УДК 519.6

А.Н. ХИМИЧ, С.А. ВОЙЦЕХОВСКИЙ, В.Н. БРУСНИКИН

ДОСТОВЕРНОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ

Abstract: *On the basis of a method of singular decomposition of the matrices and the propeties of corresponding projection matrices, there are obtained the new error estimates of the normal pseudosolution in the general case of the non-consistent systems of linear algebraic equations with perturbed coefficients. The cases of decreasing rank of the perturbed matrix, its saving and increasing are discussed.*
Key words: *matrice, error, linear algebraic equations.*

Анотація: *На основі методу сингулярного розвинення матриць та властивостей відповідних проекційних матриць отримані нові оцінки похибки нормального псевдорозв'язку в загальному випадку несумісних систем лінійних алгебраїчних рівнянь зі збуреними коефіцієнтами. Досліджено випадки зменшення рангу збуреної матриці, його збереження, та збільшення.*
Ключові слова: *матриця, похибка, лінійні алгебраїчні рівняння.*

Аннотация: *На основании аппарата сингулярного разложения матриц и свойств соответствующих проекционных матриц получены новые оценки погрешности нормального псевдорешения в общем случае несовместных систем линейных алгебраических уравнений с возмущенными коэффициентами. Рассмотрены случаи уменьшения ранга возмущенной матрицы, его сохранения и увеличения*
Ключевые слова: *матрица, погрешность, линейные алгебраические уравнения.*

Математические модели с приближенно заданными исходными данными необходимо рассматривать как задачи с априори неизвестными математическими свойствами: свойства исходной математической модели могут отличаться от свойств математической модели с приближенно заданными исходными данными. В этих условиях создание математического аппарата для контроля за качеством получаемого решения является первостепенной задачей. В работе на основании теории возмущений исследуется погрешность решения линейных математических моделей, которые формулируются в виде систем линейных алгебраических уравнений для матриц произвольного вида и ранга.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в общем случае несовместную систему линейных алгебраических уравнений с точно заданными исходными данными (математическую модель с точно заданными исходными данными)

$$Ax = b \tag{1}$$

с $m \times n$ матрицей и систему линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными исходными данными (математическая модель с приближенно заданными исходными данными)

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{b}\ , \qquad \Delta A = A - \overline{A}, \quad \Delta b = b - \overline{b}\ . \tag{2}$$

Будем предполагать, что для погрешности элементов матрицы и правой части выполняются следующие соотношения:

$$\|\Delta A\| \le \varepsilon_A \|A\|, \qquad \|\Delta b\| \le \varepsilon_b \|b\|. \tag{3}$$

Получим оценки наследственной погрешности в общем случае нормального псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений. Наибольший практический интерес представляет случай, когда ранг матрицы не сохраняется при возмущении ее коэффициентов. Для полноты изложения здесь получены также известные результаты [1].

2. Матрицы произвольного ранга

Сначала рассмотрим случай, когда ранг матрицы не изменяется при возмущении ее элементов.

Теорема 1. *Предположим, что* $\| \Delta A \| \| A^{+} \| < 1$, $rank\overline{A} = rankA = k$ *. Тогда имеет место оценка*

$$\frac{\|x-\overline{x}\|}{\|x\|} \le \frac{h}{1-h\varepsilon_A}\left(2\varepsilon_A + \varepsilon_{b_k} + h\varepsilon_A \frac{\|b-b_k\|}{\|b_k\|}\right), \tag{4}$$

где b_k *– проекция правой части задачи* (1) *на главное левое сингулярное подпространство матрицы A* [2]*, т.е.* $b_k \in \operatorname{Im} A$*;* $h = h(A)$ *– число обусловленности матрицы A; символ* $\| \ \|$*, если не оговорено дополнительно, обозначает евклидову векторную норму и согласованную с ней спектральную матричную норму*; A^{+} *– псевдообратная матрица Мура-Пенроуза к матрице A*.

Доказательство. Оценка погрешности следует из соотношения

$$x - \overline{x} = (A^{+} - \overline{A}^{+})b + \overline{A}^{+}(b - \overline{b}), \tag{5}$$

где для разности $A^{+} - \overline{A}^{+}$ справедливо представление [1]

$$A^{+} - \overline{A}^{+} = \overline{A}^{+}\Delta A A^{+} - \overline{A}^{+}\overline{A}^{T+}\Delta A(I-Q) - (I-\overline{P})\Delta A^{T} A^{T+} A^{+}, \tag{5a}$$

где $Q = AA^{+}, \overline{P} = \overline{A}^{+}\overline{A}.$

Учитывая, что

$$(I-Q)b = (I-Q)r,\ r = b - Ax$$

соотношения (5), (5a), получаем

$$x-\overline{x} = \overline{A}^{+}\Delta A A^{+} b - \overline{A}^{+}\overline{A}^{T+}\Delta A(I-Q)r - (I-\overline{P})\Delta A^{T} A^{T+} A^{+} b + \overline{A}^{+}(b-\overline{b}).$$

Принимая во внимание, что $\|I-Q\| \le 1,$ $\|I-\overline{P}\| \le 1,$ а также неравенство

$$\|\overline{A}^{+}\| \le \frac{\|A^{+}\|}{1-\|\Delta A\|\|A^{+}\|}, \tag{6}$$

приходим к оценке:

$$\frac{\|x-\overline{x}\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{+}\|\|A\|}{1-\|\Delta A\|\|A^{+}\|}\left(2\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\|x\|} + \|A\|\|A^{+}\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|}\right). \tag{7}$$

Так как $Ax = b_k$, $\|r\| = \|b - b_k\|$, то из (7) следует (4), т.е. утверждение теоремы 1.

Далее рассмотрим случай, когда ранг матрицы неполного ранга может измениться при возмущении ее элементов.

Теорема 2. *Предположим, что выполняется условие* $\|\Delta A\| \|A^+\|$ < 1/2, rank $\bar{A}$ > rank *A* = *k*. *Тогда имеет место оценка*

$$\frac{\|x-\bar{x}_k\|}{\|x\|} \le \frac{h}{1-2h\varepsilon_A}\left(2\varepsilon_A + \varepsilon_{b_k} + h\varepsilon_A \frac{\|b-b_k\|}{\|b_k\|}\right). \tag{8}$$

Доказательство. Для получения оценки используем способ из [3], основанный на сингулярном разложении матриц. Представим $\bar{A}$ в виде

$$\bar{A} = \bar{U}\bar{\Sigma}\bar{V}^T. \tag{9}$$

Как известно, какова бы ни была прямоугольная матрица $\bar{A}$ размера $m \times n$, всегда существует разложение (9), где $\bar{U}, \bar{V}$ – ортогональные матрицы; $\bar{\Sigma}$ – прямоугольная матрица размера $m \times n$ с неотрицательными элементами на диагонали, которые являются сингулярными числами матрицы $\bar{A}$.

Подпространство, совпадающее с линейной оболочкой первых *к* столбцов матрицы $\bar{V}$ ($\bar{U}$), называется главным правым (левым) сингулярным подпространством матрицы $\bar{A}$.

Отметим также, что главное правое (левое) сингулярное подпространство матрицы $\bar{A}$ совпадает с подпространством образов матрицы $\bar{A}^T$ *(*матрицы $\bar{A}$).

Наряду с (9) рассмотрим разложение

$$\bar{A}_k = \bar{U}\bar{\Sigma}_k\bar{V}^T, \tag{10}$$

где $\bar{\Sigma}_k$ – прямоугольная матрица, первые *к* диагональных элементов которой отличны от нуля и совпадают с соответствующими элементами матрицы $\bar{\Sigma}$, а все остальные элементы равны нулю.

Используем тот факт из [2], что нормальное псевдорешение $\bar{x}_k$ задачи наименьших квадратов для системы

$$\bar{A}_k\bar{x}_k = \bar{b} \tag{11}$$

является ортогональной проекцией нормального псевдорешения задачи $\bar{A}\bar{x} = \bar{b}$ на главное правое сингулярное подпространство матрицы $\bar{A}$ размерности *к*. Таким способом построенная матрица (10) имеет ранг *к* , такой же, как и матрица невозмущенной задачи. Таким образом, проблема оценки погрешности псевдорешения для матриц, ранг которых изменился, сведена к случаю, когда ранги матриц одинаковы.

Для оценки погрешности в этом случае используем представления, аналогичные (5), (5а):

$$x - \bar{x}_к = (A^+ - \bar{A}_k{}^+)b + \bar{A}_k{}^+(b - \bar{b}), \tag{11a}$$

$$A^+ - \bar{A}_k{}^+ = \bar{A}_k{}^+\Delta A A^+ - \bar{A}_k{}^+\bar{A}_k{}^{T+}\Delta A^T(I-Q) - (I-\bar{P}_k)\Delta A^T A^{T+}A^+.$$

Представление (11а) получено из соотношения

$$\overline{A}_k^+ - A^+ = \left[P + \left(I - \overline{P}\right)\right]\left(\overline{A}_k^+ - A^+\left[Q + \left(I - Q\right)\right]\right) = \left[\overline{A}_k^+ \overline{A} + \left(I - \overline{A}_k^+ \overline{A}\right)\right] \times$$
$$\left(\overline{A}_k^+ - A^+\right)\left[AA^+ + \left(I - AA^+\right)\right] + \left[\overline{P}_k + \left(I - \overline{P}_k\right)\right]\left(\overline{A}_k^+ - A^+\right)\left[Q + \left(I - Q\right)\right] =$$
$$\overline{P}_k \overline{A}_k^+ Q + \overline{P}_k \overline{A}_k^+ \left(I - Q\right) - \overline{P}_k A^+ Q - \overline{P}_k A^+ \left(I - Q\right) + \left(I - \overline{P}_k\right)\overline{A}_k^+ \left(I - Q\right) -$$
$$\left(I - \overline{P}_k\right)A^+ Q + \left(I - \overline{P}_k\right)A^+ Q\left(I - Q\right) = \left(\overline{A}_k^+ Q - \overline{P}_k A^+\right) + \overline{A}_k^+ \left(I - Q\right) - \left(I - \overline{P}\right)A^+ =$$
$$\overline{A}_k^+ AA^+ - \overline{A}_k^+ \overline{A} A^+ + \overline{A}_k^+ \left(I - Q\right) - \left(I - \overline{P}_k\right)A^+$$

с использованием следующих проекционных матриц:

$$\overline{P}_k = \overline{A}_k^T \overline{A} = A^T \overline{A}_k^{T+}, \overline{Q}_k = \overline{A}\overline{A}_k^T = \overline{A}_k^{T+} \overline{A}^T, \quad P_k = A_k^T A = A^T A_k^{T+}, Q_k = AA_k^T = A_k^{T+} A^T.$$

Учитывая этот факт и свойства проекционных матриц [1]

$$\left\| I - Q \right\| \le 1, \quad \left\| I - \overline{P}_k \right\| \le 1,$$

из (11а) получим

$$\frac{\left\| x - \overline{x}_k \right\|}{\left\| x \right\|} \le \frac{\left\| A^+ \right\| \left\| A \right\|}{1 - \left\| \Delta A_k \right\| \left\| A^+ \right\|} \left(2\frac{\left\| \Delta A \right\|}{\left\| A \right\|} + \frac{\left\| \Delta b \right\|}{\left\| A \right\| \left\| x \right\|} + \left\| A \right\| \left\| A^+ \right\| \frac{\left\| \Delta A \right\|}{\left\| A \right\|} \frac{\left\| r \right\|}{\left\| A \right\| \left\| x \right\|} \right). \tag{12}$$

Для оценки $\Delta A_k = A - \overline{A}_k$ воспользуемся [4]: $\left\| \Delta A_k \right\| \le 2\left\| \Delta A \right\|$. Кроме того, условие теоремы $\left\| \Delta A \right\| \left\| A^+ \right\| < 1/2$ приводит к неравенству $\left\| \Delta A_k \right\| \left\| A^+ \right\| < 1$, что является необходимым для корректности выражения (12). Учитывая это, из (12) получаем оценку (8) для наследственной погрешности нормального псевдорешения, что и требовадось доказать.

Теорема 3. *Предположим, что* $rankA > rank\overline{A} = l$, $\dfrac{\left\| \Delta A \right\|}{\sigma_l} < 1/2$. *Тогда имеет место оценка*

$$\frac{\left\| x_l - \overline{x} \right\|}{\left\| x \right\|} \le \frac{\sigma_1 / \sigma_l}{1 - 2\left\| \Delta A \right\| / \sigma_l} \left(2\varepsilon_A + \varepsilon_{b_l} + \varepsilon_A \frac{\sigma_1}{\sigma_l} \frac{\left\| b - b_l \right\|}{\left\| b_l \right\|} \right), \tag{13}$$

где x_l *– проекция нормального псевдорешения задачи* (1) *на правое главное сингулярное подпространство матрицы А размерности* l *;* b_l *– проекция правой части b на главное левое сингулярное подпространство размерности* l *матрицы А;* σ_i *– сингулярные числа матрицы А.*

Доказательство. Наряду с задачей (1) рассмотрим задачу определения нормального псевдорешения системы

$$A_l x_l = b \tag{14}$$

с матрицей $A_l = U \sum_l V^{\mathrm{T}}$ ранга l.

Записывая (11а) для задач (2), (14), ранги матриц которых совпадают,

$$A_l^+ - \overline{A}^+ = \overline{A}^+ \Delta A A_l^+ - \overline{A}^+ \overline{A}^{T+} \Delta A^T (I - Q_l) - (I - \overline{P}) \Delta A^T A_l^{T+} A_l^+,$$

$$x_l - \overline{x} = (A_l^+ - \overline{A}^+)b + \overline{A}^+(b - \overline{b})$$

и, учитывая свойства проекционных матриц, придем к оценке:

$$\frac{\|x_l - \overline{x}\|}{\|x_l\|} \leq \frac{\|A_l\| \|A_l^+\|}{1 - \|\Delta A_l\| \|A_l^+\|} \left(2\frac{\|\Delta A\|}{\|A_l\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|A_l\| \|x_l\|} + \|A_l\| \|A_l^+\| \frac{\|\Delta A\| \|r\|}{\|A_l\| \|A_l\| \|x_l\|}\right), \qquad (15)$$

откуда следует (13), т.е. утверждение теоремы 3.

3. Матрицы полного ранга

Для матриц полного ранга существенно то обстоятельство, что их ранг не меняется от возмущения элементов, если выполнено условие $\|\Delta A\| \|A^+\| < 1$. Кроме того, в дальнейшем будем использовать следующее свойство матриц полного ранга [2]:

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \text{ для } n \leq m \text{ и } A^+ = A^T (AA^T)^{-1} \text{ для } n \geq m. \qquad (16)$$

Аналогичные соотношения выполняются и для матрицы $\overline{A}$.

Теорема 4. *Предположим, что* $\|\Delta A\| \|A^+\| < 1$, $m > n = k$. *Тогда имеет место оценка*

$$\frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{h}{1 - h\varepsilon_A}\left(\varepsilon_A + \varepsilon_{b_k} + h\varepsilon_A \frac{\|b - b_k\|}{\|b_k\|}\right). \qquad (17)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 4, как и ранее, будем использовать соотношение (5). В силу (16) $\overline{P} = \overline{A}^+ \overline{A} = I$, так что из (5а) имеем равенство

$$A^+ - \overline{A}^+ = \overline{A}^+ \Delta A A^+ - \overline{A}^+ \overline{A}^{T+} \Delta A (I - Q),$$

используя которое приходим к (17).

Теорема 5 *Предположим, что* $\|\Delta A\| \|A^+\| < 1$, $n > m = k$. *Тогда*

$$\frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{h}{1 - h\varepsilon_A}(2\varepsilon_A + \varepsilon_b). \qquad (18)$$

Доказательство. Поскольку в этом случае $Q = AA^+ = I$, то выражение для $A^+ - \overline{A}^+$ в силу (5а) приобретает вид

$$A^+ - \overline{A}^+ = \overline{A}^+ \Delta A A^+ - (I - \overline{P}) \Delta A^T A^{T+} A^+.$$

Дальнейшие выкладки аналогичны предыдущим. В результате приходим к оценке (18).

Теорема 6. *Предположим, что* $\|\Delta A\| \|A^+\| < 1$, $m = n = k$. *Тогда*

$$\frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{h}{1 - h\varepsilon_A}(\varepsilon_A + \varepsilon_b). \qquad (19)$$

Доказательство. Оценка следует из (5) и равенства

$$A^{+} - \overline{A}^{+} = \overline{A}^{+} \Delta A A^{+}, \tag{20}$$

которое следует из (5а) с учетом того, что для невырожденных матриц всегда имеют место равенства $Q = I, \quad \overline{P} = I$.

Замечание 1. Оценки (4), (8), (.13), (17), (.18), (19) имеют мажорантный характер на всем классе матриц для используемой модели погрешности (3). Тем не менее, по крайней мере, для невырожденных матриц в [5] показана достижимость оценки (19) для первой матричной нормы и тем самым доказана неулучшаемость оценки в классе невырожденных матриц.

Замечание 2. Для других ограничений на погрешность исходных данных отличных от (3) могут быть получены оценки, учитывающие их вид. Например, для $\Delta A = \varepsilon_A A$, $\Delta b = \varepsilon_b b$ из (5), (20) получим оценку

$$\frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|} \le \frac{(\varepsilon_A + \varepsilon_b)}{1 - \varepsilon_A}, \tag{21}$$

не содержащую множитель $h(A)$.

Замечание 3. Связь между числом обусловленности задачи с точными исходными данными *h*(*A*) и числом обусловленности матрицы системы с приближенно заданными исходными данными $h(\overline{A})$ устанавливает оценка

$$\frac{1 - \varepsilon_A}{1 + \varepsilon_A h} \le \frac{h(A)}{h(\overline{A})} \le \frac{1 + \varepsilon_A}{1 - \varepsilon_A h}, \tag{22}$$

которая получена для спектральной матричной нормы на основании теории возмущения сингулярных чисел [1].

Замечание 4. Наряду с известным представлением (5а) имеет место соотношение

$$\overline{A}^{+} - A^{+} = -A^{+} \Delta A \overline{A}^{+} - A^{+} A^{+} \Delta A (I - \overline{Q}) + (I - P) \Delta A \overline{A}^{+} \overline{A}^{+},$$

в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой. Здесь $\overline{Q} = \overline{A}\overline{A}^{+}, \ P = A^{+} A$.

Используя выражение для погрешности:

$$\overline{x} - x = (\overline{A}^{+} - A^{+})\overline{b} + A^{+}(\overline{b} - b), \tag{23}$$

и учитывая, что $(I - \overline{Q})\overline{b} = (I - Q)\overline{r}, \ \overline{r} = \overline{b} - \overline{A}\overline{x},$ из (23) получим

$$\overline{x} - x = -A^{+} \Delta A \overline{A}^{+} \overline{b} - A^{+} A^{+} \Delta A (I - \overline{Q}) \overline{r} + (I - P) \Delta A \overline{A}^{+} \overline{A}^{+} \overline{b} + A^{+}(\overline{b} - b). \tag{24}$$

Отсюда следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 7. *Предположим, что выполняется условие* $\|\Delta A\| \|\overline{A}^{+}\| < 1$ *и* $rank \overline{A} = rank A = k$. *Тогда для погрешности нормального псевдорешения имеет место оценка*

$$\frac{\|\bar{x}-x\|}{\|\bar{x}\|} \le \frac{h(\bar{A})}{1-h(\bar{A})\varepsilon_{\bar{A}}} \left(2\varepsilon_{\bar{A}} + \varepsilon_{\bar{b}_k} + h(\bar{A})\varepsilon_{\bar{A}} \frac{\|\bar{b}-\bar{b}_k\|}{\|\bar{b}_k\|} \right), \tag{25}$$

где $\bar{b}_k \in lm\bar{A}$ *– проекция правой части* $\bar{b}$ *на образ матрицы* $\bar{A}$ *размерности* k,

$\|\Delta A\| \le \varepsilon_{\bar{A}} \|\bar{A}\|$; $\|\Delta b\| \le \varepsilon_{\bar{b}_k} \|\bar{b}_k\|$.

Таким образом, оценки наследственной погрешности, правая часть которых определяется приближенными данными, могут быть получены и без неравенств (22). Оценки, аналогичные (25), могут быть получены для всех рассмотренных ранее случаев.

Замечание 5. При выполнении условий теоремы 7, используя неравенство

$$\frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|} \le \frac{\|x-\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \left(1 + \frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|} \right)$$

и неравенство (25) придем к оценке

$$\frac{\|\bar{x}-x\|}{\|x\|} \le \frac{\beta}{1-\beta}, \quad \beta = \frac{h(\bar{A})}{1-h(\bar{A})\varepsilon_{\bar{A}}} \left(2\varepsilon_{\bar{A}} + \varepsilon_{\bar{b}_k} + h(\bar{A})\varepsilon_{\bar{A}} \frac{\|\bar{b}-\bar{b}_k\|}{\|\bar{b}_k\|} \right). \tag{26}$$

Оценки, аналогичные (26), очевидно могут быть получены для всех ранее рассмотренных случаев.

4. Заключение

В работе на основании аппарата сингулярного разложения матриц и свойств соответствующих проекционных матриц (11а) получены новые, отличные от [6], оценки наследственной погрешности в общем случае нормального псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрены случаи уменьшения ранга возмущенной матрицы, его сохранения и увеличения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 230 с.
2. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
3. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 3. – С. 142 – 145.
4. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения вырожденных СЛАУ // Математическое и программное обеспечение прикладных систем новых классов и поколений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1996. – С. 63 – 67.
5. Молчанов И.Н, Николенко Л.Д., Кириченко М.П. Об одном пакете программ для решения систем линейных алгебраических уравнений // Кибернетика. – 1972. – № 1. – С. 127 – 134.
6. Химич А.Н. Оценки полной погрешности решения систем линейных алгебраических уравнений для матриц произвольного ранга // Компьютерная математика: Сборник научных трудов. – Киев: Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2002. – № 2. – С. 41 – 49.