УДК 519.2: 530.1: 600.1

И.И. ГОРБАНЬ

РАСХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

Анотація. *Систематизовано відомі поняття і теореми, що стосуються границь. Для опису послідовностей і функцій, які розбігаються, введено низку нових понять і визначень, зокрема, поняття спектра граничних точок, збіжності до спектра граничних точок, функції і щільності розподілу граничних точок, границь функції розподілу та ін. Основу запропонованого підходу складають методи теорії гіпервипадкових явищ.*
Ключові слова: *послідовність, що розбігається, функція, що розбігається, часткова границя, гранична точка, теорія гіпервипадкових явищ.*

Аннотация. *Систематизированы известные понятия и теоремы, касающиеся пределов. Для описания расходящихся последовательностей и функций введен ряд новых понятий и определений, в частности, понятия спектра предельных точек, сходимости к спектру предельных точек, функции и плотности распределения предельных точек, границ функции распределения и др. Основу предложенного подхода составляют методы теории гиперслучайных явлений.*
Ключевые слова: *расходящаяся последовательность, расходящаяся функция, частичный предел, предельная точка, теория гиперслучайных явлений.*

Abstract. *Well-known concepts and theorems connected with the limits are systemized. For description of diverging sequences and functions, a number of new concepts and definitions, in particular concepts of limit points spectrum, convergence to spectrum of limit points, functions and density of distribution of the limit points, boundaries of distribution function etc. on are proposed for description of nonconvergent sequences and functions are introduced. The methods of hyper-random phenomena theory are the basis of proposed approach.*
Keywords: *diverging sequence, divergent function, partial limit, limit point, the theory of hyper-random phenomena.*

1. Введение

Основополагающими понятиями современной математики являются понятия предела и сходимости. Подавляющее большинство математических результатов получено на основе этих понятий. С их помощью вводятся, например, понятия равномерной сходимости, непрерывной функции, производной, интеграла и др.

Существенным требованием в классических определениях предела функции, заданной на множестве действительных чисел, и сходимости числовой последовательности к пределу является обязательное существование единственного предела. Если единственного предела нет, то говорят, что функция или последовательность предела не имеет или что она расходится.

Далеко не все последовательности и функции имеют пределы. Более того, в реальном физическом мире, как выясняется, многие процессы оказываются расходящимися. К таковым относятся, например, неравновесные фликкер-шумы, статистически неустойчивые процессы [1], хаотические процессы со странными аттракторами и многие другие.

Отсутствие сходимости – серьезная проблема, касающаяся многих математических объектов. Однако до сих пор она мало изучена. В основном, обсуждается она в рамках теории пределов и в связи с нарушением сходимости расходящихся рядов и интегралов [2–5].

Особый интерес представляют расходящиеся числовые последовательности $\{x_n\}$, члены которых x_n при увеличении номера n то возрастают, то убывают, а также расходящиеся функции $x(t)$, значения которых при приближении аргумента t к некоторому значению t_0 колеблются в определенных пределах.

Отсутствие сходимости не означает, что о поведении последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ или функции $x(t)$ при $t \to t_0$ сказать ничего нельзя. Это не так. Заметим, что предел – лишь один из множества параметров, характеризующих последовательность или функцию при предельном переходе.

Исследования различных физических процессов на больших интервалах наблюдения [1, 6–9] показали, что в подавляющем большинстве случаев их выборочные средние расходятся. Поиск эффективных методов описания таких процессов, названных статистически неустойчивыми, привел к новой теории гиперслучайных явлений. Развитие и обобщение методов этой теории, как выясняется, может быть полезным для решения многих задач, в том числе лежащих вдали от задач статистики.

Целью настоящей статьи является систематизация известных и изложение новых результатов, касающихся нарушения сходимости, полученных на основе теории гиперслучайных явлений.

2. Принцип сходимости

2.1. Частичные последовательности и частичные пределы

Понятие предела обычно вводится через понятие предела однозначной функции и определяется следующим образом.

Определение 1 (Коши). Число a называется пределом функции $x(t)$ при $t \to t_0$ ($\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a$), если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $0 < |t - t_0| < \delta$ (δ-окрестности точки t_0) функция $x(t)$ определена и $|x(t) - a| < \varepsilon$.

Аналогично определяются понятия предела для функции $x(t)$ при t, стремящемся к плюс или минус бесконечности ($t \to +\infty$, $t \to -\infty$), а также понятия левостороннего и правостороннего пределов.

Подобным же образом вводится понятие сходимости последовательности к пределу.

Определение 2. Число a называется пределом числовой последовательности

$$X = \{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n'}, \ldots \tag{1}$$

($\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$), если для каждого положительного числа ε существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Доказано, что если предел последовательности или функции существует, то он единственен.

Наличие у бесконечной последовательности $\{x_n\}$ предела a означает, что в ε-окрестности точки a сосредоточено бесконечное количество ее членов (причем не обязательно одинаковых), а вне этой окрестности находится лишь конечное число членов.

Необходимое и достаточное условия сходимости последовательности определяются следующей теоремой.

Теорема 1 (Больцано-Коши). Последовательность (1) имеет конечный предел тогда и только тогда, когда для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что неравенство $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$ выполняется, как только $n > N$ и $n' > N$.

Тем самым эта теорема утверждает, что для существования предела необходимо и достаточно, чтобы члены последовательности безгранично сближались по мере увеличения их номеров.

Справедлива аналогичная теорема и для функции.

Теорема 2 (Больцано-Коши). Функция $x(t)$ при $t \to t_0$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что неравенство $|x(t) - x(t')| < \varepsilon$ выполняется, как только $|t - t_0| < \delta$, $|t' - t_0| < \delta$.

Заметим, что эти теоремы распространяются и на случай бесконечных пределов.

Важную роль в теории пределов играют подпоследовательности.

Определение 3. Подпоследовательностью или частичной последовательностью называется любая бесконечная последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \tag{2}$$

сформированная из исходной последовательности (1) путем отбрасывания части ее членов с сохранением порядка следования оставшихся членов.

Из определения следует, что последовательность индексов $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ подпоследовательности (2) представляет собой последовательность возрастающих натуральных чисел ($n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$).

Определение 4. Частичным m-м пределом последовательности и частичным m-м пределом функции называются пределы a_m частичных m-х последовательностей, сформированных соответственно из исходной последовательности и исходной функции.

Частичные последовательности, так же как и исходные последовательности, могут не иметь предела.

Известен целый ряд теорем для подпоследовательностей и функций, в частности, следующие [2, 4].

Теорема 3. Если последовательность (1) (или функция $x(t)$) имеет определенный предел a (конечный или бесконечный), то тот же предел a имеет и порожденная этой последовательностью (функцией) частичная последовательность.

Заметим, что в общем случае обратное утверждение неверно.

Определение 5. Сходящейся последовательностью будем называть последовательность (1), имеющую предел при $n \to \infty$, а сходящейся функцией в точке $t = t_0$ – функцию, имеющую предел в этой точке. Последовательности и функции, не удовлетворяющие этому требованию, будем называть расходящимися.

Расходящаяся функция может быть сходящейся в некотором множестве точек и расходящейся в другом множестве точек.

В расходящейся последовательности или функции можно выделить множество частичных последовательностей с разными частичными пределами.

Среди множества частичных пределов существуют наименьший и наибольший пределы.

Определение 6. Наименьшим и наибольшим пределами последовательности (1) (или функции $x(t)$) называются соответственно наименьший и наибольший частичные пределы подпоследовательностей ($\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ для последовательности (1) или $\liminf\limits_{t\to t_0} x(t) = \underline{\lim}_{t\to t_0} x(t)$ и $\limsup\limits_{t\to t_0} x(t) = \overline{\lim}_{t\to t_0} x(t)$ для функции).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Любая бесконечная последовательность (функция) имеет наибольший и наименьший пределы. Равенство этих пределов является необходимым и достаточным условиями для существования предела этой последовательности (функции).

Заметим, что в метрическом пространстве частичные пределы трактуются как предельные точки, а наименьший и наибольший пределы – как соответственно нижняя и верхняя предельные точки. В случае, когда частичный предел последовательности равен бесконечности (со знаком плюс или минус), предельная точка располагается на бесконечности (плюс или минус).

Известно [4], что любая бесконечная последовательность имеет хотя бы один частичный предел. Этот предел может быть конечным или бесконечным. Для ограниченной последовательности справедлива следующая лемма Больцано-Вейерштрасса.

Теорема 5 (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности всегда можно выделить такую частичную последовательность, которая сходилась бы к конечному пределу.

2.2. Примеры расходящихся последовательностей и функций

Примером расходящейся последовательности может служить чередующаяся последовательность чисел, одинаковых по модулю, но разного знака, например, последовательность

$$+1, -1, +1, -1, \ldots . \tag{3}$$

Эта последовательность имеет два частичных предела, равных $+1$ и -1.

Примерами расходящихся функций могут служить следующие функции:

$$x(t) = \sin \omega_1 t,\ t \geq 0, \tag{4}$$

$$x(t) = \sin\left(\frac{1}{\omega_1 (t - t_0)}\right), \quad 0 \leq t < t_0, \tag{5}$$

флуктуирующая функция, определенная на интервале $[0, t_0)$, у которой полупериоды возрастания значений описываются выражением (5), а полупериоды убывания – линейной функцией:

$$x(t) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{\omega_1 (t - t_0)}\right), & t \in [t'_k, t''_k), \\ 1 + \dfrac{2(t''_{k-2} - t)}{t'_k - t''_{k-2}}, & t \in [t''_{k-2}, t'_k,), \end{cases} \tag{6}$$

где $\omega_1 \neq 0,\ t_0 > 0$, k – четное, t'_k, t''_k – значения аргумента t, при котором на k-м полупериоде (возрастания своих значений) функция принимает соответственно минимальное и максимальное значения:

$$t'_k = t_0 + \frac{1}{\left[-\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right]\omega_1}, \qquad t''_k = t_0 + \frac{1}{\left[\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right]\omega_1}, \tag{7}$$

$$x(t)=\sin\left(\frac{1}{\omega_1(t-t_{01})}\right)+\sin\left(\frac{1}{\omega_1(t-t_{02})}\right),\quad t\geq 0,\quad t\neq t_{01},\quad t\neq t_{02}, \tag{8}$$

$$x(t)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{\omega_1(t-t_{01})}\right)+\sin\left(\frac{1}{\omega_1(t-t_{02})}\right) & \textit{при}\quad t\geq 0,\quad t<t_{01}\quad \textit{или}\quad t>t_{02},\\ \sin\left(\frac{1}{\omega_2(t-t_{01})}\right)+\sin\left(\frac{1}{\omega_2(t-t_{02})}\right) & \textit{при}\quad t_{01}<t<t_{02},\end{cases} \tag{9}$$

где $\omega_2\neq 0,\ 0<t_{01}<t_{02}$.

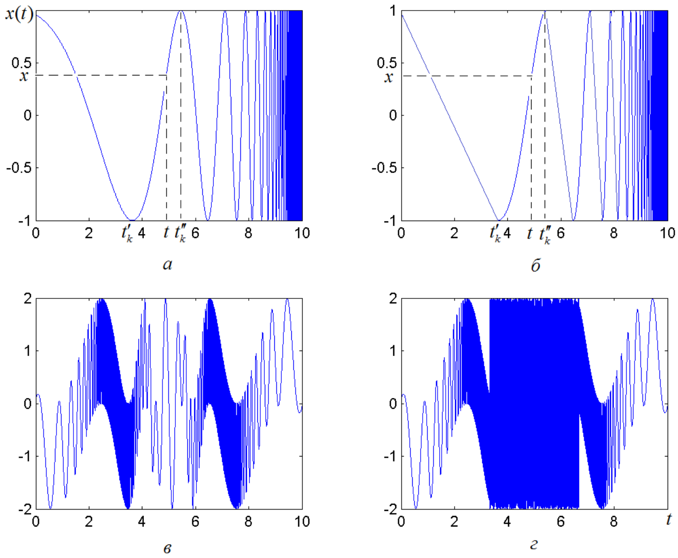


Рис. 1. Расходящиеся функции (5)–(6) и (8)–(9): $\omega_1=2\cdot 10^{-2}$, $\omega_2=2\cdot 10^{-5}$, $t_0=3$, $t_{01}=3$, $t_{02}=7$

Функция (4) расходится при $t\to\infty$, функции (5) и (6) – при $t\to t_0$, а функции (8)–(9) – при $t\to t_{01}$ и $t\to t_{02}$. Представление о функциях (5)–(6) и (8)–(9) дает рис. 1 (соответственно а–г).

В точках нарушения сходимости функции (4)–(6) и (8)–(9) имеют несчетное число частичных пределов. У функций (4)–(6) эти пределы находятся в интервале $[-1,1]$, а у функций (8)–(9) – в интервале $[-2,2]$.

Последовательность – функция дискретного аргумента. Поэтому, когда аргумент t принимает счетное число дискретных значений, выражения (4)–(6) и (8)–(9) описывают бесконечные последовательности. В зависимости от величины параметров количество частичных пределов у этих последовательностей может быть как бесконечным, так и конечным числом. Например, у последовательностей, описываемых выражениями (5) и (6) при $t=t_0+\Delta t/n$, $\omega_1\Delta t=2/\pi$, $n=1,2,\ldots$, оно конечно: равно трем ($-1,0,1$)).

2.3. Спектр предельных точек последовательности

Рассмотрим бесконечную ограниченную числовую последовательность (1). Пусть a_I и a_S – соответственно нижняя и верхняя предельные точки последовательности.

Информативными параметрами, характеризующими последовательность, являются количество предельных точек, среднее значение $a_0=\frac{a_S+a_I}{2}$, длина интервала $\Delta a=a_S-a_I$, в котором находятся предельные точки, и др.

Если последовательность сходится к определенному числу a, то $a_S=a_I=a_0=a$, а $\Delta a=0$; если же последовательность расходится, то границы отличаются ($a_S\neq a_I$), а $\Delta a\neq 0$. В последнем случае аналогом предела может выступать его спектр S_x.

Определение 7. Спектром S_x предельных точек (частичных пределов) последовательности (1) будем называть множество всех ее предельных точек.

В любом случае, говоря о сходимости последовательности в обобщенном смысле, будем подразумевать сходимость ее подпоследовательностей к соответствующим предельным точкам, формулировать этот факт как сходимость к спектру предельных точек и аналитически записывать как $S_x = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} x_n$.

Сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку. Расходящаяся последовательность может иметь конечное или бесконечное число таких точек.

Спектр последовательности может быть дискретным (состоять из изолированных предельных точек, не имеющих в своей окрестности других предельных точек), непрерывным (состоять из всюду плотного множества предельных точек) или смешанным (дискретно-непрерывным). Дискретный спектр может быть конечным или бесконечным. Бесконечный дискретный спектр содержит счетное число предельных точек.

Заметим, что спектр последовательности не меняется при исключении или добавлении любого конечного числа членов последовательности.

2.4. Теорема о последовательности средних

Теорема 6. Пусть бесконечная ограниченная числовая последовательность (1) имеет конечный предел a. Тогда тот же предел a имеет последовательность средних $\{y_n\} = y_1, y_2, \ldots$, где

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{10}$$

Доказательство теоремы состоит в следующем. Учтем, что по условию теоремы для каждого положительного числа ε существует такой номер N, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Рассмотрим величину $|y_n - a|$ для $n > N$. Принимая во внимание равенство (10), запишем

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - a\right| \le \frac{1}{n}\Big[|x_1 - a| + |x_2 - a| + \ldots + |x_N - a| + \big(|x_{N+1} - a| + \ldots + |x_n - a|\big)\Big].$$

Каждый модуль в круглых скобках этого выражения меньше ε. Поэтому

$$|y_n - a| < \frac{1}{n}\Big[|x_1 - a| + |x_2 - a| + \ldots + |x_N - a| - N\varepsilon\Big] + \varepsilon .$$

Из этого неравенства следует, что при $n \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ величина $y_n \to a$.

Заметим, что, если последовательность средних $y_1, y_2, \ldots$ имеет предел, то не обязательно сходится исходная последовательность (1). В качестве примера можно привести расходящуюся последовательность (3), последовательность средних которой имеет предел, равный нулю.

Таким образом, необходимым, но недостаточным, условием сходимости последовательности является сходимость последовательности ее средних.

3. Описание расходящихся последовательностей

3.1. Разряд, частота значений и спектр частот значений

Спектр последовательности может быть определен на основе разбиения множества членов последовательности на разряды и вычисления для каждого разряда множества частичных пределов (предельных точек) последовательности, сформированной из членов, попадающих в разряд.

Определение 8. Под разрядом (классовым интервалом) конечной или бесконечной последовательности понимается фиксированный интервал значений, принимаемых членами рассматриваемой последовательности.

Особый интерес представляют разряды с перекрытием, описываемые интервалами

$$(-\infty, x^1), (-\infty, x^2), \ldots, (-\infty, x^{R-1}), (-\infty, +\infty), \tag{11}$$

где x^r – правый конец r-го разряда ($r = \overline{1, R-1}$).

В системе координат (n, x) (где $n = 1, 2, \ldots$ – число членов исходной последовательности X_n) r-му разряду соответствует подпоследовательность X_n^r, образованная из членов последовательности X_n, попавших в соответствующий разряд (на рис. 2а в темную не ограниченную снизу полосу).

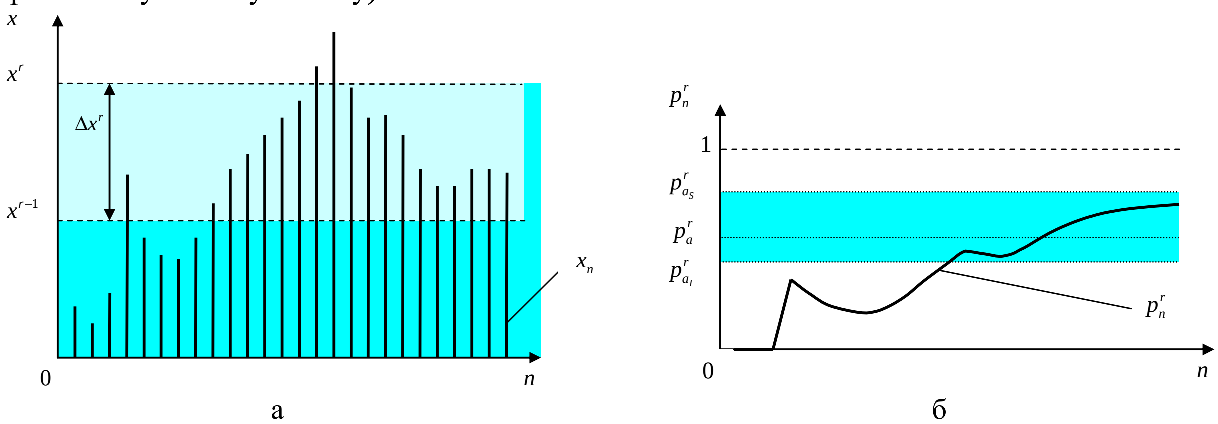


Рис. 2. Исходная последовательность X_n (а) и соответствующая последовательность частот значений $\{p_n^r\}$ (б)

Определение 9. Частотой значений p_n^r r-го разряда последовательности X_n (рис. 2б), будем называть отношение количества n^r ее членов, попадающих в r-й разряд, к общему числу членов n последовательности X_n: $p_n^r = \dfrac{n^r}{n}$.

Понятие частоты значений аналогично понятию частоты выборочного распределения теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений.

Значения частоты p_n^r лежат в интервале $[0,1]$. Путем предельного перехода ($n \to \infty$) частота может быть определена для бесконечных последовательностей $\{p_n^r\}$. Следует иметь в виду, что последовательность $\{p_n^r\}$ не обязательно сходится, т.е. может иметь множество предельных точек.

Определение 10. Спектром S_p^r частот значений r-го разряда бесконечной последовательности X будем называть множество частичных пределов (предельных точек) последовательности частот $\{p_n^r\}$ при $n \to \infty$: $S_p^r = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} p_n^r$.

Из того, что любая бесконечная последовательность имеет хотя бы один частичный предел, следует, что при $n \to \infty$ спектр последовательности $\{p_n^r\}$ имеет, как минимум, одну предельную точку.

Обратим внимание, что при $n \to \infty$ в формировании любой предельной точки p_a^r последовательности $\{p_n^r\}$ существенную роль играет лишь бесконечное число членов, находящихся в ее окрестности.

В разряд может попадать как бесконечное, так и конечное число элементов бесконечной последовательности X. Если это число конечное, то спектр S_p^r содержит один нулевой предел.

3.2. Теорема о спектре частот значений разряда последовательности

С ростом числа членов последовательности n количество n^r членов, попадающих в r-й разряд, не убывает. Вследствие этого оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 7. Если спектр S_p^r частот значений r-го разряда бесконечной последовательности X содержит две предельные точки $p_{a_1}^r$, $p_{a_2}^r$ ($p_{a_1}^r < p_{a_2}^r$), то предельной точкой является также точка p_a^r, лежащая в интервале $p_{a_1}^r < p_a^r < p_{a_2}^r$.

Для доказательства рассмотрим произвольное число p_a^r, удовлетворяющее указанному неравенству. Заметим, что при неограниченном увеличении числа элементов n величина p_n^r бесконечное число раз оказывается то меньше, то больше числа p_a^r, а значения p_n^r меняются таким образом, что модуль приращения $\Delta p_n^r = p_{n+1}^r - p_n^r$ не превосходит величины $1/n$.

Сформируем из последовательности $\{p_n^r\}$ бесконечную подпоследовательность $\{p_{n_k}^r\}$, элементы которой $p_{n_k}^r$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2n_1} \le \left| p_a^r - p_{n_1}^r \right| < \dfrac{1}{n_1}, \\ \dfrac{1}{2n_2} \le \left| p_a^r - p_{n_2}^r \right| < \dfrac{1}{n_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

где n_k – натуральные числа ($k = 1, 2, \ldots$), $n_1 > 1$, $n_2 > 2n_1$, $n_3 > 2n_2, \ldots$.

Принимая во внимание ограничения, наложенные на n_k, получим систему неравенств $\left| p_a^r - p_{n_1}^r \right| > \left| p_a^r - p_{n_2}^r \right| > \ldots$, из которой следует, что при возрастании n отклонение элементов $p_{n_k}^r$ от p_a^r уменьшается. Поскольку $\left| p_a^r - p_{n_k}^r \right| < \dfrac{1}{n_k}$, то при $k \to \infty$ (а, следовательно, $n_k \to \infty$) приращение $\left| p_a^r - p_{n_k}^r \right| \to 0$.

Следствие. Из теоремы следует, что в случае, когда спектр частот S_p^r значений r-го разряда последовательности X при $n \to \infty$ имеет более одной предельной точки, то этот спектр непрерывный и содержит несчетное число предельных точек, находящихся между нижней $p_{a_1}^r$ и верхней $p_{a_S}^r$ предельными точками (затемненная область на рис. 2б).

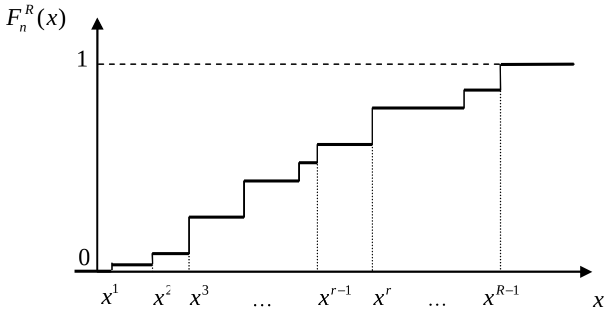
3.3. Интервальные функции распределения значений последовательности

Определение 11. R-разрядной интервальной функцией распределения значений конечной последовательности X_n будем называть функцию

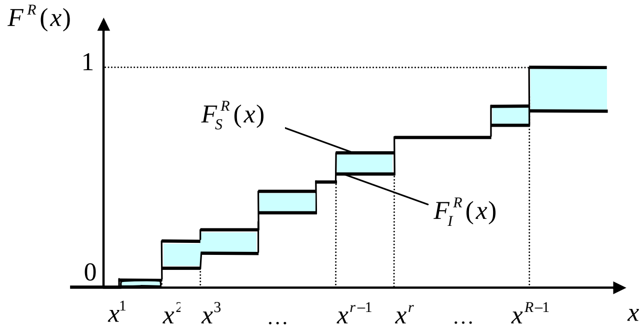
$$F_n^R(x) = \begin{cases} p_n^r, & \textit{если} \quad x < x^r \quad (r = \overline{1, R-1}), \\ 1, & \textit{если} \quad x \geq x^{R-1}, \end{cases}$$

сформированную из частот значений p_n^r последовательности X_n для перекрывающихся разрядов $(-\infty, x^1), (-\infty, x^2), \ldots, (-\infty, x^{R-1}), (-\infty, +\infty)$.

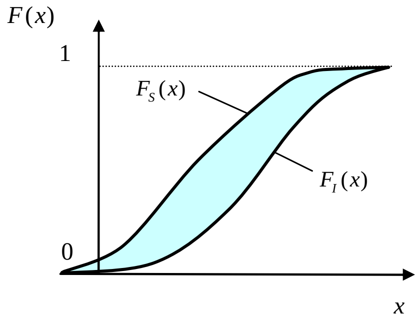
Эта функция (рис. 3а) аналогична интервальной статистической функции распределения теории вероятностей. Как и последняя, она неубывающая и ее значения лежат в интервале $[0,1]$.



а



б



в

Рис. 3. R-разрядная интервальная функция распределения значений конечной последовательности $F_n^R(x)$ (а), спектр $F^R(x)$ R-разрядной интервальной функции распределения значений бесконечной последовательности (б) и спектр $F(x)$ функции распределения предельных точек бесконечной последовательности (в)

При $n \to \infty$ функция $F_n^R(x)$ не обязательно сходится. Нарушение сходимости приводит к многозначности.

Определение 12. Спектром $F^R(x)$ R-разрядной интервальной функции распределения значений бесконечной последовательности X будем называть множество частичных пределов соответствующей последовательности $\left\{F_n^R(x)\right\}$ R-разрядных интервальных функций распределения: $F^R(x) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} F_n^R(x)$ (рис. 3б).

Определение 13. Спектром $F(x)$ функции распределения предельных точек (или просто функцией распределения) бесконечной последовательности X будем называть множество частичных пределов последовательности $\left\{F^R(x)\right\}$ при устремлении максимального расстояния $\Delta x^r = x^r - x^{r-1}$ между верхними границами соседних разрядов (рис. 2а) к нулю: $F(x) = \operatorname*{Lim}_{\max\limits_r \Delta x^r \to 0} F^R(x)$ (рис. 3в).

Функции $F^R(x)$ и $F(x)$ характеризуют плотность распределения предельных точек на оси x для соответственно R-разрядной и бесконечно-разрядной интервальных функций распределения.

В общем случае эти функции – многозначные. Спектр $F^R(x)$ ограничен нижней $F_I^R(x)$ и верхней $F_S^R(x)$ границами (рис. 3 б), а спектр $F(x)$ – нижней $F_I(x)$ и верхней $F_S(x)$ границами (рис. 3 в).

Спектр $F(x)$ и границы функции распределения $F_I(x)$, $F_S(x)$ аналогичны соответственно функции распределения и границам функции распределения гиперслучайной величины, используемым в теории гиперслучайных явлений [6, 7]. Это позволяет применять математический аппарат указанной теории для описания расходящихся последовательностей, в частности, методы описания, основанные на

– границах функции распределения $F_I(x)$, $F_S(x)$ и плотности распределения границ $f_I(x)=\dfrac{\mathrm{d}F_I(x)}{\mathrm{d}x}$, $f_S(x)=\dfrac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}$;

– моментах границ: математических ожиданиях границ m_I, m_S, дисперсиях границ D_I, D_S и пр.;

– границах моментов: границах математического ожидания m_i, m_s, границах дисперсии D_i, D_s и пр.

4. Расходящиеся функции

4.1. Описание расходящихся функций

Пусть в δ-окрестности точки $t=t_0$ определена однозначная функция $x=x(t)$, принимающая конечные значения. Пусть $S_x(t_0)$ – множество предельных точек (частичных пределов) этой функции при $t\to t_0$, а $x_I(t_0)$ и $x_S(t_0)$ – соответственно нижняя и верхняя предельные точки.

Определение 14. Множество $S_x(t_0)$ всех предельных точек функции при $t\to t_0$ будем называть спектром предельных точек (спектром частичных пределов) функции при $t\to t_0$.

Говоря о сходимости расходящейся функции, будем подразумевать сходимость ее подпоследовательностей к соответствующим предельным точкам, формулировать этот факт как сходимость к спектру предельных точек и записывать аналитически выражением $S_x(t_0)=\operatorname*{Lim}_{t\to t_0} x(t)$.

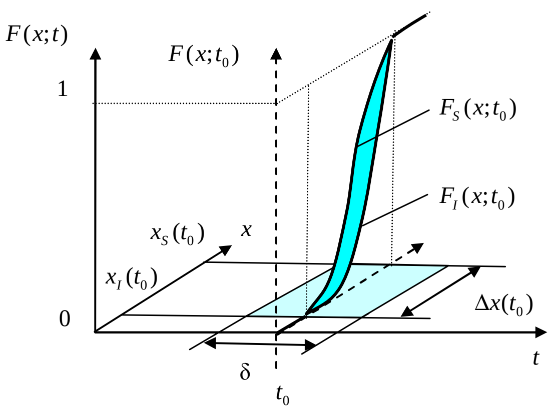


Рис. 4. Спектр предельных точек функции $S_x(t)$ при $t\to t_0$

Величина $x_0(t_0)=\dfrac{x_S(t_0)+x_I(t_0)}{2}$ представляет собой середину интервала, в котором находятся все частичные пределы функции $x(t)$ при $t\to t_0$, а величина $\Delta x(t_0)=x_S(t_0)-x_I(t_0)$ – длину этого интервала (ширину спектра $S_x(t_0)$) (рис. 4).

Если функция имеет предел a в точке $t=t_0$, то $x_S(t_0)=x_I(t_0)=a$, а $\Delta x(t_0)=0$; если же функция расходится (не имеет единственного предела) в этой точке, то $x_S(t_0)\neq x_I(t_0)$, и $\Delta x(t_0)\neq 0$.

Заметим, что требования конечности значений функции не являются существенными. При бесконечных значениях нижняя предельная точка, верхняя предельная точка или обе эти точки могут принимать бесконечно большие по модулю значения. Тогда рассматриваемые интервалы оказываются бесконечными.

Количество предельных точек функции может быть конечным, счетным или несчетным. Если спектр образует непрерывное множество точек, можно говорить о сходимости функции к интервалу.

Для описания спектра $S_x(t)$ предельных точек функции $x(t)$ можно использовать многозначную (в общем случае) функцию распределения предельных точек $F(x;t)$, характеризуемую однозначными границами $F_I(x;t)$, $F_S(x;t)$ (рис. 4).

Если в точке $t=t_0$ функция $x(t)$ сходится и имеет предел, равный a, то $F_I(x;t_0)=F_S(x;t_0)=U(x-a)$, где $U(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0, \\ 1 & при \quad x\geq 0\end{cases}$ – единичная функция, если же функция $x(t)$ расходится, то одна из границ функции распределения или обе границы описываются более сложными функциями. В случае, когда функция распределения $F(x;t)$ – однозначная, границы $F_I(x;t)$, $F_S(x;t)$ совпадают.

Для описания расходящихся функций применимы методы теории гиперслучайных явлений, в частности, методы, основанные на

– границах функции распределения $F_I(x;t)$, $F_S(x;t)$ и плотности распределения границ $f_I(x;t)=\dfrac{\mathrm{d}F_I(x;t)}{\mathrm{d}x}$, $f_S(x;t)=\dfrac{\mathrm{d}F_S(x;t)}{\mathrm{d}x}$;

– моментах границ: математических ожиданиях границ $m_I(t)$, $m_S(t)$, дисперсиях границ $D_I(t)$, $D_S(t)$ и пр.;

– границах моментов: границах математического ожидания $m_i(t)$, $m_s(t)$, границах дисперсии $D_i(t)$, $D_s(t)$ и пр.

Спектры предельных точек (частичных пределов) функции и их характеристики могут быть получены не только на основе двусторонних пределов, но и односторонних. Величины, соответствующие левосторонним пределам, будем обозначать знаком «минус», а соответствующие правосторонним пределам – знаком «плюс», например, левосторонний $S_x^-(t)$ и правосторонний $S_x^+(t)$ спектры, функции распределения предельных точек $F^-(x;t)$ и $F^+(x;t)$ соответственно левостороннего и правостороннего спектров, границы $F_I^-(x;t)$, $F_S^-(x;t)$ и $F_I^+(x;t)$, $F_S^+(x;t)$ функции распределения предельных точек соответственно левостороннего и правостороннего спектров.

Заметим, что в общем случае величины, вычисленные на основе левосторонних, правосторонних и двусторонних пределов, отличаются друг от друга, в частности, отличаются спектры $S_x^-(t)$, $S_x^+(t)$ и $S_x(t)$.

4.2. Примеры

Для иллюстрации предложенного способа описания расходящихся функций найдем границы $F_I^-(x;t)$, $F_S^-(x;t)$ функции распределения предельных точек $F^-(x;t)$ левостороннего спектра $S_x^-(t)$ функции (5) в точке $t=t_0$. Для этого разделим функцию (5) на убывающие и возрастающие полупериоды.

Сформируем из возрастающих (четных) полупериодов последовательность $\{P_k(x)\}$ ($k = 2, 4, \ldots$) с общим членом

$$P_k(x) = \frac{t - t'_k}{t''_k - t'_k}, \qquad (12)$$

где для k-го полупериода $[t'_k, t''_k]$ аргумент

$$t = t_0 + \frac{1}{\left[(-1)^k \arcsin x + \pi k\right]\omega_1}, \qquad (13)$$

а t'_k и t''_k – минимальное и максимальное значения аргумента k-го полупериода, описываемые выражениями (7).

Подставляя выражения (7) и (13) в формулу (12) и осуществляя предельный переход, можно получить

$$\lim_{k\to\infty} P_k(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x. \qquad (14)$$

Аналогичные расчеты для нечетных фрагментов функции приводят к тому же пределу (14).

На основании теоремы 6 рассчитанный предел последовательности $\{P_k(x)\}$ имеет и соответствующая последовательность частот значений $\{p_k(x)\}$.

Отсюда следует, что функция распределения предельных точек $F^-(x;t_0)$ – однозначная функция, описываемая правой частью выражения (14) (рис. 5*а*). Соответствующая плотность распределения предельных точек $f^-(x;t_0) = \frac{\mathrm{d}F^-(x;t_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ (рис. 5б).

Расчеты для нечетных фрагментов функции (6) приводят к выражению, отличающемуся от выражения (14):

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \frac{x+1}{2}. \qquad (15)$$

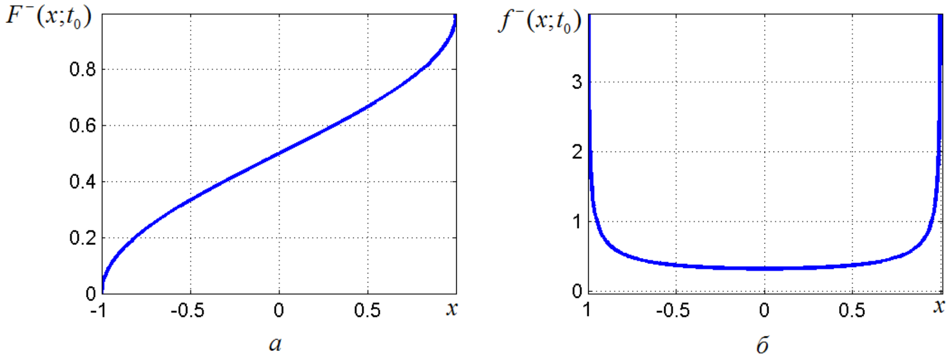


Рис. 5. Функция распределения (а) и плотность распределения (б) предельных точек левостороннего спектра $S_x^-(t)$ функции (5) в точке $t = t_0$

При $x \neq 0$ значения функций (14) и (15) отличаются между собой, а при $x = 0$ – совпадают. Поэтому на интервалах $-1 \le x < 0$, $0 < x \le 1$ функция распределения предельных точек $F^-(x;t_0)$ – неоднозначная, а при $x = 0$ – однозначная. Множество значений, которые принимает эта функция, ограничены границами

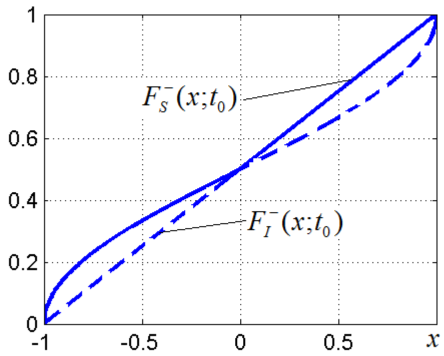


Рис. 6. Нижняя $F_I^-(x;t_0)$ и верхняя $F_S^-(x;t_0)$ границы функции распределения предельных точек левостороннего спектра $S_x^-(t)$ функции (6) в точке $t=t_0$

$$F_I^-(x;t_0)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, & если \quad -1\le x<0,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & если \quad 0\le x\le 1,\end{cases}$$

$$F_S^-(x;t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & если \quad -1\le x<0,\\ \dfrac{x+1}{2}, & если \quad 0\le x\le 1\end{cases}$$

(рис. 6).

5. Выводы

1. Систематизированы известные понятия и теоремы, касающиеся сходимости последовательностей и функций.

2. Разработан математический аппарат описания расходящихся последовательностей и функций. Введен ряд новых понятий и определений, в частности, понятия спектра предельных точек, сходимости к спектру предельных точек, функции и плотности распределения предельных точек, границ функции распределения и др. Основу предложенного подхода составляют методы теории гиперслучайных явлений.

3. Показано, что расходящиеся последовательности и функции характеризуются спектром предельных точек и границами функции распределения этих точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбань И.И. Статистически неустойчивые процессы: связь с фликкер, неравновесными, фрактальными и цветными шумами / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2011. – в печати.

2. Ильин В.А. Математический анализ / Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. – М.: Изд-во московского университета, 1985. – Т. 1. – 660 с.

3. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – М.-Л.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1958. – Т. 1. – 607 с.; 1959. – Т. 2. – 808 с.

5. Харди Г. Расходящиеся ряды / Харди Г. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. – 504 с.

6. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: ИПММС НАН Украины, 2007. – 184 с. – Режим доступа: http://ifsc.ualr.edu/jdberleant/intprob.

7. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/ gorban_i_i/index.html.

8. Горбань И.И. Особенности закона больших чисел при нарушениях статистической устойчивости / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2011. – № 7. – С. 31 – 42.

9. Gorban I.I. Disturbance of statistical stability / I.I. Gorban // Information Models of Knowledge. – Sofia: ITHEA, 2010. – P. 398 – 410.

Стаття надійшла до редакції 17.01.2012