| G_i(s, z(\cdot))\|^2 ds\right\}, \ z \in L_2, \ i = 1, 2, \qquad (95)$$

$$\widetilde{\lambda}_i(z) = \frac{d\mu_{x_i}}{d\mu_{y_i}}(z) = |\widetilde{D}_i(z)| \times$$

$$\times \exp\left\{-\int_0^a \left\langle \overline{G}_i(s, z(\cdot)), dw_i(s)\right\rangle - \frac{1}{2}\int_0^a \| \overline{G}_i(s, z(\cdot))\|^2 ds\right\}, \ z \in L_2, \ i = 1, 2. \qquad (96)$$

Если, кроме того, известно, что имеют место утверждения

$$\int_0^a \mathrm{Sp} b_{z,i}'(t, z(\cdot))dt < \infty, \ i = 1, 2, \qquad (97)$$

то, используя результаты работ [8, 9], можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2, а также условие (97). Тогда имеют место все утверждения теоремы 2, а плотности Радона–Никодима вычисляются по формулам

$$\lambda_i(z)=\frac{d\mu_{y_i}}{d\mu_{x_i}}(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^a \operatorname{Sp} b'_{z,i}(t, z(t))dt-\int_0^a \left\langle G_i(s, z(\cdot)), dw_i(s)\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\int_0^a\int_0^a \operatorname{Sp}K_i(t, s, z(\cdot))R_{x_i}(s, t)dtds-\frac{1}{2}\int_0^a \|G_i(s, z(\cdot))\|^2 ds\right\},\quad z\in L_2,\quad i=1,2, \tag{98}$$

$$\widetilde{\lambda}_i(z)=\frac{d\mu_{x_i}}{d\mu_{y_i}}(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^a \operatorname{Sp} b'_{z,i}(t, z(t))dt-\int_0^a \left\langle \overline{G}_i(s, z(\cdot)), dw_i(s)\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\int_0^a\int_0^a \operatorname{Sp}\overline{K}_i(t, s, z(\cdot))R_{x_i}(s, t)dtds-\frac{1}{2}\int_0^a \|\overline{G}_i(s, z(\cdot))\|^2 ds\right\},\quad z\in L_2,\quad i=1,2, \tag{99}$$

где операторные функции $K_i(t, s, z(\cdot))$, $\overline{K}_i(t, s, z(\cdot))$, $i=1,2$, являются ядрами интегральных операторов $\boldsymbol{G}'_{z,i}(\cdot, z(\cdot))$, $\overline{\boldsymbol{G}}'_{z,i}(\cdot, z(\cdot))$, $i=1,2$, соответственно.

Теперь уже можно вернуться к главному вопросу настоящего раздела – задаче об эквивалентности вероятностных мер μ_{y_1} и μ_{y_2}, порожденных соответственно решениями дифференциальных уравнений (4) и (5).

После полученных результатов при исследовании систем дифференциальных уравнений (39), (40) и (41), (42), а также системы двух линейных дифференциальных уравнений (14) и (15), учитывая формулы (22), (23), (24) и (25), приходим к выводу, что для эквивалентности мер μ_{y_1} и μ_{y_2} достаточно, чтобы были эквивалентны меры μ_{y_i} и μ_{x_i}, $i=1,2$, а также эквивалентны меры μ_{x_1} и μ_{x_2}. Таким образом, полученные условия должны одновременно обеспечивать эквивалентность рассмотренных выше мер. Но условия, сформулированные в теоремах 1–3 данной работы, полностью обеспечивают эквивалентность рассмотренных выше мер, что позволяет окончательно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть в гильбертовом пространстве H заданы два нелинейных эволюционных дифференциальных уравнения: (4) и (5) и два линейных эволюционных дифференциальных уравнения: (14) и (15) с соответствующими начальными условиями. Сгруппируем рассматриваемые уравнения в виде систем (39), (40) и (41), (42), а также в виде системы (14) и (15). Если выполняются условия теоремы 1 и теоремы 2, то:

1) вероятностные меры μ_{y_i} и μ_{x_i}, $i=1,2$, эквивалентны (по теореме 2);

2) вероятностные меры μ_{x_1} и μ_{x_2} эквивалентны (по теореме 1);

3) вероятностные меры μ_{y_1} и μ_{y_2} эквивалентны (по формуле (22));

4) плотности Радона–Никодима для мер μ_{y_i} и μ_{x_i}, $i=1,2$, вычисляются по формуле (95) или (96), а для мер μ_{x_1} и μ_{x_2} — по формуле (37) или (38);

5) плотности Радона–Никодима для мер μ_{y_1} и μ_{y_2} существуют и вычисляются в явном виде по формуле (24) или (25):

$$\lambda(z)=\lambda_1(z)\,\lambda_2^{-1}(z)\,\lambda_3(z), \tag{100}$$

$$\lambda(z)=\lambda_1(z)\,\widetilde{\lambda}_2(z)\,\lambda_3(z). \tag{101}$$

Например, с учетом формул (38) и (95) имеем

$$\lambda(z)=\frac{d\mu_{y_1}}{d\mu_{y_2}}(z)=\frac{|D_1(z)|}{|D_2(z)|}\sqrt{\widetilde{\det}\,\boldsymbol{L}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\int_0^a \{\left\langle G_1(s, z(\cdot)), dw_1(s)\right\rangle-\left\langle G_2(s, z(\cdot)), dw_2(s)\right\rangle\}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^a \{\|G_1(s, z(\cdot))\|^2 - \|G_2(s, z(\cdot))\|^2\}\,ds - \frac{1}{2}\int_0^a < [L(t, s)\, z(s) - z(s)],\, dz(s) > \Bigg\}, \quad (102)$$

где определители $D_i\,(z)$, $i=1,2$, вычисляются по формуле (90), а интегральный оператор $\boldsymbol{L}$ и его ядро $L(t, s)$ — по формуле (36).

При выполнении условия (97) справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть выполняются условия теоремы 1, теоремы 2 и условия (97). Тогда все утверждения теоремы 3 и теоремы 4 остаются в силе, а плотность Радона–Никодима $\lambda(z) = \frac{d\mu_{y_1}}{d\mu_{y_2}}(z)$ вычисляется по формуле

$$\lambda(z) = \sqrt{\widetilde{\det}\, \boldsymbol{L}}\, \exp\Bigg\{ -\frac{1}{2}\int_0^a [\mathrm{Sp}\, b'_{z,1}(t, z(t)) - \mathrm{Sp}\, b'_{z,2}(t, z(t))]dt -$$
$$-\int_0^a [\langle G_1(s, z(\cdot)), dw_1(s)\rangle - \langle G_2(s, z(\cdot)), dw_2(s)\rangle\,] -$$
$$-\int_0^a\int_0^a [\mathrm{Sp} K_1(t, s, z(\cdot)) R_{x_1}(s, t) - \mathrm{Sp}\, K_2(t, s, z(\cdot)) R_{x_2}(s, t)]dtds -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^a (\|G_1(s, z(\cdot))\|^2 - \|G_2(s, z(\cdot))\|^2\,)ds - \frac{1}{2}\int_0^a < [L(t, s) z(s) - z(s)],\, dz(s) > \Bigg\}, \quad (103)$$

где оператор $\boldsymbol{L}$ и $b_i\,(t, z(\cdot))$, $i=1,2$, определяются по формулам (36) и (67) соответственно, а операторные функции $K_i\,(t, s, z(\cdot))$ и $R_{x_i}\,(t, s)$, $i=1,2$, находятся по формулам (70) и (28), (29) соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фомин-Шаташвили А.А., Фомина Т.А., Шаташвили А.Д. Об эквивалентности вероятностных мер, порожденных решениями нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, возмущенных гауссовскими процессами. I // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 6. — С. 89–101.
2. Ding X. On global random solutions for random integral and differential equations in Banach spaces // Zbornik Radova Universiteta. — 1984. — N 2 (14). — P. 101–109.
3. Krovaritis. Nonlinear random equations with nonconvergive operators in Banach spaces // J. Math. Analysis and Applications. — 1986. — N 120. — P. 572–583.
4. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматгиз, 1968. — 544 с.
6. Фомина Т.А., Шаташвили А.Д. Некоторые необходимые и достаточные условия, обеспечивающие эквивалентность двух гауссовских мер, индуцируемых решениями дифференциальных уравнений в евклидовом и гильбертовом пространствах // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2002. — № 1. — С. 61–80.
7. Скороход А.В., Шаташвили А.Д. Об абсолютной непрерывности гауссовских мер при нелинейных преобразованиях // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1976. — Вып. 15. — С. 139–151.
8. Шаташвили А.Д. О преобразовании мер в гильбертовом пространстве с помощью линейных дифференциальных уравнений // Теория случайных процессов. — 1973. — Вып. 2. — С. 113–120.
9. Шаташвили А.Д. О преобразованиях гауссовской меры в гильбертовом пространстве, порожденных дифференциальными уравнениями // Там же. — 1973. — Вып. 2. — С. 120–128.
10. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1983. — 384 с.

Поступила 10.03.2010