УДК 621.3.011.7

В.П. ВОЛОБОЕВ, В.П. КЛИМЕНКО

ОДИН СПОСОБ КОРРЕКТНОЙ ФОРМУЛИРОВКИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕХНИЧЕСКОЙ (ФИЗИЧЕСКОЙ) ЗАДАЧИ

Анотація. *Запропоновано спосіб коректного формулювання математичної моделі технічної (фізичної) задачі. Спосіб містить критерій коректного формулювання задачі, яка описується системою лінійних (нелінійних) алгебраїчних рівнянь (СЛАР), і метод складання математичного опису електричного кола, в якому реалізується критерій. Метод складання й рішення СЛАР розглядається як єдиний обчислювальний процес рішення математичної моделі. У випадку математичної моделі електричного кола, що описується погано обумовленою (погано збіжною) СЛАР, коректне формулювання забезпечує стале рішення. Розглянуто можливість застосування даного способу до неелектротехнічних об'єктів.*
Ключові слова: *коректне формулювання, некоректна задача, математична модель, технічна, фізична задача, система лінійних (нелінійних) алгебраїчних рівнянь, погана обумовленість, погана збіжність, критерій коректного формулювання, електричне коло, метод складання математичної моделі електричного кола.*

Аннотация. *Предложен способ корректной формулировки математической модели технической (физической) задачи. Способ включает критерий корректной формулировки задачи, описываемой системой линейных (нелинейных) алгебраических уравнений (СЛАУ), и метод составления математического описания электрической цепи, реализующий критерий. Метод составления и решение СЛАУ рассматриваются как единый вычислительный процесс решения математической модели. В случае математической модели электрической цепи, описывающейся плохо обусловленной (плохо сходящейся) СЛАУ, корректная формулировка обеспечивает устойчивое решение. Рассмотрена возможность применимости данного способа к неэлектротехническим объектам.*
Ключевые слова: *корректная формулировка, некорректная задача, математическая модель, техническая, физическая задача, плохая обусловленность, плохая сходимость, система линейных (нелинейных) алгебраических уравнений, критерий корректной формулировки, электрическая цепь, метод составления математической модели электрической цепи.*

Abstract. *The way of the correct formulation of mathematical model of a technical (physical) problem is offered. The way includes the criterion of the correct formulation of the problem described by system of the linear (nonlinear) algebraic equations (SLAE), and a method of drawing up of the mathematical description of the electric circuit, realizing criterion. The method of drawing up and the solution of SLAE is considered as unified computing process of the solution of mathematical model. In case of mathematical model of the electric circuit described ill-conditioning (poor convergence) SLAE, the correct formulation provides the stable solution. Possibility of application of the given way to not electrotechnical objects is considered.*
Keywords: *correct formulation, ill-conditioned problem, mathematical model, technical (physical) problem, ill-conditioning, poor convergence, system of the linear (nonlinear) algebraic equations, criterion of the correct formulation, electric circuit, method of drawing up of mathematical model of an electric circuit.*

1. Введение

Современное математическое моделирование потеряло "академические" черты чисто научного и узкопрофессионального направления. Это относится не только к теоретическим вопросам, но и к многочисленным проблемам, возникающим при практическом использовании методов и результатов моделирования, когда большое внимание приходится уделять проблеме взаимодействия моделирования с "внешним миром". Внешний мир – источник идей и данных для моделирования, в нем живут как заказчики конкретных исследований, так и "конечные потребители" компьютерной продукции.

Такое взаимодействие будет эффективным в том случае, если математическое моделирование обеспечит достоверность результатов. Анализ современного состояния математического моделирования показал, что важным направлением развития моделирования, прогресс в котором будет обеспечивать достоверность результатов и тем самым способствовать расширению возможностей и сферы внедрения математического моделирования, есть разработка методов корректной формулировки некорректных технических (физических) задач математического моделирования.

2. Проблема корректной постановки задач математического моделирования

Известно классическое утверждение Адамара: «Аналитическая задача всегда корректно поставлена в смысле существования и единственности решения, непрерывной зависимости от данных задачи, когда есть механическое или физическое истолкование вопроса» [1]. Впервые три условия корректности краевых задач математической физики отчетливо указали Д. Гильберт и Р. Курант [2].

Существовало мнение, что некорректные задачи не могут встречаться при решении физических и технических задач и что для некорректных задач невозможно построение приближённого решения в случае отсутствия устойчивости решения. Среди приверженцев исследования технических (физических) задач исключительно в корректной постановке такие имена, как А. Пуанкаре, Д. Гильберт, В.А. Стеклов, С.Л. Соболев, В.В. Новожилов, И.Г. Петровский, И. Пригожин, Р.В. Хемминг [3–8] и другие.

Предлагались различные подходы к формулировке технических (физических) задач в корректной постановке. Так, Пуанкаре предполагал, что существует взаимосвязь между корректной постановкой задач и адекватностью используемых моделей. Д. Гильберт считал, что есть возможность корректной постановки произвольных краевых задач математической физики посредством специальных требований к граничным значениям соответствующих функций (типа непрерывности или кусочной дифференцируемости до определенного порядка), а при необходимости и придания понятию решения расширительного толкования. В.А. Стеклов высказал предположение, что «если дифференциальные уравнения с упомянутыми выше начальными и предельными условиями построены не на ошибочных основаниях, не находятся в явном противоречии с действительностью, то они должны давать для каждой задачи единственный и вполне определенный ответ» [5]. В.В. Новожилов обратил внимание на потенциал видоизменения постановки задачи с целью упрощения процедуры ее численной реализации. По мнению Р.В. Хемминга, методы численной реализации должны адаптироваться к имеющейся информации. Что же касается принципиальных осложнений, таких как некорректность постановки, то основное внимание необходимо сосредоточить на видоизменении математических моделей.

Следует отметить, что среди приверженцев корректной постановки задачи моделирования в отношении необходимости участия в формулировке задачи специалистов-прикладников соответствующего профиля существовал следующий взгляд. Предназначение математиков состоит в проведении строгих аналитических исследований, разработке вычислительных методов и участии в их реализации, а специалистов-прикладников – заниматься постановкой прямых и в целом корректных задач, т.е. решение некорректной задачи рассматривается как чисто математическая задача.

Сформулированные Ж. Адамаром на рубеже начала XX столетия условия корректности, которые он затем настойчиво популяризировал, относятся к концептуальной основе математического моделирования физически содержательных задач, что, по существу, никем не оспаривается, и вместе с тем на современном этапе возобладало мнение о том, что положения Адамара – ошибочны.

Упреки в адрес Адамара интегративно выражают позицию: великий ученый затормозил развитие науки, не признав адекватность некорректно поставленных задач реалиям наблюдаемых процессов [9–11]. Такой подход к исследованию технических (физических) задач, как отметили В.Я. Арсеньев и А.Н. Тихонов [9], поставил под сомнение целесообразность изучения некорректных задач, к которым авторы отнесли решение плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и интегральных уравнений первого рода; дифференцирование функций, известных приближенно; численное суммирование рядов Фурье, когда их коэффициенты известны приближенно в метрике l_2; решение обратных задач, минимизации функционалов в условиях несходящихся последовательностей координатных элементов; некоторые задачи линейного программирования и оптимального управления; проектирование оптимальных систем. Это далеко не полный перечень некорректных задач, возникающих при исследовании широчайшего спектра задач физики и техники.

Среди приверженцев исследования технических (физических) задач исключительно в некорректной постановке разработка соответствующих методов решения некорректных задач рассматривается как чисто математическая задача отдельного независимого направления вычислительной математики. Методы решения некорректных задач были предложены в работах А.Н. Тихонова [12], М.М. Лаврентьева [13], В.К. Иванова [14]. Более подробно с этими методами можно ознакомиться по монографиям М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, С.П. Шишатского [15] и А.Н. Тихонова, В.Я. Арсенина [16].

В частности, в системах математического моделирования применяется следующий подход к решению некорректных задач типа плохо обусловленных СЛАУ [17]. Предобусловливание считается одним из наиболее эффективных методов приведения плохо обусловленной СЛАУ к корректному виду. Суть предобусловливания заключается в преобразовании исходной СЛАУ $Ax = b$ к виду $QAx = Qb$, где Q – невырожденная матрица – предобусловливатель. При выборе предобусловливателя руководствуются следующим правилом. Если $Q = A^{-1}$, то $1x = A^{-1}b$, т.е., чем ближе Q к A^{-1}, тем корректнее становится преобразованная СЛАУ. Достоверность результатов решения плохо обусловленной СЛАУ зависит от выбора матрицы – предобусловливателя. Выбор матрицы – предобусловливателя выполняет пользователь, и для решения этой задачи требуется высокий уровень квалификации пользователя.

Необходим подход к решению данного типа задач, в котором участие пользователя должно быть сведено к минимуму. В этой связи представляют интерес работы [18–20]. В этих работах, на примере задачи моделирования электрических цепей, продемонстрирован системный подход к корректной формулировке некорректной задачи (математическое описание электрической цепи может быть представлено в виде плохо обусловленной СЛАУ), заключающийся в том, что математик на основании аналитических исследований методов решения математической модели формулирует критерий, которому должно удовлетворять корректное математическое описание модели, а специалист-прикладник реализует этот критерий в методе составления математической модели.

В связи с тем, что математическое описание объекта в виде плохо обусловленной СЛАУ встречается в различных областях физики и техники, представляет интерес обобщить полученные результаты и выработать общие рекомендации по применению данного подхода.

3. Постановка задачи корректной формулировки некорректной задачи

Понятие «некорректная задача» применительно к задаче моделирования технического (физического) объекта, описываемого СЛАУ или системой нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ), требует уточнения. В данной работе в понятии «некорректная задача» подразумевается, что задача не удовлетворяет:

• требованию невырожденности СЛАУ, описывающей объект;

• условию сходимости итерационного процесса решения СЛАУ (СНАУ), описывающей объект.

О том, что можно корректно сформулировать некорректную задачу, было замечено в эпоху расцвета аналогового моделирования в начале компьютерной эры (начало 60-х годов XX столетия). В то время аналоговое моделирование занимало ведущие позиции в моделировании алгебраических объектов. В этом плане следует отметить достижения школы академика Г.Е. Пухова (Институт кибернетики АН УССР, г. Киев) [21, 22] в области решения следующих задач.

1. Разработка аналоговых и квазианалоговых методов моделирования.

2. Разработка методов синтеза электрических схем математических машин для моделирования алгебраических объектов.

3. Разработка методов расчета электрических цепей.

Для решения перечисленных задач требовалось тесное взаимодействие специалистов-прикладников в электротехнической области и математиков. В процессе разработки решающих устройств было установлено, что при расчете линейной электрической цепи, основанном на применении топологических преобразований электрической цепи, приводящих ее к элементарной (в этом случае исключается составление уравнений цепи и последующее их решение), наблюдается устойчивость решения, обеспечивающая достоверность результатов даже в том случае, когда математическая модель этой цепи описывается плохо обусловленной СЛАУ. В этом случае специалист-прикладник:

• учитывал при выборе кандидатов, подлежащих преобразованию, особенности параметров функциональных зависимостей компонент и топологию конкретной электрической цепи;

• использовал при топологических преобразованиях напряжения и токи двухполюсных компонент, а не узловые напряжения электрической цепи.

Это означает, что учет особенностей конкретной задачи можно использовать при корректной формулировке некорректной задачи. Следует заметить, что этот фактор в современных методах составления и решения математической модели объекта не используется.

Чтобы учесть особенности конкретной задачи при составлении математической модели, необходимо решить следующие задачи:

• сформулировать критерий корректной формулировки математической модели объекта;

• предложить метод составления математической модели объекта, реализующий этот критерий.

3. Критерий корректной формулировки математической модели объекта

Как следует из исследований СЛАУ, приведенных в литературе [23], все трудности решения неустойчивых или плохо обусловленных СЛАУ связаны, по существу, лишь с трудностями решения систем с матрицами неполного ранга либо очень близкими к таковым в условиях возмущения входных данных и влияния ошибок округления. Это означает, что если фиксированы уровень ошибок входных данных и точность вычислений, то всегда найдутся

СЛАУ с настолько большими значениями чисел обусловленности, что для них нельзя будет гарантировать в решении (псевдорешении) точность.

В данном случае для обеспечения гарантированной точности нормального решения (достоверности результатов) необходимо привлечение дополнительной информации о задаче. Эта информация весьма разнообразна по своей природе. Согласно многочисленным рецептам, можно решать любую систему, например, методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице. Если матрица имеет не полный ранг, то в процессе реальных преобразований, по-видимому, получится система с треугольной матрицей, у которой все элементы последних строк будут малы. Все отличия их друг от друга связаны лишь с использованием различных преобразований исходной системы и применением различных критериев замены малых элементов преобразованной системы нулями. На основе этой идеи было опубликовано огромное число работ. В качестве примера можно привести рассмотренное выше применение обусловливания при решении плохо обусловленной СЛАУ.

В данной работе предлагается в качестве дополнительной информации, необходимой для обеспечения гарантированной точности нормального решения (псевдорешения) СЛАУ, описывающей техническую (физическую) задачу, учитывать требование невырожденности СЛАУ при составлении последней. Критерий корректной формулировки составления СЛАУ, описывающей линейный объект, вытекает из следующей леммы, приведенной в [23].

Для того, чтобы матрица A была невырожденной, достаточно выполнение неравенств

$$\left|a_{ii}\right| \succ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| \quad \text{для } i = 1,2,...,n, \tag{1}$$

где n – порядок матрицы.

Кроме прямых методов, для решения СЛАУ применяются итерационные методы. В этом случае требование невырожденности СЛАУ заменяется условием сходимости итерационного процесса. В связи с тем, что имеется обширный список литературы по различным аспектам исследования сходимости различных итерационных методов решения СЛАУ (СНАУ), будут приведены только достаточные признаки сходимости некоторых итерационных методов.

Приведем достаточный признак сходимости метода простой итерации решения СЛАУ. Суть метода простой итерации применительно к решению СЛАУ заключается в следующем. Если имеется система уравнений $Ax = f$, то процесс нахождения вектора x реализуется последовательными приближениями по формуле

$$x_{n+1} = \alpha x_n + f, \tag{2}$$

где $\alpha = E - A$, E – единичная матрица, n – номер итерации. Известно, что если матрица A заданной системы может быть представлена в форме

$$A = SQ, \tag{3}$$

где S – любая неособенная диагональная матрица, Q – симметричная положительно (отрицательно) определенная матрица, то достаточным признаком сходимости будет

$$\left\|\alpha\right\| \prec 1. \tag{4}$$

В [21] показано, что достаточное условие сходимости (4) может быть сформулировано в виде

$$2|a_{ii}| \succ \sum_{j=1}^{j=n} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Из сравнения выражений (1) и (5) следует, что критерий корректной формулировки математической модели линейного физического объекта является общим как в случае требования невырожденности СЛАУ, так и при учете сходимости итерационного процесса решения методом простой итерации.

Приведем условия сходимости решения СНАУ. Если имеется система уравнений

$$f(x) = 0, \tag{6}$$

то нахождение решения методом простой итерации реализуется последовательными приближениями по формуле

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n). \tag{7}$$

Условие сходимости данного метода [74] определяется из следующего неравенства:

$$\left\| 1 - f_x^{'} \right\| \prec 1, \tag{8}$$

где $f_x^{'}$ – матрица Якоби, $\| \ \|$ – норма матрицы Якоби.

В случае нахождения решения методом Ньютона вычислительная схема имеет следующий вид:

$$x_{n+1} = x_n - f_x^{'}(x_n)^{-1} f(x_n). \tag{9}$$

Как следует из (9), реализация итерационного процесса метода Ньютона состоит из нескольких этапов:

1. Вычисление $f(x_n)$.
2. Определение матрицы Якоби $\left| f_x^{'}(x_n) \right|$. Решение СЛАУ:

$$\left| f_x^{'}(x_n) \right| \Delta x_n = f(x_n), \tag{10}$$

где Δx_n – вычисляемое приращение на n-ом итерационном шаге решения.

3. Вычисление $n+1$ последовательного приближения:

$$x_{n+1} = x_n - \Delta x_n. \tag{11}$$

В случае, когда $x_{N+1} \neq x_N$, переход к п. 1.

Согласно [24], итерационный процесс будет сходящимся, если выполняется следующее неравенство:

$$h_0 = B_0 \eta_0 k \leq \frac{1}{2}, \tag{12}$$

где $B_0 \geq \left\| f_x^{'}(x_n)^{-1} \right\| = \left\| \bar{\Gamma}_0 \right\|$ – норма обратной матрицы Якоби, $\eta \geq \left\| \bar{\Gamma}_0 \, f(x_0) \right\|$ – норма результата решения СЛАУ (10), $k \geq \max \left\| f_x^{''}(x_n) \right\|$ – норма вторых производных.

Из выражений (8) и (12) следует, что на этапе составления математической модели объекта будут учтены условия сходимости вычислительных процессов (7) и (9) только в том случае, если матрица Якоби СНАУ (6) удовлетворяет критерию корректной формулировки (1).

Таким образом, из вышерассмотренного вытекает следующий критерий корректной формулировки математического описания физического линейного (нелинейного) объекта. Диагональные коэффициенты матрицы СЛАУ (матрицы Якоби СНАУ) математической модели линейного (нелинейного) объекта по модулю должны быть больше суммы модулей коэффициентов, образующих эти строки, или, в крайнем случае, максимально возможными. Для реализации критерия необходимо иметь метод целенаправленного составления математической модели объекта.

4. Метод составления математической модели объекта

Реализацию критерия корректного составления математической модели объекта рассмотрим применительно к методу составления математической модели электрической цепи. Метод рассмотрен в [20]. В данной работе будут приведены только основные положения метода, необходимые для того, чтобы сформулировать общие рекомендации по корректной формулировке некорректной задачи на этапе составления математической модели.

Построение математической модели электрической цепи данным методом базируется на основной системе уравнений электрической цепи, куда входят уравнения, составленные на основе законов Кирхгофа, и компонентные уравнения. Для описания графа электрической цепи и, соответственно, уравнений на основе законов Кирхгофа применяются топологические матрицы контуров и сечений [25]. Переменные составляемой системы уравнений выбираются из напряжений и/или токов компонентов в результате анализа основной системы уравнений. При этом учитываются параметры компонентных уравнений и особенности топологических матриц, присущие конкретной цепи или классу цепей. В конечном счете из основной системы уравнений выделяется система уравнений, соответствующая выбранным переменным, и система уравнений связи, с помощью которых вычисляются остальные напряжения и токи компонент. Преобразованная таким образом основная система уравнений рассматривается как математическая модель электрической цепи. Из вышерассмотренного следует, что в методе имеются возможности реализовать критерий как на уровне выбора типа переменных, так и самих переменных.

Рассмотрим этапы составления модели. В качестве типа переменных будем рассматривать напряжения компонент. Вначале составляется эквивалентная схема замещения электрической цепи, определяются компонентные уравнения и граф цепи. Будем считать, что цепь содержит двухполюсные компоненты типа источника напряжения, тока и проводимости. Компонентное уравнение проводимости имеет вид

$$I_i = f_i(U_i)\,, \quad i = 1,2,...,k\,, \tag{13}$$

где I_i – ток i-ой компоненты, $f_i(\bullet)$ – условное обозначение компонентного уравнения i-ой компоненты, U_i – напряжение i-ой компоненты, k – количество компонент типа проводимости в цепи. В этом случае граф цепи совпадает с электрической цепью. Составление топологических матриц контуров и сечений включает выбор дерева графа цепи и составление контуров для выбранного дерева. Дерево графа электрической цепи выбирается таким образом, чтобы все источники напряжения включались в дерево, а все источники тока в хорды. Напряжения, токи и компонентные уравнения компонентов цепи в векторах группируются в элементы, содержащие компоненты, которые входят в дерево (индекс д), т.е. ветви, и содержащие компоненты, не входящие в дерево (индекс х), – хорды, таким образом,

$$U = \begin{vmatrix} U_Д \\ U_X \end{vmatrix}, \qquad I = \begin{vmatrix} I_Д \\ I_X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_Д(U_Д) \\ f_X(U_X) \end{vmatrix}, \tag{14}$$

где U – вектор напряжений компонент, I – вектор токов компонент.

Контуры образуются присоединением хорд к дереву графа цепи. В этом случае топологическая матрица контуров имеет вид $\left|1\ F^t\right|$, где 1 – единичная подматрица хорд, t – обозначает транспонирование матрицы, а топологическая матрица сечений вид $\left|1\ -F\right|$, где 1 – единичная подматрица ветвей. Уравнения цепи, составленные на основе законов Кирхгофа, в матричном виде можно записать следующим образом:

$$U_X = -F^t U_Д, \tag{15}$$

$$I_Д = F I_X\ . \tag{16}$$

В случае выбора в качестве независимых переменных напряжений ветвей дерева $U_Д$ компонентные уравнения (13), уравнения (15) и (16) можно преобразовать к следующему виду:

$$f_Д(U_Д) - F(f_X(-F^t\,U_Д)) = 0\,. \tag{17}$$

Как следует из выражений (8), (12), критерий корректной формулировки математического описания электрической цепи (17) будет сформулирован следующим образом, дерево графа электрической цепи необходимо выбирать таким образом, чтобы присоединяемая к дереву хорда имела (динамическую) проводимость меньше (динамических) проводимостей ветвей контура. При этом динамическая проводимость компоненты определяется следующим образом:

$$I_{\mathrm{i}} = f_i'(U_i)\,. \tag{18}$$

Как следует из итерационных процессов (2), (7), (9), вопрос корректной постановки задачи возникает как при составлении СЛАУ (плохая обусловленность), так и при решении СНАУ (6) (плохая сходимость итерационного процесса решения). Это означает, что необходимо на каждом итерационном шаге решения СНАУ контролировать на невырожденность СЛАУ (10) и соответствующим образом ее корректировать.

Матрица частных производных (матрица Якоби) $f^{'}(U_{Д_n})$ СНАУ (6) на n-ом итерационном шаге, имеющая следующий вид:

$$f^{'}(U_{Д_n}) = \begin{vmatrix} f_{11}^{'}\left(U_{Д_n}\right) & \cdots & f_{1m}^{'}\left(U_{Д_n}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1}^{'}\left(U_{Д_n}\right) & \cdots & f_{mm}^{'}\left(U_{Д_n}\right) \end{vmatrix}, \tag{19}$$

где m – порядок матрицы Якоби, $f_{ij}^{'}\left(U_{Д_n}\right)$ – частная производная i-ого уравнения по j-ой переменной, определяется аналитически или численным методом из СНАУ (6). Это означает, что составление СЛАУ (10) и контроль на невырожденность при составлении следует рассматривать как две разные задачи. Предлагается составление СЛАУ (10) модифицировать таким образом, чтобы можно было более эффективно применить предложенный метод корректной формулировки задачи в процессе составления СЛАУ (10). Для этого при решении данной задачи учитывается тот факт, что для нелинейной электрической цепи физической интерпретацией СЛАУ (10) есть линеаризованная эквивалентная схема этой цепи, т.е. цепь, у которой функциональные зависимости компонент заменяются динамическими параметрами типа (18). Тогда вместо определения матрицы (19) численным методом из СНАУ (6), СЛАУ (10) будет определена в результате составления математической модели линеаризованной эквивалентной схемы электрической цепи. В этом случае контроль задачи на корректность рассматривается как часть процесса составления математической модели линеаризованной схемы.

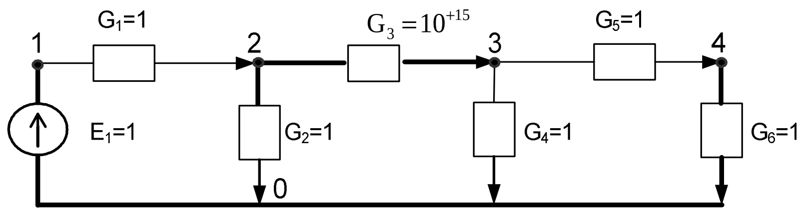

Рис. 1. Электрическая цепь

Выполним оценку достоверности результата расчета напряжения, падающего на компоненте G_2, в электрической цепи, приведенной на рис. 1. Диапазон изменения проводимостей компонент электрической цепи, равный 15 порядкам, обеспечивает плохую обусловленность СЛАУ и тем самым, как принято считать, некорректность задачи. Составление СЛАУ выполняется предложенным методом.

Учитывая вышеприведенные рекомендации, в дерево графа цепи были выбраны компоненты: E_1, G_2, G_3, G_6. Тогда, векторы напряжений и токов компонент, входящих в дерево и хорды, имеют вид

$$\mathrm{U}_{\text{Д}} = \begin{vmatrix} U_{E_1} \\ U_{G_6} \\ U_{G_3} \\ U_{G_2} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{U}_{\text{Х}} = \begin{vmatrix} U_{G_1} \\ U_{G_4} \\ U_{G_5} \end{vmatrix}, \; I_{\text{Д}} = \begin{vmatrix} I_{E_1} \\ I_{G_6} \\ I_{G_3} \\ I_{G_2} \end{vmatrix}, \quad I_{\text{Х}} = \begin{vmatrix} I_{G_1} \\ I_{G_4} \\ I_{G_5} \end{vmatrix}, \tag{20}$$

а топологические матрицы F^t и F

$$\mathrm{F}^{\mathrm{t}} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \mathrm{F} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Учитывая (20) и (21), после соответствующих преобразований система уравнений (17) в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$\begin{vmatrix} G_5 + G_6 & G_5 & -G_5 \\ G_5 & G_3 + G_4 + G_5 & -(G_4 + G_5) \\ -G_5 & -(G_4 + G_5) & G_1 + G_2 + G_4 + G_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{G_6} \\ U_{G_3} \\ U_{G_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1 U_{E_1} \end{vmatrix}, \tag{22}$$

а в численном виде как

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10^{15} + 2 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{G_6} \\ U_{G_3} \\ U_{G_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Собственные числа матрицы СЛАУ есть $\lambda_1 = 1{,}58578643\,76253$, $\lambda_2 = 5{,}0E+14 + j5{,}0E+14$, $\lambda_3 = 5{,}0E+14 - j5{,}0E+14$, т.е. матрица СЛАУ (23) – плохо обусловленная. Модуль диагонального члена второй строки (столбца) матрицы СЛАУ (23) значительно больше (на 15 порядков) модуля суммы остальных членов строки (столбца).

Это означает, что можно принять $U_{G_3} = 0$ и упростить СЛАУ (23) и при этом сохранить достоверность результатов. В эпоху ручного счета этому соответствовало упрощение электрической цепи путем объединения узла 2 с узлом 3.

Для вычисления компонентного напряжения U_{G_2} применим прямой ход метода Гаусса решения СЛАУ. После соответствующих преобразований система уравнений (23) примет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&U_{G_6} = -0{,}5U_{G_3} + 0{,}5U_{G_2}, \\
&U_{G_3} = \frac{1{,}5}{10^{15} + 1{,}5} U_{G_2}, \\
&U_{G_2} = \frac{1}{4 - 0{,}5 + \dfrac{2{,}25}{10^{15} + 1{,}5}} \cong \frac{1}{4 - 0{,}5} = \frac{7}{2}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Из анализа вычислительного процесса решения СЛАУ (24) следует, что нет жестких требований к конечной точности представления чисел как при составлении уравнений, так и при решении составленных уравнений. Как следует из приведенных результатов, учет невырожденности СЛАУ при составлении математической модели приводит к устойчивости решения плохо обусловленной СЛАУ.

5. Выводы

Предложен способ корректной формулировки математической модели технической (физической) задачи. Корректность видоизменения постановки задачи достигнута за счет того, что математик формулирует критерий корректной математической модели для определенного класса некорректных задач, а специалист-прикладник реализует этот критерий при разработке метода составления математической модели объекта. Критерий корректной формулировки математической модели разработан для некорректной задачи типа плохо обусловленной СЛАУ или не удовлетворяющего условиям сходимости итерационного процесса решения СНАУ. Показано, что критерий является общим для перечисленного класса задач. Отличие данного подхода корректной постановки задачи от других заключается в том, что выбор главного элемента матрицы СЛАУ (матрицы Якоби СНАУ) выполняется на этапе составления математической модели.

Разработан метод составления математической модели электрической цепи, в котором реализован критерий. Критерий корректной формулировки задачи был трансформирован в формализованный алгоритм оптимального выбора переменных СЛАУ (СНАУ) на этапе составления топологической матрицы контуров графа электрической цепи. Показано, что соответствующим выбором переменных на этапе составления уравнений можно предотвратить появление проблемных уравнений и обеспечить достоверный результат моделирования, и таким образом имеется возможность из общей задачи решения проблемных уравнений решить ту часть, источником которой есть некорректный выбор переменных СЛАУ. Реализация критерия в методе составления математической модели электрической цепи была достигнута за счет:

• применения топологических матриц контуров и сечений для описания топологии графа;

• выбора в качестве переменных СЛАУ (СНАУ), описывающих электрическую цепь, напряжений или токов компонентов ветвей дерева графа цепи, а не, как принято, узловых потенциалов;

• учета параметров функциональных зависимостей компонент электрической цепи при выборе дерева топологической матрицы контуров и тем самым независимых переменных СЛАУ (СНАУ).

Следует отметить, что в случае плохо обусловленной СЛАУ (плохой сходимости СНАУ) метод корректной формулировки задачи обеспечивает достоверность результата за счет устойчивости решения.

Впервые предложено составление и решение СЛАУ (СНАУ) рассматривать как единый вычислительный процесс решения математической модели электрической цепи. Только в этом случае может использоваться информация о топологии и функциональных зависимостях компонент электрической цепи в процессе решения математической модели электрической цепи. Матрица Якоби в этом случае определяется с контролем на невырожденность на каждом шаге итерационного процесса решения СНАУ в результате составления математической модели линеаризованной эквивалентной схемы электрической цепи. Кроме того, это обеспечивает контроль на невырожденность математической модели электрической цепи при моделировании во временной или частотной области.

Следует отметить, что впервые для корректной постановки некорректной задачи применяются параметры компонент и информация о соединении компонент конкретной задачи.

В вычислительной математике методы решения систем уравнений обычно рассматриваются без привязки к объектам, для которых эти системы уравнений составлены. Это означает, что невозможно применить данный способ корректной формулировки задачи к таким математическим моделям.

Два варианта применения рассмотренного подхода возможны в случае моделирования неэлектротехнических объектов. В первом случае полученные результаты непосредственно применимы только к объектам, которые можно представить в виде эквивалентных схем замещения электрическими цепями, используя электротехническую аналогию. В эпоху ручного счета большое внимание уделялось разработке эквивалентных схем замещения объектов. Это давало возможность, используя электротехническую аналогию, описать объект и понять физику протекающих объектов. Кстати, модельный пример можно рассматривать как грубую электротехническую модель одномерного уравнения теплопроводности, описывающего слоистую среду.

Второй вариант рассмотренного подхода к моделированию неэлектротехнических объектов заключается в том, что необходимо разрабатывать физические модели объектов в таком виде, чтобы можно было применить предложенный подход к корректной формулировке математической модели объектов. Как показал обзор литературы, к сожалению, в данном направлении исследования практически не ведутся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Адамар Ж. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
2. Курант Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1945. – Т. 2. – 620 с.
3. Пуанкаре А. О науке / Пуанкаре А. – М.: Наука, 1983. – 560 с.
4. Проблемы Гильберта / Под ред. П.С. Александрова. – М.: Наука, 1969. – 239 с.
5. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики / Стеклов В.А. – М.: Наука, 1983. – 432 с.
6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / Петровский И.Г. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
7. Пригожин И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой / И. Пригожин, И. Стенгерс. – М.: Прогресс, 1986. – 431 с.
8. Хемминг Р.В. Численные методы (для научных работников и инженеров) / Хемминг Р.В. – М.: Наука, 1968. – 400 с.

9. Арсенин В.Я. Некорректные задачи / В.Я. Арсенин, А.Н. Тихонов // Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – Т. 3. – С. 930 – 935.
10. Шилов Г.Е. Жак Адамар и формирование функционального анализа: Выступление на мемориальном заседании Московского математического общества 10 марта 1964 г. / Г.Е. Шилов // Успехи математических наук. – 1964. – Т. 19, № 3. – С. 183 – 185.
11. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы: справ. пос. / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 543 с.
12. Тихонов Д.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / Д.Н. Тихонов // Доклады АН СССР. – 1963. – № 151. – С. 501 – 504.
13. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / Лаврентьев М.М. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
14. Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах / В.К. Иванов // Математический сборник. – 1963. – № 61(103):2. – С. 211 – 223.
15. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математического анализа / Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
16. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
17. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем / Ортега Дж. – М.: Мир, 1991. – 365 с.
18. Волобоев В.П. Об одном подходе к моделированию сложных систем / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2008. – № 4. – С. 111 – 122.
19. Волобоев В. П. Об одном подходе к моделированию энергосистем / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2009. – № 4. – С. 106 – 118.
20. Волобоев В. П. Об одном подходе к моделированию нелинейных электрических цепей по частям / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2010. – № 3. – С. 53 – 68.
21. Пухов Г.Е. Избранные вопросы теории математических машин / Пухов Г.Е. – Киев: Изд-во Академии наук УССР, 1964. – 264 с.
22. Пухов Г.Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей / Г.Е. Пухов; АН УССР. Ин-т кибернетики. – К.: Наукова думка, 1967. – 568 с.
23. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / Воеводин В.В. – М., Наука, 1977. – 304 с.
24. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
25. Сешу С. Линейные графы и электрические цепи / С. Сешу, М.Б. Рид. – М.: Высшая школа, 1971. – 448 с.

Стаття надійшла до редакції 13.10.2011