УДК 512.81 + 517.977.1 + 681.5

**В.И. ЛЕГЕНЬКИЙ**

# О ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИНВАРИАНТНОЙ ПРОГРАММОЙ

## 1. Введение

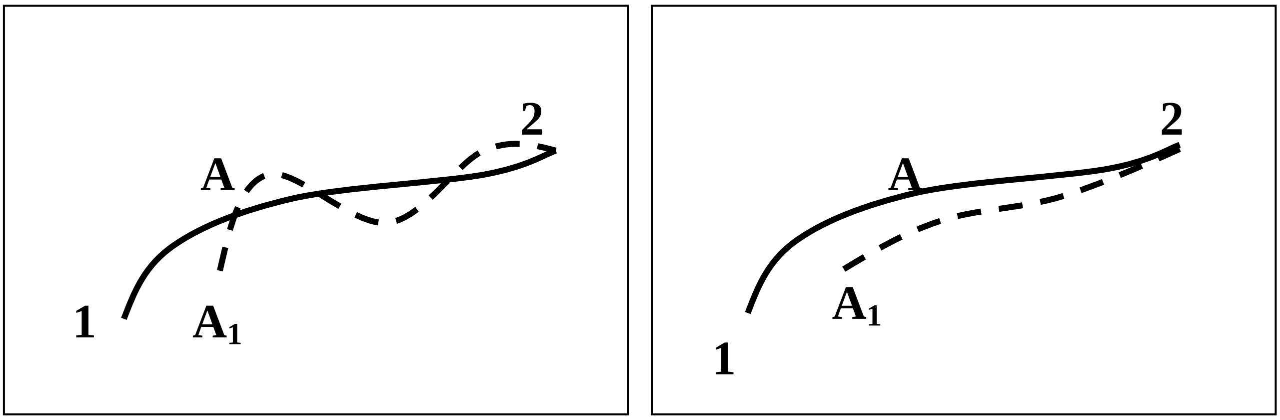
Предметом настоящего исследования является проблема синтеза для задач терминального управления. В научной литературе по терминальному управлению первой терминальной задачей считается "задача Ламберта" [1]. Она состоит в нахождении кеплеровской орбиты, связывающей два данных вектора положения при заданном интервале времени. Сформулированная и решенная немецким астрономом Иоганном Ламбертом в 1761 г. в его труде "Instignores Orbital Comertarume Proprietates" эта задача не потеряла своей актуальности и в сегодняшние дни при решении задач управления межорбитальными переходами искусственных космических тел. Более сложные (в динамическом отношении) терминальные задачи возникают в современной динамике полета летательных аппаратов различного класса. Посадка, приземление (прилунение), стыковка (сближение), расходование топлива ракетами с ЖРД – вот далеко не полный перечень задач, которые могут быть квалифицированы как терминальные. Само понятие "терминальное управление" сформировалось за последние 20–30 лет. Приведем необходимое определение, рекомендуемое терминологией АН СССР [2].

***Определение 1:*** *Терминальное управление – это управление, цель которого заключается в переводе объекта управления в заданное конечное состояние в заданный момент времени.*

Усилиями большого числа ученых, среди которых А.Я. Андриенко, А.П. Батенко, Л.М. Бойчук, А.С. Галлиулин, В.П. Иванов, Б.Н. Петров, П.Д. Крутько, М.М. Хрусталев, А.В. Тимофеев, А.П. Крищенко, Г.С. Поспелов, А.А. Красовский, В.Н. Буков, Ю.П. Гуськов, Д.Е. Охоцимский, Ю.Ф. Голубев, Ю.Г. Сихарулидзе, Г.Н. Яковенко [1, 3, 4, 6–8, 11–16], многие из задач терминального управления нашли свое алгоритмическое решение. Между тем, явную аналитическую структуру решения терминальных задач удалось получить для сравнительно узкого класса математических моделей управляемых систем. Попытка расширить этот класс задач, предпринимаемая в настоящем исследовании, связана с теоретико-групповой идеей "размножения решений" и естественным образом приводит к введению нового принципа управления, который называется ниже "рекурсивный принцип управления". О том, как с помощью этого принципа можно решать терминальные задачи (в смысле получения аналитических соотношений для законов управления), и идет речь в настоящей статье.

## 2. Особенности задач терминального управления

Рассуждая математически, главная особенность терминальных задач состоит в неединственности их решения. Иными словами, жесткие требования по точности управления предъявляются только к конечной (терминальной) точке, тем самым допуская для формирования оставшейся части траектории известный произвол. Поэтому в ситуации, когда происходит отклонение объекта от некоторой программной траектории, нет особого смысла в стабилизации объекта управления на исходной программной траектории, а в каждой текущей точке возможно построение «новой» программы, которая должна удовлетворять тем же терминальным условиям. Возможные стратегии поведения показаны на рис. 1.




а) стабилизация на программной траектории б) управление по «новой» программе

Рис. 1. Возможные варианты программного управления

### 3. Несколько замечаний о принципах управления

Из предыдущих рассуждений ясно, что наиболее адекватным существу задачи терминального управления является управление с обратной связью [2].

***Определение 2:*** *Управление с обратной связью – это управление, при котором текущие управляющие воздействия вырабатываются с учетом состояния объекта управления.*

Однако, кроме учета текущего состояния объекта управления, закон управления должен обеспечивать точное выполнение терминальных условий и известную «близость» новых траекторий (программ) к исходной программной траектории, соответствующей номинальным начальным условиям. Наиболее естественным представляется способ погружения исходной программной траектории $x_{np}(t)$ в некоторое параметрическое семейство $x = F(x_{np}(t), a)$, в котором каждому значению параметра $a$ соответствует вполне определенная траектория (включая исходную программную траекторию). Если в данном семействе зависимость от параметра непрерывная, то совокупность всех таких траекторий «всюду плотно» заполнит фазовое пространство и тем самым будет гарантировать существование «новой» программы для любого реализовавшегося состояния. Вопрос, следовательно, сводится к тому, как конструктивно воспользоваться имеющимся функциональным произволом для выбора функции $F(\bullet)$ таким образом, чтобы удовлетворялись заданные конечные условия. Достаточно конструктивное и элегантное решение данной задачи возможно для класса объектов управления, математические модели которых могут быть представлены в виде

$$x^{(n)} = u\,, \tag{1}$$

т.е., по существу, для цепочки интеграторов. К виду (1) могут быть приведены все линейные управляемые системы (с помощью линейных преобразований), а также некоторые нелинейные системы (например, системы с линейно входящими управлениями, соответственно, с использованием нелинейных преобразований). Для нелинейных управляемых систем вида

$$\dot{x}^i = f^i(t, x, u); \qquad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

которые не приводятся к линейному виду, подходы, развиваемые в методе так называемых «обратных задач динамики», не применимы. Для таких задач, возникающих, в частности, при управлении спуском космических аппаратов [4], получил распространение «метод модулирующих функций». В этом методе управляющие воздействия задаются эмпирически в виде некоторого параметрического семейства $u = G(u_{пр}(t), a)$, а подбор параметров («параметры модуляции», а в общем случае «модулирующие функции») осуществляется по результатам прогнозирования из условия «попадания» в терминальную точку. Как правило, используются деформации сдвига аргумента и растяжения вида

$$u(t) = [1 + a^2]u_{пр}(t + a^1). \tag{3}$$

В общем случае размерность вектора параметров согласуется с числом терминальных условий, однако при большом их числе выбор эмпирической зависимости (3) становится затруднительным. Кроме того, как отмечено в работе [4], «влияние параметров становится существенно нелинейным, в связи с чем ухудшается процесс определения параметров модуляции». Причина здесь состоит в том, что программа (3) никак не связана с дифференциальной структурой объекта управления (2).

**4. Принцип рекурсивного управления**

Развиваемый здесь подход к построению закона управления основан на структурных свойствах объекта управления (2), которые могут быть выявлены с использованием понятия непрерывной группы преобразований симметрии, допускаемой системой (2).

***Определение 3 [9, 10]:*** *Группа симметрий системы (2) – это любая локальная группа преобразований, действующая в пространстве независимых и зависимых переменных, которая переводит решения системы (2) в её же решения.*

Мы не будем здесь подробно останавливаться на алгоритмах вычисления групп – это сложная самостоятельная задача, которая анализируется, например, в работах [5, 16]. Заметим лишь, что любая ***r***-параметрическая группа Ли однозначно характеризуется своими инфинитезимальными образующими. Для дальнейших построений нам важно будет сделать 2 допущения:

1. Исходная система (2) допускает некоторую непрерывную $(2n+1)$ – мерную группу Ли.

2. В пространстве переменных (время $\times$ координаты $\times$ управления) указанная группа действует транзитивно (т.е. любая точка пространства действием группы переводится в любую точку).

Выполнение этих условий позволяет сформулировать основной теоретический результат данной работы в виде следующей теоремы:

***Теорема:*** *Пусть* $(x_{пр}(t), u_{пр}(t))$ *– решение задачи терминального управления для некоторых граничных условий* $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_k$; $G - (2n+1)$ *-мерная группа симметрий, действующая транзитивно в* *пространстве $T \times X \times U$ , тогда закон терминального управления может быть представлен в виде одного функционального соотношения относительно двух функционально независимых инвариантов группы $G$ .*

На основании сформулированной теоремы можно дать конструктивный алгоритм построения закона управления, считая известными:

- – заданное терминальное многообразие $(t = T, x = x_k)$ ;
- – известное программное решение $\left(x = x_{пр}(t), u = u_{пр}(t)\right)$;
- – $(2n+1)$ – параметрическую транзитивную группу симметрий.

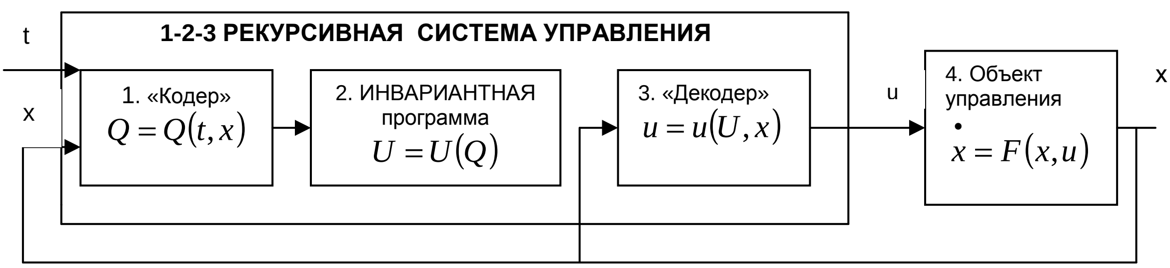
***Алгоритм:***

- 1. Сужаем действие группы, требуя инвариантности заданного терминального многообразия; полученные на этом шаге симметрии уже переводят исходное программное решение в другие решения, которые также проходят через терминальную точку.
- 2. Проверяем не является ли известное программное решение инвариантным многообразием группы; если нет – переходим к шагу 3, в противном случае следует выбрать другую группу (либо использовать свойство инвариантности – этот случай мы здесь не рассматриваем).
- 3. Находим инварианты «оставшихся» $n$ операторов симметрии (их будет $n+2-n=2$ ); среди этих 2 инвариантов один можно считать «обобщенным управлением» – обозначим его $U$ , а другой – «обобщенной координатой» – обозначим его $Q$ .

4. Исключая из $(n+1)$ уравнения для описания программной траектории и 2 уравнений для инвариантов $(n+2)$ переменных $(t, x, u)$, получаем единственное соотношение между обобщенной координатой и обобщенным управлением вида $U = U(Q)$. Это и есть искомое представление программы в инвариантной форме (или, проще говоря, инвариантная программа).

5. Подставляя в соотношения для инвариантной программы исходные выражения для $U, Q$, получаем обычное представление закона управления с обратной связью $u = u(t, x)$.

Функционирование алгоритма может быть представлено структурной схемой, представленной на рис. 2.




t – время; x – фазовые координаты; u – управления;

Q – обобщенные координаты; U – обобщенные управления.

Рис. 2. Функциональная схема рекурсивной системы управления

Кратко поясним изображенные на рисунке блоки. Блок, условно названный «КОДЕР» выполняет вычисление обобщенной координаты по текущим и заданным конечным значениям координат. В блоке «ИНВАРИАНТНАЯ ПРОГРАММА» по заданным значениям обобщенной координаты $Q$ вычисляется значение обобщенного управления $U$. В последнем блоке «ДЕКОДЕР» происходит определение реального управляющего воздействия по значениям обобщенного управления и текущим значениям координат. Система управления с указанной инвариантной программой названа «рекурсивной системой управления», поскольку инвариантное представление программы по существу задает рекурсивную связь между исходной программой и любой «новой» в зависимости от реализовавшегося состояния объекта управления, причем эта связь осуществляется динамически в процессе функционирования системы. Проследим процедуру синтеза и функционирование алгоритма на примере.

**5. Пример**

Рассмотрим задачу терминального управления для нелинейной системы вида

$$\dot{x} = -u^2 ;\ \dot{y} = u , \tag{4}$$

где $(x, y)$ – фазовые координаты;

$u$ – управление;

точка означает дифференцирование по времени $t$.

Пусть конечные (терминальные) условия заданы соотношениями

$$t - T = 0 ;\ x - x_k = 0 ;\ y - y_k = 0 , \tag{5}$$

а программная траектория задана зависимостями

$$u_{np} = t ; \qquad x_{np} = -\frac{t^3}{3} ; \qquad y_{np} = \frac{t^2}{2} . \tag{6}$$

Из условий (5) и (6) следует, что для конечных условий выполняются соотношения

$$x_k = -\frac{T^3}{3} \quad ; \qquad y_k = \frac{T^2}{2} . \tag{7}$$

Проведем синтез управления в соответствии с вышеприведенным алгоритмом:

1. На первом шаге воспользуемся допускаемой системой (4) бесконечномерной алгеброй симметрий, вычисленной в [5]. Для наших целей достаточно взять $2n+1=5$ – мерную подалгебру с образующими

$$X_1 = \partial_t ;\ X_2 = \partial_x ;\ X_3 = \partial_y ;\ X_4 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y ;\ X_5 = u\partial_u + 2x\partial_x + y\partial_y . \tag{8}$$

Требуя инвариантности многообразия (5), сузим алгебру (8) до двух операторов

$$Y_1 = (t-T)\partial_t + (x - x_k)\partial_x + (y - y_k)\partial_y ;\ Y_2 = u\partial_u + 2(x - x_k)\partial_x + (y - y_k)\partial_y . \tag{9}$$

2. На втором шаге убеждаемся, что исходная программа неинвариантна относительно операторов $Y_1$ и $Y_2$ .

3. На третьем шаге находим 2 инварианта операторов $Y_1$ и $Y_2$ :

$$Q = \frac{(t-t)(x-x_k)}{(y-y_k)^2} \; ; \; U = \frac{u(t-T)}{(y-y_k)^2} \; . \tag{10}$$

4. Четвертый шаг связан с исключением из соотношений (5), (6), (10) фазовых координат и времени. Опуская промежуточные выкладки, окончательно получаем закон управления в инвариантной (неявной) форме в виде

$$(U-1)^2 + 3(Q+1) = 0 \, . \tag{11}$$

5. На заключительном шаге можно подставить значения ***U*** и ***Q*** из соотношений (10) в соотношение (11) и получить закон управления в исходных переменных, но из-за громоздкости полученных выражений мы его здесь не приводим. Закон управления (11) порождает двухпараметрическое семейство траекторий

$$x = x_k - C_1^2 \frac{(t-T)^3}{3} - (t-T)[C_2 \pm C_1(t-T)]^2 \; ; \; y = y_k + (t-T)[C_2 \pm C_1(t-T)] \, , \tag{12}$$

где выбор произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$ определяется начальными условиями. Исходной программной траектории соответствуют значения $C_1 = 1/2$ ; $C_2 = T$ .

**6. Выводы**

В данной статье был предложен метод синтеза управлений для класса терминальных задач, математические модели которых обладают свойствами симметрии. Это позволяет эффективно решать задачи синтеза не только для линейных систем, но и для нелинейных. Процедура синтеза предполагает формирование на основе заданной программной траектории и операторов симметрии некоторого «обобщенного управления» и некоторой «обобщенной координаты», которые связаны между собой инвариантным представлением исходной (заданной) программы. Получаемые законы управления могут иметь вид неявных зависимостей и имеют особенности в конечной точке, однако их рассмотрение выходит за рамки настоящей работы.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**


1. Бортовые терминальные системы управления: Принципы построения и элементы теории / Б.Н. Петров, Ю.П. Портнов-Соколов, А.Я. Андриенко, В.П. Иванов. – М.: Машиностроение, 1983. – 200 с.
2.Теория управления. Терминология. – М.: Наука, 1988. – Вып. 107. – 56 с.
3. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. – М.: Наука, 1987. – 232 с.
4. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г. Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5. Lehenkyi V. Point symmetries of controlled systems and their applications // J. Nonlin. Math. Phys. –1997. – N 1–2. – P. 168 – 172.
6. Тараненко В.Т., Момджи В.Г. Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета. – М.: Машиностроение, 1986. – 128 с.
7. Батенко А.П. Управление конечным состоянием движущихся объектов. – М.: Советское радио, 1977. – 256 с.
8. Батенко А.П. Системы терминального управления. – М.: Радио и связь, 1984. – 160 с.
9. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

10. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
11. Хрусталев М.М. Методы теории инвариантности в задачах синтеза законов терминального управления летательными аппаратами. – М.: МАИ, 1987. – 51 с.
12. Бойчук Л.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. – М.: Энергия, 1971. – 112 с.
13. Галлиулин А.С. Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
14. Жевнин А.А. Принципы построения систем терминального управления нестационарными линейными объектами на основе обратной задачи динамики // Аналитические методы синтеза регуляторов. – Саратов, 1978. – С. 89 – 99.
15. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. – М.: Наука, 1982. – 352 с.
16.Яковенко Г.Н. Решение задачи управляемости с использованием симметрии // Прикладная механика и процессы управления. – М.: Изд-во МФТИ, 1991. – С. 17 – 31.