УДК 519.816:351.785

В.І. ЛЕГЕНЬКИЙ, Й. РУДОЛЬФ

ГРУПОВІ ВЛАСТИВОСТІ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Анотація. *Досліджуються групові властивості систем керування третього порядку, зокрема, питання існування твірної функції симетрій.*
Ключові слова: *системи керування, групи Лі, симетрійний аналіз.*

Аннотация. *Изучаются групповые свойства систем управления третьего порядка, в частности, вопрос существования производящей функции симметрий.*
Ключевые слова: *системы управления, группы Ли, симметрийный анализ.*

Abstract*. We study group properties of third order control systems, especially the problem of existing so-called symmetry generating function.*
Keywords: *control systems, Lie Groups, Symmetry Analysis.*

1. Вступ

Математичні моделі керованих процесів звичайно описуються системами диференціальних рівнянь (звичайних або в частинних похідних). З математичної точки зору, ці системи є недовизначеними, тобто кількість рівнянь не дорівнює кількості залежних змінних, а перевищує цю кількість саме на число керуючих впливів (якщо останні – суттєві). Дійсно, система керування, що описується, наприклад, рівняннями

$$\dot{x}^i = f^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad i = \overline{1, n}, \quad \mathbf{x} \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \subset \mathbb{R}^r, \tag{1}$$

має n рівнянь та $(n + r)$ залежних змінних (крапкою зверху позначається похідна: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$).

На початку XX сторіччя, коли математичної теорії керування (у сучасному розумінні) ще не існувало, увага деяких відомих математиків була прикута до розв'язку саме звичайних недовизначених рівнянь та проблеми побудови їх загальних розв'язків. Ці рівняння здебільшого походили з проблем диференціальної геометрії. Зокрема, мова йде про так звані рівняння типу Монжа. У загальному вигляді клас рівнянь Монжа може бути записаний як

$$\dot{x} = F(t, x, y, \dot{y}, \ddot{y}), \tag{2}$$

де F – деяка довільна функція перелічених аргументів, а $x(t)$ та $y(t)$ – невідомі функції. Очевидно, що рівняння типу Монжа мають розв'язки з функціональною довільністю (залежать від деякої довільної функції та, можливо, її похідних), але побудувати явний аналітичний розв'язок (знайти "формулу") неможливо для будь-яких довільних функцій F. До речі, у 1912 році у статті [1] німецький математик Д. Гільберт показав, що для рівняння

$$\dot{x} = (\ddot{y})^2 \tag{3}$$

такий розв'язок знайти неможливо. Разом з тим Элі Картан знайшов достатню умову для існування таких розв'язків для рівняння (2) у формі $F_{\ddot{y}\ddot{y}} = 0$ та, зокрема, побудував [2] явний розв'язок для рівняння

$$\dot{x} = y^m \ddot{y}. \tag{4}$$

Для нас важливо зазначити, що у сучасній редакції рівняння (3) та (4), якщо позначити в них $\dot{y} = z, \ddot{y} = \dot{z} = u$, можуть бути представлені як математичні моделі керованих систем третього порядку з одним керуючим впливом. А саме

$$\dot{x} = u^2, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = u \tag{5}$$

та, відповідно,

$$\dot{x} = y^m u, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = u. \tag{6}$$

З розвитком диференціально-геометричної теорії керування зусиллями великої кількості вчених (зокрема, Ю.Н. Павловського, Г.Н. Яковенка, В.І. Йолкіна, А.П. Крищенка, В.М. Четверикова, О.В. Самохіна, В.Г. Павлова, К.Г. Гараєва – у Росії, Пауля Керстена – у Нідерландах, Мішеля Фліса, Пьера Рушона, Жіана Левіна – у Франції, Роберта Гарднера та С.Шадвіка – у США та Канаді, О.І. Кухтенка, В.М. Семенова – в Україні) аналітичні методи дослідження таких систем було значно розвинуто. Зокрема, Пауль Керстен у статті [3] досліджував симетрійні властивості системи (5), а В.І. Йолкін у монографії [4] представив групову класифікацію афінних систем керування третього порядку. Автори цієї статті вивчали симетрії та представили повну групову класифікацію систем другого порядку [5–7].

Разом з тим, загальна проблема групової класифікації (з нелінійними керуючими впливами у правих частинах рівнянь) не була досліджена, тому головним завданням, яке вирішується на першому етапі досліджень, є саме встановлення групових властивостей керованих систем у нелінійному випадку.

2. Постановка задачі

Задача групової класифікації виникає тоді, коли диференціальні рівняння, які підлягають груповому аналізу, містять деякі довільні функції (у найпростішому випадку – довільні параметри). Саме наявність цієї довільності зумовлює можливу появу різних групових (симетрійних) властивостей для відповідно різних функцій. І хоча перші роботи з класифікації були виконані засновником теорії неперервних груп Софусом Лі, акцентована увага до цих проблем була привернута Л.В. Овсянніковим [8].

Вирішити проблему групової класифікації для даного рівняння (системи) з довільними функціями у сенсі Л.В. Овсяннікова означає вказати (описати) неперервні групи, що допускаються даним рівнянням при будь-яких довільних функціях (тобто, охарактеризувати так зване ядро) та виокремити всі випадки (вказати "спеціалізацію" функцій), коли групові властивості розширюються.

Єдиного "алгоритму" розв'язку проблеми групової класифікації немає. Існують деякі більш-менш напрацьовані підходи для певних класів рівнянь, але відправною точкою в усіх цих підходах є так звані "визначальні рівняння", тобто система диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку відносно невідомих функцій – коефіцієнтів інфінітезимальних операторів симетрії.

Подальші дії в аналізі системи визначальних рівнянь значною мірою залежать від її "визначеності" (недовизначена – визначена – перевизначена [9]). А ця остання властивість залежить від спеціалізації довільних функцій. Тобто ми певним чином знаходимось у гносеологічному куті.

Стратегія, якої ми будемо дотримуватися, щоб вийти з цього кута, полягає в тому, що еквівалентними перетвореннями (замінами змінних) ми будемо намагатись перетворити нашу систему з декількома невідомими на систему (рівняння) з однією (бажано!) невідомою. Ця єдина функція, через яку будуть визначатись усі коефіцієнти оператора симетрії, має назву "твірна функція симетрій" ("производящая функция симметрий" – рос., "symmetry generating function" – англ.). Редукція визначальних рівнянь до рівняння (системи) з твірною функцією має подвійну ціль.

Першу досить влучно охарактеризував Дж. Пойа у своїй книзі [10]. Він зауважував: "Производящая функция является устройством, отчасти напоминающим мешок. Вместо того, чтобы нести отдельно много предметов, что могло бы оказаться затруднительным, мы собираем их вместе и тогда нам нужно нести лишь один предмет – мешок".

Друга мета – спростити розв'язок проблеми групової класифікації. Справа в тому, що зредукувавши проблему до рівняння на твірну функцію, ми отримуємо відповідність між особливими розв'язками цього рівняння (системи) та умовами класифікації (тобто умова виродження коефіцієнтів таких рівнянь і є класифікаційною ознакою [11].

Відзначимо декілька відомих підходів до отримання рівнянь на твірну функцію симетрій. Для рівнянь у частинних похідних техніку твірної функції застосовував Kent Harrison та Frank Estabrook у своїй класичній статті [12]. Для звичайних диференціальних рівнянь схожа техніка використовувалась у книзі [9], а для систем керування другого порядку автори цієї статті застосовували цю техніку в роботах [5–7]. У всіх зазначених випадках твірна функція симетрій ф виникає як результат спарювання (contraction) оператора симетрії X з деякою диференціальною 1-формою ω, асоційованою з вихідною системою диференціальних рівнянь, тобто

$$\phi = X \lrcorner \omega, \tag{7}$$

де $\lrcorner$ – оператор спарювання ("hook" operator).

3. Системи з одним керуючим впливом

Розглядається клас систем керування з одним керуючим впливом і, відповідно, з двома довільними функціями, що має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(t,x,y,z,u), \\ \frac{dy}{dt} &= G(t,x,y,z,u), \\ \frac{dz}{dt} &= u, \end{aligned} \tag{8}$$

де t – час, x,y,z – фазові координати, u – керування. Функції F,G вважаються диференційованими необхідну кількість разів.

Вивчаються симетрії, які допускаються системою (8) у класі операторів:

$$X = \tau\,\partial_t + \xi\,\partial_x + \eta\,\partial_y + \zeta\,\partial_z + \varphi\,\partial_u, \tag{9}$$

де $\partial_{x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$, а $\tau = \tau(t,x,y,z,u), \dots, \varphi = \varphi(t,x,y,z,u)$.

Загальні умови симетрії для систем довільної розмірності були отримані, зокрема, в роботі [7]. У нашому випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} XF - X_0\xi + FX_0\tau &= 0, \\ XG - X_0\eta + GX_0\tau &= 0, \\ \varphi - X_0\zeta + uX_0\tau &= 0, \\ U\xi - FU\tau &= 0, \\ U\eta - GU\tau &= 0, \\ U\zeta - uU\tau &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Вище позначено: $X_0 = \partial_t + F\,\partial_x + G\,\partial_y + u\,\partial_z$ – оператор, асоційований з системою (8), $U = \frac{\partial}{\partial u} = \partial_u$.

Система (36) є так званою системою "визначальних рівнянь" відносно невідомих функцій $\tau,\xi,\eta,\zeta,\varphi$. Подальші перетворення так чи інакше використовують умови сумісності рівнянь системи і мають на меті редукувати кількість невідомих до найменшої, в ідеалі – до одної функції. Як вже було зазначено вище, ця функція, якщо вона існує, має назву "твірна (генеруюча) функція симетрій".

Головним інструментом наших досліджень буде так званий "анзац Громова", який дозволяє редукувати недовизначені диференціальні рівняння до недовизначених рівнянь тієї самої структури, але з меншим числом змінних [13].

З третього рівняння системи (36) можемо знайти

$$\varphi = X_0\zeta - uX_0\tau. \tag{11}$$

Для подальшого спрощення введемо нові змінні:

$$\bar{\xi} = \xi - F\tau, \quad \bar{\eta} = \eta - G\tau, \quad \bar{\zeta} = \zeta - u\tau. \tag{12}$$

Підстановка нових змінних в останні три рівняння системи (36) дозволяє визначити τ:

$$\tau = -U\bar{\zeta} \tag{13}$$

та редукувати систему (виключивши τ) до двох рівнянь:

$$U\bar{\xi} = F_u U\bar{\zeta}, \quad U\bar{\eta} = G_u U\bar{\zeta}. \tag{14}$$

Вище позначено $F_u = UF = \frac{\partial F}{\partial u}, G_u = UG = \frac{\partial G}{\partial u}$. Заміна (12) дозволяє переписати оператор X у вигляді

$$X = \tau X_0 + \tilde{X}, \quad \tilde{X} = \bar{\xi}\,\partial_x + \bar{\eta}\,\partial_y + \bar{\zeta}\,\partial_z + (X_0\bar{\zeta})\,\partial_u. \tag{15}$$

У цих позначеннях перші два рівняння системи (36) набудуть вигляду

$$X_0\bar{\xi} = \tilde{X}F, \quad X_0\bar{\eta} = \tilde{X}G. \tag{16}$$

Якщо ввести новий оператор

$$\bar{X} = \bar{\xi}\,\partial_x + \bar{\eta}\,\partial_y + \bar{\zeta}\,\partial_z, \tag{17}$$

то система (16) перепишеться у вигляді

$$X_0\bar{\xi} - (X_0\bar{\zeta})F_u = \bar{X}F, \quad X_0\bar{\eta} - (X_0\bar{\zeta})G_u = \bar{X}G. \tag{18}$$

Таким чином, еквівалентними перетвореннями ми редукували вихідну систему (36) з шести рівнянь відносно пяти невідомих функцій до систем (18)+(14) з чотирьох рівнянь відносно трьох невідомих функцій, а саме $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$. З вигляду цих систем зрозуміло, що доцільно ввести нові змінні, а саме:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \bar{\xi} - F_u\bar{\zeta} = \xi - F_u\zeta - (F - uF_u)\tau, \\ \tilde{\eta} &= \bar{\eta} - G_u\bar{\zeta} = \eta - G_u\zeta - (G - uG_u)\tau. \end{aligned} \tag{19}$$

Тоді система (14) набуде вигляду

$$U\tilde{\xi} = -F_{uu}\bar{\zeta}, \quad U\tilde{\eta} = -G_{uu}\bar{\zeta}, \tag{20}$$

тобто, виключаючи $\bar{\zeta}$, отримаємо

$$G_{uu}U\tilde{\xi} - F_{uu}U\tilde{\eta} = 0, \quad \bar{\zeta} = -F_{uu}^{-1}U\tilde{\xi} = -G_{uu}^{-1}U\tilde{\eta}. \tag{21}$$

Аналогічно, для системи (18) будемо мати

$$\begin{aligned} X_0\tilde{\xi} &= (\tilde{\xi}\,\partial_x + \tilde{\eta}\,\partial_y)F + \bar{\zeta}[X_1F - X_0F_u], \\ X_0\tilde{\eta} &= (\tilde{\xi}\,\partial_x + \tilde{\eta}\,\partial_y)G + \bar{\zeta}[X_1G - X_0G_u]. \end{aligned} \tag{22}$$

Вище позначено:

$$X_1 = [U, X_0] = F_u\,\partial_x + G_u\,\partial_y + \partial_z, \tag{23}$$

де $[,]$ – комутатор.

Виключаючи з системи (22) $\bar{\zeta}$ та враховуючи (21), отримаємо систему трьох рівнянь відносно двох змінних $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$:

$$
\begin{aligned}
X_0\tilde{\xi} &= (\tilde{\xi}\,\partial_x + \tilde{\eta}\,\partial_y)F - F_{uu}^{-1}[X_1F - X_0F_u]U\tilde{\xi},\\
X_0\tilde{\eta} &= (\tilde{\xi}\,\partial_x + \tilde{\eta}\,\partial_y)G - G_{uu}^{-1}[X_1G - X_0G_u]U\tilde{\eta},\\
G_{uu}U\tilde{\xi} &= F_{uu}U\tilde{\eta}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Подальша редукція отриманої системи можлива двома різними способами.

Перший спосіб передбачає знаходження з першого та другого рівнянь $\tilde{\xi},\tilde{\eta}$. Маємо відповідно:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\eta} &= F_y^{-1}[X_0\tilde{\xi} + F_{uu}^{-1}(X_1F - X_0F_u)U\tilde{\xi} - F_x\tilde{\xi}],\\
\tilde{\xi} &= G_x^{-1}[X_0\tilde{\eta} + G_{uu}^{-1}(X_1G - X_0G_u)U\tilde{\eta} - G_y\tilde{\eta}].
\end{aligned} \tag{25}
$$

Подальша послідовна підстановка цих виразів у третє рівняння системи (24) дає відповідні рівняння на $\tilde{\xi},\tilde{\eta}$:

$$
\begin{aligned}
G_{uu}U\tilde{\xi} &= F_{uu}U\{F_y^{-1}[X_0\tilde{\xi} + F_{uu}^{-1}(X_1F - X_0F_u)U\tilde{\xi} - F_x\tilde{\xi}]\},\\
F_{uu}U\tilde{\eta} &= G_{uu}U\{G_x^{-1}[X_0\tilde{\eta} + G_{uu}^{-1}(X_1G - X_0G_u)U\tilde{\eta} - G_y\tilde{\eta}]\}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Другий спосіб полягає у безпосередньому розв'язку третього рівняння системи (24). Дійсно, якщо ввести нову функцію

$$\sigma = G_{uu}\tilde{\xi} - F_{uu}\tilde{\eta}, \tag{27}$$

то після її диференціювання по u (з урахуванням третього рівняння системи (24)), отримаємо

$$\sigma_u = G_{uuu}\tilde{\xi} - F_{uuu}\tilde{\eta}. \tag{28}$$

Розв'язуючи систему (27)–(28), будемо мати

$$\tilde{\xi} = A_\xi\sigma_u + B_\xi\sigma, \quad \tilde{\eta} = A_\eta\sigma_u + B_\eta\sigma, \tag{29}$$

де коефіцієнти мають вигляд

$$
\begin{gathered}
A_\xi = \frac{F_{uu}}{\Delta}, \quad B_\xi = -\frac{F_{uuu}}{\Delta}, \quad A_\eta = \frac{G_{uu}}{\Delta}, \quad B_\eta = -\frac{G_{uuu}}{\Delta},\\
\Delta = F_{uu}G_{uuu} - F_{uuu}G_{uu}.
\end{gathered} \tag{30}
$$

Підставляючи значення для $\tilde{\xi},\tilde{\eta}$ у перші два рівняння системи (24), отримаємо рівняння однакової структури:

$$
\begin{aligned}
A_1X_0\sigma_u + A_2\sigma_{uu} + A_3X_0\sigma + A_4\sigma_u + A_5\sigma &= 0,\\
B_1X_0\sigma_u + B_2\sigma_{uu} + B_3X_0\sigma + B_4\sigma_u + B_5\sigma &= 0,
\end{aligned} \tag{31}
$$

де коефіцієнти є такими:

$$
\begin{gathered}
A_1 = A_\xi, \quad A_2 = F_{uu}^{-1}(X_1F - X_0F_u)A_\xi, \quad A_3 = B_\xi,\\
A_4 = X_0A_\xi - F_xA_\xi - F_yA_\eta + F_{uu}^{-1}(X_1F - X_0F_u)(UA_\xi + B_\xi),\\
A_5 = X_0B_\xi - F_xB_\xi - F_yB_\eta + F_{uu}^{-1}(X_1F - X_0F_u)UB_\xi,\\
B_1 = A_\eta, \quad B_2 = G_{uu}^{-1}(X_1G - X_0G_u)A_\eta, \quad B_3 = B_\eta,\\
B_4 = X_0A_\eta - G_xA_\xi - G_yA_\eta + G_{uu}^{-1}(X_1G - X_0G_u)(UA_\eta + B_\eta),\\
B_5 = X_0B_\eta - G_xB_\xi - G_yB_\eta + G_{uu}^{-1}(X_1G - X_0G_u)UB_\eta.
\end{gathered} \tag{32}
$$

Підіб'ємо підсумок: за допомогою еквівалентних перетворень нам вдалося пошук п'яти функцій (кожна – п'яти змінних) з шести рівнянь редукувати до пошуку єдиної функції з двох рівнянь, а саме рівнянь (31). Існування розв'язків такої системи – самостійна нетривіальна проблема, яка при довільних функціях F,G не має очевидного аналітичного розв'язку. Разом з тим, ідентична структура отриманих рівнянь дозволяє отримати еквівалентні наслідки, які можуть бути корисними для класифікації. Зокрема, якщо ми помножимо перше рівняння системи на B_1, а друге – на A_1, а з першого віднімемо друге, то отримаємо рівняння-наслідок, яке вже не містить доданку з $X_0\sigma_u$, а саме:

$$(A_2B_1 - B_2A_1)\sigma_{uu} + (A_3B_1 - B_3A_1)X_0\sigma + (A_4B_1 - B_4A_1)\sigma_u + (A_5B_1 - B_5A_1)\sigma = 0. \quad (33)$$

Наявність σ_{uu} зберігає другий порядок цього рівняння, але виконання умови

$$A_2B_1 - B_2A_1 = 0 \quad (34)$$

знищує відповідний доданок та редукує порядок рівняння до першого. Умова (34), з урахуванням виразів для коефіцієнтів (A_i, B_i), еквівалентна умові

$$G_{uu}(X_1F - X_0F_u) - F_{uu}(X_1G - X_0G_u) = 0. \quad (35)$$

Отримана умова – це умова зміни "похідного типу" вихідного рівняння. Більш детальний аналіз цього явища – предмет подальших досліджень.

4. Системи з двома керуючими впливами

Розглядається класс систем керування з двома керуючими впливами (і, відповідно, з однією довільною функцією шести змінних), який має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= H(t,x,y,z,u,v), \\ \frac{dy}{dt} &= u, \\ \frac{dz}{dt} &= v, \end{aligned} \quad (36)$$

де t – час, x, y, z – фазові координати, u, v – керування. Функція H вважається диференційованою необхідну кількість разів.

Досліджуються симетрії, які допускаються системою (36) у класі операторів:

$$X = \tau\,\partial_t + \xi\,\partial_x + \eta\,\partial_y + \zeta\,\partial_z + \varphi\,\partial_u + \kappa\,\partial_v. \quad (37)$$

На відміну від розглянутого вище випадка систем третього порядку з одним керуючим впливом, у даному випадку не всі коефіцієнти інфінітезімального оператора симетрії є функцією шести змінних, а саме (t, x, y, z, u, v). Справа в тому, що для математичних моделей з декількома керуючими впливами загальні умови симетрії породжують додаткові умови сумісності, з яких випливає, що коефіцієнти τ, ξ, η, ζ не залежать від керувань u, v, тобто виконуються умови

$$\tau_u = \tau_v = \xi_u = \xi_v = \eta_u = \eta_v = \zeta_u = \zeta_v = 0. \quad (38)$$

Цей факт вперше був з'ясований у статті Ю.М. Павловського та Г.М. Яковенка [14].

Таким чином, система визначальних рівнянь у нашому випадку буде така:

$$\begin{aligned} XH - X_0\xi + HX_0\tau &= 0, \\ \varphi - X_0\eta + uX_0\tau &= 0, \\ \kappa - X_0\zeta + vX_0\tau &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Як завжди, оператор X_0 – це асоційований з вихідною системою оператор (векторне поле), що має вигляд

$$X_0 = \partial_t + H\,\partial_x + u\,\partial_y + v\,\partial_z, \quad (40)$$

а $H = H(t, x, y, z, u, v)$.

Почнемо аналіз. З другого та третього рівнянь системи (39) безпосередньо маємо

$$\varphi = X_0\eta - uX_0\tau, \quad \kappa = X_0\zeta - vX_0\tau. \quad (41)$$

З урахуванням цього, перепишемо оператор симетрії X у вигляді

$$X = \tilde{X} + (X_0\eta - uX_0\tau)\,\partial_u + (X_0\zeta - vX_0\tau)\,\partial_v, \quad \tilde{X} = \tau\,\partial_t + \xi\,\partial_x + \eta\,\partial_y + \zeta\,\partial_z. \tag{42}$$

Відповідно, перше рівняння системи (39) набуде такого вигляду:

$$\tilde{X}H + H_u(X_0\eta - uX_0\tau) + H_v(X_0\zeta - vX_0\tau) - X_0\xi + HX_0\tau = 0. \tag{43}$$

Представимо оператор $\tilde{X}$ у вигляді

$$\tilde{X} = \tau X_0 + \hat{X}, \quad \hat{X} = \bar{\xi}\,\partial_x + \bar{\eta}\,\partial_y + \bar{\zeta}\,\partial_z, \tag{44}$$

де ми позначили

$$\bar{\xi} = \xi - \tau H, \quad \bar{\eta} = \eta - \tau u, \quad \bar{\zeta} = \zeta - \tau v. \tag{45}$$

Обертаючи (45), отримаємо

$$\xi = \bar{\xi} + \tau H, \quad \eta = \bar{\eta} + \tau u, \quad \zeta = \bar{\zeta} + \tau v. \tag{46}$$

Виконуючи підстановки (44),(46) в (43), врешті маємо

$$\hat{X} - X_0\bar{\xi} + H_uX_0\bar{\eta} + H_vX_0\bar{\zeta} = 0. \tag{47}$$

Зважаючи на вигляд (47), доцільно ввести генеруючу функцію симетрій $\phi = \phi(t, x, y, z, u, v)$, що має вигляд

$$\phi = \bar{\xi} - H_u\bar{\eta} - H_v\bar{\zeta} = \xi - H_u\eta - H_v\zeta - (H - uH_u - vH_v)\tau. \tag{48}$$

Мета подальших перетворень – отримати додаткові (можливо, диференціальні) рівняння на функцію ϕ з подальшим виключенням функцій τ, ξ, η, ζ. Отже, маємо таке.

По-перше, діючи на рівняння (48) оператором X_0, з урахуванням (47), будемо мати

$$X_0\phi = H_x\bar{\xi} + (H_y - X_0H_u)\bar{\eta} + (H_z - X_0H_v)\bar{\zeta}. \tag{49}$$

По-друге, диференціюючи рівняння (48) послідовно по u та v, отримаємо ще два наслідки:

$$U\phi = \phi_u = -H_{uu}\bar{\eta} - H_{uv}\bar{\zeta}, \tag{50}$$

$$V\phi = \phi_v = -H_{uv}\bar{\eta} - H_{vv}\bar{\zeta}. \tag{51}$$

Таким чином, ми отримали систему з чотирьох рівнянь, а саме: (48), (49), (50), (51) на три невідомі функції $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$. Ці рівняння лінійні відносно невідомих функцій $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$, тому нетривіальні розв'язки можуть існувати лише за умови

$$\det M = \det\begin{pmatrix} 1 & -H_u & -H_v & \phi \\ H_x & (H_y - X_0H_u) & (H_z - X_0H_v) & X_0\phi \\ 0 & -H_{uu} & -H_{vu} & U\phi \\ 0 & -H_{vu} & -H_{vv} & V\phi \end{pmatrix} = 0. \tag{52}$$

Розкриваючи визначник (52) за елементами четвертого стовпця, отримаємо диференціальне рівняння на генеруючу функцію симетрій ϕ:

$$(X_0\phi - \phi H_x)\mathrm{Q}_1 - U\phi\mathrm{Q}_2 + V\phi\mathrm{Q}_3 = 0, \tag{53}$$

де

$$\begin{gathered} \mathrm{Q}_1 = (H_{uu}H_{vv} - H_{vu}^2), \\ \mathrm{Q}_2 = -\big(H_y - X_0H_u\big)H_{vv} + (H_z - X_0H_v)H_{vu} - H_x(H_uH_{vv} - H_vH_{vu}), \\ \mathrm{Q}_3 = -\big(H_y - X_0H_u\big)H_{vu} + (H_z - X_0H_v)H_{uu} - H_x(H_uH_{vu} - H_vH_{uu}). \end{gathered} \tag{54}$$

Отже, для знаходження невідомих $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ достатньо розглянути систему трьох рівнянь (48), (49), (50), яку зручно представити у такому вигляді:

$$\begin{pmatrix} 1 & -H_u & -H_v \\ H_x & (H_y - X_0 H_u) & (H_z - X_0 H_v) \\ 0 & -H_{uu} & -H_{vu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ X_0 \phi \\ U\phi \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Припускаючи, що визначник відповідної матриці коефіцієнтів ненульовий, можна отримати аналітичні вирази для невідомих $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$. Зважаючи на громіздкість цих виразів, не будемо їх приводити. Зауважимо лише, що вони є лінійними комбінаціями $(\phi, X_0\phi, U\phi)$.

Повернемося до аналізу рівняння (53). Це лінійне неоднорідне рівняння у частинних похідних першого порядку відносно функції ϕ. Характеристики даного рівняння – це розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь, яку нам зручно представити у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= H(t, x, y, z, u, v), \\ \frac{dy}{dt} &= u, \\ \frac{dz}{dt} &= v, \\ \frac{du}{dt} &= -\mathrm{Q}_1^{-1}\,\mathrm{Q}_2, \\ \frac{dv}{dt} &= \mathrm{Q}_1^{-1}\mathrm{Q}_3, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \phi H_x. \end{aligned} \tag{56}$$

Таким чином, можливість знайти аналітичні розв'язки для системи визначальних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів інфінітезімального оператора симетрій (37) редукувалася до проблеми знаходження аналітичних розв'язків системи (56). Тобто симетрії вихідної незамкненої керованої системи визначаються розв'язками замкненої системи (оптимально замкненої системи).

5. Висновки

Таким чином, нам вдалося для обох випадків, тобто для систем з одним та двома керуючими впливами, отримати диференціальні рівняння для твірної функції симетрій. Ці рівняння створюють достатнє підгрунтя для подальшої групової класифікації й знаходження операторів симетрії у загальному випадку. Вони також можуть бути використані при синтезі оптимальних керувань, вирішенні проблеми керованості та можливої редукції вихідної системи до лінійної.

Диференціально-геометричні аспекти отриманих рівнянь та повна групова класифікація – предмет подальшого розгляду.

6. Подяка

В.І. Легенький висловлює подяку Державному фонду фундаментальних досліджень (ДФФД, Україна) та Німецькому науковому товариству (DFG) за часткову фінансову підтримку цієї роботи, що здійснювалась у рамках проекту № Ф39.1/001 "Групова класифікація систем керування третього порядку".

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hilbert D. Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen / D. Hilbert // Math. Ann. – 1912. – Vol. 73. – P. 95 – 108.
2. Cartan E. Sur quelques quadratures dont l'element differentiel contient des fonctions arbitrares / E. Cartan // Bull. Soc. Math. France. – 1901. – Vol. 29. – P. 118 – 130.
3. Kersten P.H.M. The general symmety algebra structure of the underdetermined equation $u_x = (v_{xx})^2$ / P.H.M. Kersten // J. Math. Phys. – 1991. – Vol. 32(8). – P. 2043 – 2050.
4. Ёлкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем: дифференциально-геометический подход / Ёлкин В.И. – М.: Наука, 1997. – 320 с.
5. Lehenkyi V. A characteristic prolongation for second order control systems / Lehenkyi V., Rudolph J. – IHES/M/03/54. – 2003. – 16 p. – (Preprint).
6. Lehenkyi V. Towards the Group Classification of Control Systems / V. Lehenkyi, J . Rudolph // Proc. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. – N 50, Part 1. – P. 170 – 175.
7. Lehenkyi V. On a characteristic vector field for systems reducible to order two / V. Lehenkyi, J. Rudolph // Proc. of the IFAC Congress, Prague. – 2005. – 6 p.
8. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Овсянников Л.В. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
9. Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics / A.V. Bocharov, V.N. Chetverikov, S.V. Duzhin [et al.]. – Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1999. – 333 p.
10. Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения / Пойа Дж.; пер. с англ. – [2-е изд. испр.]. – М.: Глав. ред. физ-мат. лит., 1975. – 464 с.
11. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения / Картан Э. – М.: Изд-во МГУ, 1962. – 238 с.
12. Harrison B.K. Geometric approach to invariance groups and solution of partial differential systems / B.K. Harrison, F.B. Estabrook // J. Math. Phys. – 1971. – Vol. 12. – P. 653 – 666.
13. Громов М. Дифференциальные соотношения с частными производными / Громов М. – М.: Мир, 1990. – 536 с.
14. Павловский Ю.Н. Группы, допускаемые динамическими системами / Ю.Н. Павловский, Г.Н. Яковенко // Методы оптимизации и их приложения. – Новосибирск, 1982. – С. 155 – 189.

Стаття надійшла до редакції 30.09.2011