

## **В.П. СТРЕЛЬНИКОВ, ДЖАССИМ МУХАММЕД КАСМИ РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ РЕЗЕРВИРОВАННЫХ СТРУКТУР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ $DN$ -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ АППАРАТА ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ**

**Abstract:** Using device of functions of casual arguments (FCA), engineering design procedures of reliability of reserved systems such as “ $k$  from  $n$ ” for any values  $n$  and  $k$  which result in definition of  $DN$ -distribution of an operating time to refusal of considered systems on the basis of which it is possible to receive simply estimations of all necessary parameters of reliability of these systems (an average operating time to refusal, a scale-percent operating time to refusal, probability of non-failure operation for set time, a residual resource, etc.) are developed.

**Key words:** reliability, an average operating time to failure, reserve system.

**Анотація:** Завдяки використанню апарата ФСА, розроблені інженерні методики розрахунку надійності резервованих систем типу “ $k$  з  $n$ ” для будь-яких значень  $n$  і  $k$ , що приводять до визначення функції розподілу ( $DN$ -розподілу) наробітку до відмовлення розглянутих систем, на підставі якої можна одержувати оцінки всіх необхідних показників надійності цих систем (середнього наробітку до відмовлення, гамма-процентного наробітку до відмовлення, імовірності безвідмовної роботи за заданий час, залишкового ресурсу й ін.).

**Ключові слова:** безвідмовність, середній наробіток до відмови, резервована система.

**Аннотация:** Благодаря использованию аппарата ФСА, разработаны инженерные методики расчета надежности резервированных систем типа “ $k$  из  $n$ ” для любых значений  $n$  и  $k$ , которые приводят к определению функции распределения ( $DN$ -распределения) наработки до отказа рассматриваемых систем, на основании которой можно получать оценки всех необходимых показателей надежности этих систем (средней наработки до отказа, гамма-процентной наработки до отказа, вероятности безотказной работы за заданное время, остаточного ресурса и др.).

**Ключевые слова:** безотказность, средняя наработка до отказа, резервированная система.

### **1. Введение**

С целью повышения надежности технических систем в практике проектирования имеет место резервирование путем параллельного соединения элементов, когда все элементы находятся под нагрузением (нагруженный резерв). В частности, широкое применение имеют дублированные, троированные системы (структуры). В этом случае система функционирует, пока не откажут все элементы. Применяют также структуры, в которых допускается отказ только одного из параллельно соединенных элементов. Отказ следующего (второго) элемента приводит к отказу системы. В общем случае параллельные структуры сводятся к известным структурам типа “ $k$  из  $n$ ”. Такая структура нормально функционирует тогда и только тогда, когда работоспособны по крайней мере  $k$  элементов. Заметим, что частный случай  $k = n$  соответствует хорошо известному последовательному соединению, а частный случай  $k = 1$  – параллельному соединению, когда отказом системы считается выход из строя всех элементов. В настоящей работе рассматриваются и оцениваются показатели надежности систем, которые либо действительно являются невосстанавливаемыми (например, системы однократного действия), либо таких восстанавливаемых систем, восстановление которых по каким-либо причинам невозможно непосредственно в рассматриваемое время. При этом предполагают, что все элементы имеют одинаковую надежность, и отказы элементов являются независимыми.

### **2. Расчет надежности систем при использовании аппарата функций случайных аргументов**

Теория функций случайных аргументов (ФСА) – один из важных разделов теории вероятностей. Основными задачами этой теории в прикладном плане является нахождение распределения ФСА и

его числовых характеристик по заданным распределениям аргументов. Успешное применение аппарата ФСА для расчета надежности некоторых систем было осуществлено ранее исследователями [1–3].

Как известно, суть метода расчета надежности систем на основе использования ФСА состоит в том, что случайная величина  $T$  (наработка системы до отказа) представляется некоторой функцией случайных аргументов ( $T_{эi}, v_{эi}$  – средняя наработка и коэффициент вариации наработки элементов  $i$ -го типа, входящих в систему):

$$T = \varphi(T_{эi}, v_{эi}),$$

где  $\varphi(\cdot)$  – детерминированная функция, однозначно соответствующая структуре системы. С другой стороны, предполагают, что случайная величина  $T$  описывается некоторым известным законом распределения. Ставится задача оценки параметров этого распределения через значения  $T_{эi}$  и  $v_{эi}$ . Используя, например, свойства и связи случайных величин и функций, а также фундаментальные теоремы теории вероятностей (теоремы умножения, сложения и полной вероятности), устанавливают соотношения между такими показателями, как средняя наработка до отказа системы и элементов, а также между коэффициентами вариации наработки системы и элементов, однозначно определяемых структурой системы. Далее в качестве функций распределения случайной величины  $T$  принимают такую, чтобы можно было определить ее параметры через характеристики  $T_{эi}$  и  $v_{эi}$ . Таким образом, получают оценки закона распределения искомой случайной величины  $T$ , т.е. решается задача расчета безотказности системы на основании показателей надежности элементов. Рассмотрим методики расчета рассматриваемых систем на основе ФСА-метода с использованием различных теоретических функций распределения наработки.

### 3. Методика расчета надежности систем на основе использования $DN$ -распределения

Принимается гипотеза о том, что функции распределения наработок до отказа элементов структуры типа “ $k$  из  $n$ ”, а также самой структуры (системы), описываются  $DN$ -распределением.

Для структур типа “ $k$  из  $n$ ” при равнонадежных элементах, используя, например, метод прямого перебора и теоремы сложения вероятностей [4], получено выражение для вероятности безотказной работы системы  $R_c(t)$  в следующем виде:

$$R_c(t) = \sum_{i=0}^{n-k} C_n^i R_{э}^{n-i}(t) \cdot [1 - R_{э}(t)]^i, \quad (1)$$

где  $R_{э}(t)$  – вероятность безотказной работы элемента;  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ .

После того как установлено выражение для вероятности безотказной работы (или вероятности отказа) системы за определенное время  $t$ , далее решение задачи (оценки показателей надежности системы) сводится к следующему. Если известны исходные данные (средняя наработка до отказа элементов  $T_{э}$  и коэффициент вариации наработки элементов  $v_{э}$ ), то

вычисляют значение вероятности отказа элемента за наработку, например,  $t = T_3$ , по формуле  $q_3(t) = DN(t; T_3, v_3)$ . Вычисление  $q_3(t)$  можно производить следующим образом:

$$q_3(t) = DN(t; T_3, v_3) = DN(1; 1, v_3) = 0,5 + \exp\left(\frac{2}{v_3^2}\right) \left(-\frac{2}{v_3}\right). \quad (2)$$

Используя информацию о том, что предельное значение числа отказов элементов в рассматриваемой структуре равно  $\Pi = n - k + 1$ , вычисляют ожидаемый коэффициент вариации наработки до отказа системы по формуле

$$v_c = \frac{v_3}{\sqrt{n - k + 1}}. \quad (3)$$

Далее, используя полученное значение вероятности отказа элемента за наработку  $t = T_3$  (или вероятность безотказной работы элемента  $R_3(t)$ ), вычисляют вероятность отказа системы за наработку  $t = T_3$  по формуле (1), где

$$R_3(t) = 1 - DN(t; T_3, v_3) = \Phi\left(\frac{T_3 - t}{v_3 \sqrt{T_3 t}}\right) - \exp\left(\frac{2}{v_3^2}\right) \Phi\left(-\frac{T_3 + t}{v_3 \sqrt{T_3 t}}\right). \quad (4)$$

Вычислив численное значение  $F_c(t) = F_c(T_3)$ , можно записать следующее соотношение, из которого определяют среднюю наработку до отказа системы или параметр масштаба распределения наработки до отказа системы  $\mu_c = T_c$ :

$$F_c(T_3) = DN(T_3; \mu_c, v_c) = DN\left(\frac{T_3}{T_c}; 1, v_c\right) = DN(x; 1, v_c). \quad (5)$$

Величину относительной наработки  $x = \frac{T_3}{T_c} = x[F_c(T_3); v_c]$  из последнего соотношения (5)

можно определить, входя в соответствующую таблицу  $DN$ -распределения со значениями  $F = F_c(T_3)$  и  $v = v_c$  или решая следующее уравнение относительно  $x$ :

$$F = \Phi\left(\frac{x-1}{v\sqrt{x}}\right) + \exp\left(\frac{2}{v^2}\right) \cdot \Phi\left(-\frac{x+1}{v\sqrt{x}}\right).$$

Определив величину  $x[F_c(T_3); v_c]$ , вычисляют значение средней наработки до отказа системы (параметр распределения наработки до отказа системы  $\mu_c$ ) по формуле

$$T_c = \mu_c = \frac{T_3}{x[F_c(T_3); v_c]}. \quad (6)$$

Методики расчета надежности структур, имеющих разные значения  $k$  и  $n$ , остаются аналогичными.

#### 4. Примеры расчета надежности некоторых структур

*Пример 1.* Рассмотрим систему типа “ $k$  из  $n$ ” для следующих значений параметров:  $n = 5, k = 3$ . Необходимо определить среднюю наработку до отказа данной системы  $T_c$  и вероятность безотказной работы системы за  $t_{зад}$  при следующих показателях надежности элементов:  $T_3 = 1000$  час,  $v_3 = 1$ ,  $t_{зад} = 200$  час.

*Решение.* Если принимается гипотеза о теоретическом распределении наработки до отказа элементов в виде  $DN$ -распределения, тогда решение поставленной задачи сводится к следующим процедурам.

1) Используя формулу (1), получают выражение для вероятности отказа системы за наработку  $t$  в следующем виде:

$$F_c(t) = 1 - [R_3(t)]^3 [10 - 15R_3(t) + 6[R_3(t)]^2].$$

2) Вычисляют численное значение  $R_3(t)$  (для  $t = T_3$ ):

$$\begin{aligned} R_3(t) &= 1 - DN(t; T_3, v_3) = \Phi\left(\frac{T_3 - T_3}{v_3 \sqrt{T_3^2}}\right) - \exp\left(\frac{2}{v_3^2}\right) \Phi\left(-\frac{T_3 + T_3}{v_3 \sqrt{T_3^2}}\right) = \Phi(0) - \exp\left(\frac{2}{v_3^2}\right) \Phi\left(-\frac{2}{v_3}\right) = \\ &= \Phi(0) - 7,387 \cdot \Phi(-2) = 0,5 - 7,387 \cdot 0,023 = 0,33. \end{aligned}$$

3) Подставляя полученное значение  $R_3(t)$  в формулу для вероятности отказа системы, вычисляют вероятность отказа исследуемой системы за наработку  $t = T_3$ :

$$F_c(t) = 1 - [R_3(t)]^3 [10 - 15R_3(t) + 6[R_3(t)]^2] = 1 - (0,33)^3 [10 - 15 \cdot 0,33 + 6 \cdot (0,33)^2] = 0,795.$$

4) Вычисляют значение коэффициента вариации наработки до отказа исследуемой системы:

$$v_c = \frac{v_3}{\sqrt{n - k + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577.$$

5) Определяют параметр масштаба распределения наработки системы  $\mu_c$  и значение средней наработки до отказа системы:

$$\mu_c = T_c = \frac{T_3}{x[F_c(T_3); v_c]} = \frac{1000}{x(0,795; 0,577)} = \frac{1000}{1,36} = 735 \text{ час.}$$

6) Вычисляют вероятность безотказной работы системы  $R(t_{зад})$ :

$$\begin{aligned} R(t_{зад}) &= \Phi\left(\frac{\mu_c - t_{зад}}{v_c \sqrt{\mu_c t_{зад}}}\right) - \exp\left(\frac{2}{v_c^2}\right) \cdot \Phi\left(-\frac{\mu_c + t_{зад}}{v_c \sqrt{\mu_c t_{зад}}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{735 - 200}{0,577 \sqrt{735 \cdot 200}}\right) - \exp\left(\frac{2}{0,577^2}\right) \cdot \Phi\left(-\frac{735 + 200}{0,577 \sqrt{735 \cdot 200}}\right) = \\ &= \Phi(2,42) - 406 \cdot \Phi(-4,226) = 0,9922 - 406 \cdot 0,000013 = 0,9869. \end{aligned}$$

*Пример 2.* Рассмотрим систему типа “ $k$  из  $n$ ” для значений параметров:  $n = 3, k = 1$ , то есть троированную систему. Необходимо определить среднюю наработку до отказа данной системы  $T_c$

и вероятность безотказной работы системы за  $t_{зад}$  для следующих показателей надежности элементов:  $T_3 = 1000$  час,  $v_3 = 1$ ,  $t_{зад} = 200$  час.

*Решение.* Процедура решения данной задачи аналогична предыдущему примеру.

1) Используя формулу (1), получают выражение для вероятности отказа троированной системы за наработку  $t$  в следующем виде:

$$F_c(t) = 1 - R_3(t) [3 - 3R_3(t) + R_3(t)^2].$$

2) Вычисляют численное значение  $R_3(t)$  (для  $t = T_3$ ) аналогично предыдущему примеру:

$$R_3(t) = 0,33.$$

3) Подставляя полученное значение  $R_3(t)$  в формулу для вероятности отказа системы, вычисляют вероятность отказа исследуемой системы за наработку  $t = T_3$ :

$$F_c(t) = 1 - 0,33 (3 - 3 \cdot 0,33 + (0,33)^2) = 0,3.$$

4) Вычисляют значение коэффициента вариации наработки до отказа исследуемой системы:

$$v_c = \frac{v_3}{\sqrt{n-k+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577.$$

5) Определяют параметр масштаба распределения наработки системы  $\mu_c$  и значение средней наработки до отказа системы:

$$\mu_c = T_c = \frac{T_3}{x[F_c(T_3); v_c]} = \frac{1000}{x(0,3; 0,577)} = \frac{1000}{0,643} = 1555 \text{ час.}$$

6) Вычисляют вероятность безотказной работы системы аналогично предыдущему примеру:

$$R(t_{зад}) = \Phi(4,21) - 406 \cdot \Phi(-5,45) = 0,999987 - 406 \cdot 0,0000002 = 0,999906.$$

## 5. Заключение

В настоящей работе, благодаря использованию аппарата ФСА, разработаны инженерные методики расчета надежности резервированных систем типа “ $k$  из  $n$ ” для любых значений  $k$  и  $n$ , которые приводят к определению функции распределения ( $DN$ -распределения) наработки до отказа рассматриваемых систем, на основании которой можно просто получать оценки всех необходимых показателей надежности этих систем (средней наработки до отказа, гамма-процентной наработки до отказа, вероятности безотказной работы за заданное время, остаточного ресурса и др.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1969. – 576 с.
2. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. – М.: Мир, 1969. – 395 с.
3. Надежность и эффективность АСУ / Ю.Г. Заренин, М.Д. Збырко, Б.П. Креденцер и др. – К.: Техніка, 1975. – 368 с.
4. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 423 с.
5. Стрельников В.П., Федухин А.В. Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. – К.: Логос, 2002. – 486 с.