УДК 004.519.681

Н.Н. МАЛЯР

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ НЕЧЕТКИХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВЫБОРА

Анотація. *У роботі розглянуто підхід до розв'язання нечіткої багатокритеріальної задачі вибору. Описано алгоритми та приведено приклади їх реалізації.*
Ключові слова: *багатокритеріальний вибір, нечіткі множини.*

Аннотация. *В роботе рассмотрен подход к решению нечеткой многокритериальной задачи выбора. Описаны алгоритмы и приведены примеры их реализации.*
Ключевые слова*: многокритериальный выбор, нечеткие множества.*

Abstract. *An approach to the solution of fuzzy multi-criteria tasks of choice is considered. Related algorithms are described and examples of their implementation are given.*
Keywords: *multi-criteria choice, fuzzy sets.*

1. Введение

В наши дни практически все экспериментальные исследования, связанные с оптимизацией социально – экономических, социально-медицинских или технических систем, базируются на задачах по выходу из проблемной ситуации. Основное, что характеризует проблемы, стоящие перед человеком XXI века, будь-то политика, экономика, наука – это сложно и неопределенно. Именно эти факторы стали катализатором проведения современных исследований процессов принятия решений.

Действительно, во многих практических ситуациях сложность принимаемых решений определяется, прежде всего, двумя факторами: количеством альтернативных вариантов, количеством и разнородностью критериев оценки этих вариантов. Проблемы, в которых отсутствует полная информация о том или ином объекте, являются слабо структурируемыми проблемами принятия решений. Термин "слабо структурируемые проблемы" (ill-structured) был введен Г.Саймоном [1]. В слабо структурируемых проблемах принятия решений, как правило, плохо определенные факторы качественного характера имеют тенденцию доминировать, критерии оценки альтернатив носят субъективный характер. Удобной математической моделью для представления этих задач является многокритериальная модель выбора. Суть данной модели состоит в том, что множество альтернатив, из которых должен быть осуществлен выбор, оцениваются при помощи нескольких показателей качества. Эти показатели могут быть описаны как количественно, так и качественно.

Как показывает анализ литературных источников, можно выделить несколько основных типов неопределенностей в задачах принятия решений [2, 3]. Это:

– объективная неопределенность ("неопределенность природы");

– неопределенность, вызванная отсутствием достаточной информации (гносеологическая неопределенность);

– стратегическая неопределенность, вызванная зависимостью от действий других субъектов (партнеров, противников, организаций и т.п.);

– неопределенность, порожденная слабо структурируемыми проблемами;

– неопределенность, вызванная нечеткостью, расплывчатостью как процессов и явлений, так и информации, их описывающей.

Заметим, что в практических задачах могут присутствовать несколько видов неопределенностей.

Эффективность поиска оптимальных решений существенно зависит от методов описания и анализа имеющейся в задаче неопределенности, насколько адекватно эти методы могут отразить реальную ситуацию. Исторически первыми появились вероятностностатистические методы, и на сегодняшний день они являются наиболее развитыми. Эти методы описания и анализа неопределенности являются основой для принятия решений в условиях риска, а большинство задач, решаемых людьми, как в деловой сфере, так и в обыденной жизни, имеют рискованный характер. Несмотря на развитие вероятностных методов, они не могут являться универсальным средством для описания всех типов неопределенностей в задачах принятия решений. Это относится, прежде всего, к слабо структурируемым проблемам и задачам с нечеткой исходной информацией.

Рассмотрим подробнее тот тип неопределенности в задачах принятия решений, который связан с нечеткими, качественными (нежесткими, неточными, расплывчатыми) свойствами процессов и явлений. Одной из наиболее важнейших особенностей прикладных задач выбора для экономических, социальных и других систем является нечеткий характер критериев выбора альтернатив, их параметров, ограничений, накладываемых на возможность выбора тех или иных вариантов, и т.д. Неточность измерения и, как следствие, нечеткость описания реальных объектов является естественной потому, что человеку несвойственно мыслить и принимать решения только в "количественных" характеристиках. Он мыслит “качественно”, и для него поиск решений – прежде всего поиск замысла решения, и здесь количественные оценки играют вспомогательную роль. Формализация нечетких понятий – одна из главных задач, которую надо решать при разработке моделей принятия решений в сложных, неопределенных ситуациях. Вследствие этого, в большинстве случаев оказывается невозможным построение традиционной адекватной математической модели исследуемой проблемы. Однако, несмотря на такую нечеткость, в практических ситуациях обычно удается получить определенное представление об этих объектах и решать поставленные задачи. Весьма перспективным математическим аппаратом на сегодняшний день, который позволяет наиболее адекватно описывать данный процесс, может послужить теория нечетких множеств [4–7].

Данный аппарат для решения задач оптимального выбора впервые был предложен в работах Беллмана и Заде [4, 5]. Суть этого подхода состоит в том, что человеческий способ рассуждений, опирающийся на естественный язык, не может быть описан в рамках традиционных математических формализмов. Этим формализмам присуща строгая однозначность интерпретации, а все, что связано с использованием естественного языка, имеет многозначную интерпретацию. В основе теории Л. Заде [5, 6] лежит достаточно очевидный факт – субъективные представления о цели всегда нечетки. Далее делается и следующий шаг, полагая, что оценки и ограничения субъекта так же, как правило, нечетки, а иногда и вообще лишены в своем начальном виде количественных характеристик. В качестве средства математического моделирования неопределенных понятий, которыми оперирует человек при описании своих представлений о какой-то реальной системе, своих желаний, целей и т.п., выступает нечеткое множество.

Нечетким множеством $B \subseteq Y$ называется совокупность пар вида $(y, \mu_B(y))$, где $y \in Y$, а μ_B (функция $Y \to [0;1]$) называется функцией принадлежности нечеткому множеству B, которая представляет собой некоторую субъективную меру соответствия элемента нечеткому множеству [6, 7]. Значения $\mu_B(y)$ для конкретного $y \in Y$ называются степенью принадлежности этого элемента нечеткому множеству B и могут принимать значения от нуля, который обозначает абсолютную непринадлежность, до единицы, которая, наоборот, говорит об абсолютной принадлежности элемента $y \in Y$ нечеткому множеству B.

2. Постановка нечеткой многокритериальной задачи

Элементы теории нечетких множеств успешно используются для принятия решений по многим критериям. Часто, например, экспертные оценки альтернатив по критериям могут быть представлены как нечеткие множества или нечеткие числа, выраженные с помощью функции принадлежности. В данном случае критерии определяют некоторые понятия, а оценки альтернатив представляют собой степени соответствия этим понятиям. Пусть имеется множество альтернатив $A=\{a_1,...,a_m\}$ и множество критериев $K=\{K_1,...,K_n\}$. При этом оценки альтернатив по каждому i-му критерию представлены нечеткими множествами:

$$\tilde{K}_i=\{\mu_i(a_1)/a_1,\mu_i(a_2)/a_2,...,\mu_i(a_m)/a_m\}.$$

Рассмотрим класс задач, которые могут быть описаны следующим образом: пусть критерии эффективности $K=\{K_1,...,K_n\}$ моделируются соответственно целевыми функциями $\{f_1,...,f_n\}$, которые описаны нечетко, т.е., для каждой f_i задано отображение $\mu_i : A\times R^1 \to [0,1]$, где A – универсальное множество альтернатив, R^1 – числовая ось. В этом случае $\mu_i(x)$ при каждом фиксированном $x\in A$ представляет собой нечеткое описание оценки результата выбора альтернативы x, т.е., как функцию принадлежности нечеткого множества цели.

3. Описание алгоритмов решения задачи

Предположим, что $X^D \subseteq A$ – допустимое множество альтернатив. Опишем некоторые алгоритмы решения нечеткой задачи многокритериального выбора эффективной альтернативы или альтернатив.

Алгоритм P1. Пусть совокупность критериев эффективности $\{K_1,...,K_n\}$ строго ранжирована по значимости важности.

0-й шаг. Задаем строгий порядок важности для критериев и нумеруем их в убывающем порядке.

i-й шаг. Задаем порог уровня β_i и строим множество

$$X_i^D=\{x\,|x\in X_{i-1}^D,\mu_i(x)\ge\beta_i\}, X_0^D\equiv X^D.$$

Если $X_i^D\equiv$ O (пусто), то лицо, принимающее решение (ЛПР), должно изменить порог уровня β_i или вернуться на шаг выше и изменить порог уровня β_{i-1}. Данный шаг повторяется ($i\le n$) до тех пор, пока X_i^D не будет содержать такое количество альтернатив, из которых ЛПР может выбрать самую эффективную.

На *n-ом шаге* ЛПР должно либо согласиться с множеством X_n^D, либо повторно выполнить алгоритм, изменив при этом или приоритеты критериев, или пороги уровней.

Алгоритм P2. Пусть все критерии эффективности по важности равнозначные.

0-й шаг. Для каждого критерия задается порог уровня β_i.

i-й шаг. Решается задача построения множества:

$$X_i^D=\{x\,|x\in X^D,\mu_i(x)\ge\beta_i\}.$$

Данный шаг выполняется n раз.

n+1-й шаг. Ищется множество

$$X^*=\bigcap_{i=1}^{n}X_i^D.$$

Если $X^* \equiv$ O (пусто) или не удовлетворяет ЛПР, тогда изменяются либо все пороги уровня β_i, либо некоторые из них и повторяется i-й шаг. В противном случае алгоритм заканчивает работу.

Примечание 1. Если порядок важности критериев нестрогий, то для таких задач надо использовать комбинацию алгоритмов *P1* и *P2* (для равнозначных).

Примечание 2. Если о важности критериев ничего неизвестно, то для решения таких задач может быть использован алгоритм *P1* с поочередным выбором критериев при помощи датчика случайных чисел.

4. Решение прикладных задач

Пусть $A = \{a_1, ..., a_m\}$ – множество поставщиков, из которых нужно выбрать «наилучшего»; $K = \{K_1, ..., K_n\}$ – множество критериев, используемых для оценки поставщиков из *A*. Задача состоит в поиске эффективного поставщика (поставщиков). Если эффективных поставщиков несколько, то их расположение (упорядочение, ранжирование) осуществляется в порядке предпочтения по значениям критериев множества *K*.

Как видно из табл. 1, часть информации о поставщиках измеряется в качественных, а часть – в количественных шкалах. Поэтому для того, чтобы эти данные были сопоставимыми и количественными, произведем переход от значений разнотипных параметров к их нечетким оценкам, измеряемым в одной и той же количественной шкале.

Определим шкалу измерения в виде интервала вещественных чисел [0,1] и для каждого поставщика $a_j \in A (j = 1, ..., m)$ по значению каждого критерия $K_i (i = 1, ..., n)$ установим числовую оценку $\mu_i(a_j) \in [0,1]$, которая характеризует, насколько этот поставщик соответствует понятию «наилучший по i-му критерию». В результате каждый поставщик a_j теперь будет представлен не множеством значений оценок, а множеством $\{\mu_1(a_j), \mu_2(a_j), ..., \mu_n(a_j)\}$ соответствующих им числовых оценок. При этом все они измеряются в одной и той же числовой шкале (интервал [0,1]) и, следовательно, могут быть использованы совместно в численных расчетах (табл. 2).

Таким образом, для каждого $K_i \in K (i = 1, ..., n)$ имеется множество $\{\mu_i(a_1), \mu_i(a_2), ..., \mu_i(a_m)\}$, каждый элемент которого характеризует соответствие поставщика a_j понятию «наилучший» по этому критерию. Следовательно, это понятие можно представить нечетким множеством, заданным на универсальном множестве поставщиков *A*, $\tilde{K}_i = \{\mu_i(a_1)/a_1, \mu_i(a_2)/a_2, ..., \mu_i(a_m)/a_m\}$ с функцией принадлежности $\mu_i(a_j) \in [0,1]$, характеризующей совместимость любого поставщика $a_j \in A (j = 1, ..., m)$ с данным понятием.

Оценки параметров, в качестве которых выступают значения функции принадлежности, можно получать непосредственно от эксперта (прямой метод) или, если у него возникают трудности с заданием значений функций принадлежности, можно использовать какие-либо косвенные методы, например, метод парных сравнений.

5. Пример задачи выбора поставщика

Для примера рассмотрим задачу выбора наилучшего поставщика строительных материалов среди тринадцати компаний, характеризующихся критериями, приведенными в табл. 1.

Заметим, что в этом случае необходимо совместно использовать данные, измеряемые в количественной шкале отношений («Сроки доставки», «Стоимость доставки», «Цена продукции»), и данные, измеряемые в качественных шкалах порядка («Качество продукции», «Финансовое состояние», «Удаленность от потребителя») и наименований («Условия платежа», «Вид платежа»). Если для первой шкалы допустимыми являются как логические, так и арифметические операции, то для остальных шкал использование арифметических операций недопустимо. Мало того, к данным шкалы наименований можно применять только одну логическую операцию – сравнение на эквивалентность.

Таблица 1. Критерии оценки поставщиков

Показатель	**Шкала измерения**
Сроки доставки (K_1)	(0, ∞), дни
Стоимость доставки (K_2)	(0, ∞), грн за 1 т
Условия платежа (K_3)	{Предоплата, Рассрочка, Оплата по факту}
Качество продукции (K_4)	{Низкое, Среднее, Высокое}
Финансовое состояние (K_5)	{Неустойчиво, Устойчиво}
Вид платежа (K_6)	{Наличный, Безналичный}
Цена продукции (K_7)	(0, ∞), грн за 1 т
Удаленность от потребителя (K_8)	{Рядом, Недалеко, Далеко}

Предположим, что эксперт определил значения функции принадлежности для данной задачи (табл. 2).

Таблица 2. Экспертная оценка значений критериев

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
K_1	0,75	0,85	0,90	0,91	0,95	0,75	0,85	0,91	0,93	0,78	0,88	0,90	0,90
K_2	0,90	0,95	0,80	0,85	0,78	0,88	0,95	0,90	0,85	0,93	0,90	0,88	0,78
K_3	0,30	0,60	0,60	0,90	0,90	0,60	0,30	0,90	0,90	0,30	0,30	0,90	0,60
K_4	0,70	0,50	0,90	0,70	0,90	0,50	0,70	0,90	0,90	0,30	0,30	0,70	0,90
K_5	0,60	0,90	0,60	0,90	0,90	0,60	0,90	0,60	0,90	0,90	0,60	0,90	0,90
K_6	0,50	0,80	0,50	0,80	0,80	0,50	0,50	0,80	0,80	0,50	0,80	0,80	0,50
K_7	0,90	0,90	0,89	0,90	0,91	0,93	0,90	0,93	0,95	0,88	0,91	0,94	0,95
K_8	0,80	0,60	0,80	1,00	0,60	0,80	1,00	1,00	0,80	0,60	0,60	1,00	0,60

Покажем результаты работы алгоритмов *P1* и *P2* на данном примере.

Результат работы алгоритма *P1*. Пусть критерии эффективности строго ранжированы по важности в порядке увеличения их номеров, то есть $K_1 \succ K_2 \succ \cdots \succ K_8$ и $X_0^D = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$.

Шаг 1. Пусть $\beta_1 = 0{,}85$, тогда $X_1^D = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8, a_9, a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$.

Шаг 2. Пусть $\beta_2 = 0{,}81$, тогда $X_2^D = \{a_2, a_4, a_7, a_8, a_9, a_{11}, a_{12}\}$.

Шаг 3. Пусть $\beta_3 = 0{,}60$, тогда $X_3^D = \{a_2, a_4, a_8, a_9, a_{12}\}$.

Шаг 4. Пусть $\beta_4 = 0{,}70$, тогда $X_4^D = \{a_4, a_8, a_9, a_{12}\}$.

Шаг 5. Пусть $\beta_5 = 0{,}60$, тогда $X_5^D = \{a_4, a_8, a_9, a_{12}\}$.

Шаг 6. Пусть $\beta_6 = 0{,}80$, тогда $X_6^D = \{a_4, a_8, a_9, a_{12}\}$.

Шаг 7. Пусть $\beta_7 = 0{,}93$, тогда $X_7^D = \{a_8, a_9, a_{12}\}$.

Шаг 8. Пусть $\beta_8 = 1{,}00$, тогда $X_8^D = \{a_8, a_{12}\}$.

По результату работы алгоритма *P1* эффективными являются две альтернативы $\{a_8, a_{12}\}$.

Результат работы алгоритма *P2*. Пусть критерии эффективности равнозначны по важности и $X_0^D = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$.

Шаг 1. Пусть $\beta_1 = 0{,}85$, тогда $X_1^D = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8, a_9, a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$.

Шаг 2. Пусть $\beta_2 = 0{,}81$, тогда $X_2^D = \{a_1, a_2, a_4, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$.

Шаг 3. Пусть $\beta_3 = 0{,}60$, тогда $X_3^D = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9, a_{12}, a_{13}\}$.

Шаг 4. Пусть $\beta_4 = 0{,}70$, тогда $X_4^D = \{a_1, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8, a_9, a_{12}, a_{13}\}$.

Шаг 5. Пусть $\beta_5 = 0{,}60$, тогда $X_5^D = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$.

Шаг 6. Пусть $\beta_6 = 0{,}80$, тогда $X_6^D = \{a_2, a_4, a_5, a_8, a_9, a_{11}, a_{12}\}$.

Шаг 7. Пусть $\beta_7 = 0{,}93$, тогда $X_7^D = \{a_6, a_8, a_9, a_{12}, a_{13}\}$.

Шаг 8. Пусть $\beta_8 = 1{,}00$, тогда $X_8^D = \{a_4, a_7, a_8, a_{12}\}$.

Шаг 9. Эффективное множество $X^* = \{a_8, a_{12}\}$.

По результату работы алгоритма *P2* эффективными являются две альтернативы $\{a_8, a_{12}\}$.

Как показало тестирование этих двух алгоритмов, при одинаковых значениях порогов их результаты совпадают.

6. Выводы

Приведенные алгоритмы позволяют решать широкий спектр задач, когда критерии эффективности описаны нечетко. Следует отметить, что большая часть математического аппарата, применявшегося в теории поддержки и принятия решений, допускает обобщение на случай нечетких множеств и лингвистических переменных. Элементы нечеткой математики находят широкое применение в моделях принятия решений [8, 9]. Основанная на теории нечетких множеств новая методология построения компьютерных систем, а именно нечетких систем, существенно расширяет области применения компьютеров. Прикладные нечеткие системы являются одной из передовых технологий, в которых лидирует Япония [10]. Нечеткие системы сегодня широко применяются как в промышленности, так и для решения задач управления в медицине, экономике, маркетинге, страховании, обучении и других областях, где существенную роль играет субъективный опыт экспертов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Simon H. The Structure of Ill-structured Problems / H. Simon // Artificial Intelligence. – 1973. – Vol. 4. – P. 181 – 202.

2. Диев В.С. Гносеологические и методологические аспекты неопределенности в принятии решений / В.С. Диев // Личность и познание: сб. науч. тр. – М., 1991. – С. 192 – 211.

3. Диев В.С. Нечеткость в принятии решений / В.С. Диев // Философия науки. – 1993. – № 1 (4). – С. 45 –52 с.

4. Беллман Р. Принятие решений в расплывчатых условиях / Р. Беллман, Л. Заде // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир, 1976. – С. 172 – 215.

5. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений / Заде Л. – М.: Мир, 1976. – 165 с.

6. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / Кофман А. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
7. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / Орловский С.А. – М.: Наука, 1981. – 206 с.
8. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 311 с.
9. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. – М.: Радио и связь, 1989. – 240 с.
10. Прикладные нечеткие системы / К. Асан, Д. Ватада, С. Иваи [и др.]; пер. с япон. – М.: Мир, 1993. – 75 с.

Стаття надійшла до редакції 14.12.2010