УДК 519.2+600.1

И.И. ГОРБАНЬ

МАРКОВСКИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ МОДЕЛИ

Анотація. *Поняття марківського випадкового процесу узагальнено на випадок гіпервипадкового процесу. Для гіпервипадкового марківського процесу отримані рівняння, аналогічні відомим рівнянням Колмогорова для марківського випадкового процесу. Як приклади розглянуті вінеровський і гауссівський гіпервипадкові марківські процеси.*
Ключові слова: *теорія гіпервипадкових явищ, марківський процес, вінеровський процес, гауссівський процес.*

Аннотация*. Понятие марковского случайного процесса обобщено на случай гиперслучайного процесса. Для гиперслучайного марковского процесса получены уравнения, аналогичные известным уравнениям Колмогорова для марковского случайного процесса. В качестве примеров рассмотрены винеровский и гауссовский гиперслучайные марковские процессы.*
Ключевые слова: *теория гиперслучайных явлений, марковский процесс, винеровский процесс, гауссовский процесс.*

Abstract. *The notion of Markov random process has been generalized on hyper-random process. Equations similar to known Kolmogorov equations for Markov random process have been obtained for hyper-random Markov process. As examples, Wiener and Gaussian hyper-random Markov processes have been researched.*
Keywords: *theory of hyper-random phenomena, Markov process, Wiener process, Gaussian process.*

1. Введение

Для описания различных физических эффектов широко используются вероятностные подходы. Теория вероятности создавалась, а затем развивалась в первую очередь для описания физических событий, величин, процессов и полей, обладающих свойством статистической устойчивости.

Как ни странно, до недавнего времени понятие статистической устойчивости не было формализовано. В работах [1, 2] введены понятия статистической устойчивости последовательности случайных величин и случайных процессов и предложены параметры, характеризующие нарушение статистической устойчивости на конечном интервале наблюдения.

Экспериментальные исследования реальных процессов различной физической природы показали [1–3], что на больших интервалах наблюдения происходят нарушения статистической устойчивости.

Для описания и изучения статистически неустойчивых явлений была предложена новая физико-математическая теория гиперслучайных явлений [2, 4], рассматривающая проблему нарушения статистической устойчивости как с физических, так и математических позиций.

В рамках новой теории физические явления (события, величины, процессы, поля) представляются гиперслучайными явлениями (гиперслучайными моделями), под которыми понимается множество случайных событий, величин или функций, каждый элемент которого ассоциируется с определенными статистическими условиями $g \in G$.

В настоящее время сформированы основы теории, однако остаются еще не изученными многие вопросы, представляющие прикладной интерес, в частности, вопросы ее применения для решения статистических задач физики.

Целью настоящей статьи является разработка основ построения гиперслучайных марковских моделей для решения практических задач.

2. Определение марковского гиперслучайного процесса

Пусть $X_0 = X(t_0),...,X_N = X(t_N)$ – значения непрерывного гиперслучайного процесса $X(t)$ в произвольные моменты времени $t_0 < t_1 < ... < t_N$. Гиперслучайный процесс $X(t)$ назовем марковским, если для любого момента времени t_N и любого условия $g_{t_N} \in G$ одномерная условная плотность вероятностей

$$f_1(x_N;t_N;g_{t_N} / x_0,...,x_{N-1};t_0,...,t_{N-1};g_{t_0},...,g_{t_{N-1}}) = f_1(x_N;t_N;g_{t_N} / x_{N-1};t_{N-1};g_{t_{N-1}}). \quad (1)$$

Отсюда следует, что многомерная плотность вероятностей марковского гиперслучайного процесса $X(t)$ может быть представлена следующим образом:

$$f_N(x_0,...,x_N;t_0,...,t_N;g_{t_0},...,g_{t_N}) = f_1(x_0;t_0;g_{t_0})\prod_{n=1}^{N}\Pi(x_n;t_n;g_{t_n} / x_{n-1};t_{n-1};g_{t_{n-1}}), \quad (2)$$

где $\Pi(x_n;t_n;g_{t_n} / x_{n-1};t_{n-1};g_{t_{n-1}}) = f_1(x_n;t_n;g_{t_n} / x_{n-1};t_{n-1};g_{t_{n-1}})$ – плотность вероятностей перехода случайной величины $X(t)/g_t$, находящейся в состоянии x_{n-1} в момент времени t_{n-1} в условиях $g_{t_{n-1}}$ в состояние x_n в момент времени t_n в условиях g_{t_n}.

Из выражения (1) следует, что если значения гиперслучайного процесса в любые несовпадающие моменты времени независимы при всех условиях g_t, то процесс – марковский. Обратное утверждение неверно.

Плотность вероятностей перехода $\Pi(x;t;g_t / x';t';g_{t'})$ является неотрицательной величиной, нормированной к единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(x;t;g_t / x';t';g_{t'})\mathrm{d}x = 1.$$

Кроме того, эта плотность вероятностей обладает свойством сингулярности:

$$\lim_{\substack{t\to t' \\ g_t \to g_{t'}}}\Pi(x;t;g_t / x';t';g_{t'}) = \delta(x-x')$$

и удовлетворяет обобщенному уравнению Маркова (уравнению Смолуховского):

$$\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0}) = \int_{-\infty}^{\infty}\Pi(x;t;g_t / x';t';g_{t'})\Pi(x';t';g_{t'} / x_0;t_0;g_{t_0})\mathrm{d}x'.$$

3. Уравнения Колмогорова для марковского гиперслучайного процесса

Для марковского гиперслучайного процесса $X(t)$ плотность вероятностей перехода $\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0})$ из состояния x_0 в момент времени t_0 в условиях g_{t_0} в состояние x в момент времени t в условиях g_t определяется уравнением

$$-\frac{\partial}{\partial t_0}\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0}) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu(x_0;t_0;g_{t_0})}{\nu!}\frac{\partial^\nu \Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0})}{\partial x_0^\nu}, \quad (3)$$

где $$A_\nu(x_0;t_0;g_{t_0}) = \lim_{\substack{\Delta t\to 0 \\ g_{t_0+\Delta t}\to g_{t_0}}}\frac{1}{\Delta t}\mathrm{M}\left[(X(t_0+\Delta t;g_{t_0+\Delta t} / x_0;t_0;g_{t_0}) - X(t_0;g_{t_0} / x_0;t_0;g_{t_0}))^\nu\right].$$

Это выражение прямо следует из известной теоремы для случайного марковского процесса [5, 6].

Случайная величина $X(t_0+\Delta t; g_{t_0+\Delta t} / x_0; t_0; g_{t_0}) - X(t_0; g_{t_0} / x_0; t_0; g_{t_0})$ представляет собой приращение состояния, происходящее за время Δt. Поэтому коэффициенты $A_\nu(x_0; t_0; g_{t_0})$ можно трактовать как локальные скорости изменения начальных моментов ν-го порядка приращения состояния.

По аналогии с уравнениями, описывающими диффузионные случайные процессы, гиперслучайные процессы, описываемые уравнением (3) с коэффициентами, равными нулю для всех $\nu \ge 3$, будем называть диффузионным или первым (обратным) уравнением Колмогорова:

$$-\frac{\partial}{\partial t_0}\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0}) = a(x_0;t_0;g_{t_0})\frac{\partial}{\partial x_0}\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0}) + \\ +\frac{1}{2}b(x_0;t_0;g_{t_0})\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0}), \tag{4}$$

а уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0}) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x;t;g_t)\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0})\right] + \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b(x;t;g_t)\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0})\right] \tag{5}$$

– уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова или прямым уравнением Колмогорова, где $a(x_0;t_0;g_{t_0}) = A_1(x_0;t_0;g_{t_0})$ – коэффициент сноса, а $b(x_0;t_0;g_{t_0}) = A_2(x_0;t_0;g_{t_0})$ – коэффициент диффузии.

Гиперслучайные марковские процессы, описываемые уравнениями (4), (5), будем называть диффузионными.

Уравнения (4) и (5) – зависимые.

Из уравнения (5) следует уравнение для одномерной плотности вероятностей:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(x;t;g_t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x;t;g_t) f_1(x;t;g_t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b(x;t;g_t) f_1(x;t;g_t)\right]. \tag{6}$$

Гиперслучайный диффузионный марковский процесс будем называть однородным во времени, если плотность вероятностей перехода $\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0})$ не зависит прямо от моментов времени t, t_0 и условий g_t, g_{t_0}, а определяется лишь их разностями $\tau = t - t_0$, $g_\tau = g_t - g_{t_0}$: $\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0}) = \Pi(x / x_0;\tau;g_\tau)$. Одномерная плотность вероятностей такого процесса $f_1(x)$, а также коэффициенты сноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$ не зависят от времени и условий.

Если непрерывный гиперслучайный марковский процесс стационарен в узком смысле при всех условиях [2], то он однороден. Это следует из известной теоремы для случайных марковских процессов [5]. Обратное утверждение неверно.

Из соотношения (6) следует, что для стационарного в узком смысле при всех условиях диффузионного однородного гиперслучайного марковского процесса

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[b(x) f_1(x)\right] = 2a(x) f_1(x) + C,$$

где C – константа, определяемая из условия нормировки.

Стохастическим дифференциальным уравнением, описывающим гиперслучайный процесс, будем называть уравнение вида

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = h(x,t,g_t) + g(x,t,g_t)N(t;g_t),$$

где $h(x,t,g_t)$ и $g(x,t,g_t)$ – детерминированные функции, удовлетворяющие условиям Липшица,

$$\left|h(x,t,g_t) - h(y,t,g_t)\right| + \left|g(x,t,g_t) - g(y,t,g_t)\right| \le L\left|x - y\right| \ (L = \mathrm{const} > 0),$$

$N(t) = \{N(t;g_t),\, g_t \in G\}$ – гиперслучайный гауссовский шум, представляющий собой множество гауссовских некоррелированных случайных процессов $N(t;g_t)$ с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью мощности $N_0(g_t)/2$, зависящей от условий g_t в момент времени t.

4. Винеровский гиперслучайный процесс

Разберем следующую задачу статистической механики. Пусть в газе или жидкости находится микрочастица единичной массы. Температура среды T непредсказуемо меняется в пределах $[T_1, T_2]$. При фиксированной температуре T скорость теплового движения молекулы в фиксированном направлении представляет собой случайную величину, описываемую в приближении Максвелла гауссовским законом распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией kT/m [7], где k – постоянная Больцмана, m – масса молекулы.

Из-за непредсказуемого изменения температуры среды скорость теплового движения молекулы статистически неустойчива и может быть описана гиперслучайной величиной, границы дисперсии которой равны kT_1/m, kT_2/m.

Молекулы, сталкиваясь с частицей, вызывают ее перемещение. В каждый фиксированный момент времени происходит большое число таких столкновений. Силу удара $N(t)$, вызывающего движение частицы вдоль заданного направления и скорость движения частицы $V(t)$, можно рассматривать как гиперслучайные функции гауссовского типа.

Если при фиксированных статистических условиях g_t (температуре среды) сила удара описывается гауссовской случайной функцией $N(t;g_t)$ в виде гауссовского белого шума с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью мощности $N_0(g_t)/2$, то на основании второго закона Ньютона скорость движения частицы $V(t;g_t)$ описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}v(t;g_t)}{\mathrm{d}t} = n(t;g_t). \tag{7}$$

Решением уравнения при нулевом начальном условии ($v(0;g_0) = 0$) является чисто диффузионный (винеровский) гиперслучайный процесс:

$$v(t;g_t) = \int_0^t n(t_1;g_{t_1})\,\mathrm{d}t_1. \tag{8}$$

Из выражения (8) видно, что значение процесса в текущий момент времени t в условиях g_t определяется множеством статистических условий в момент времени t и предшествующие ему моменты времени $t_1 < t$. Это значение зависит от частоты встречаемости в реализации тех или иных условий.

Гиперслучайный винеровский процесс обладает свойствами, похожими (но не идентичными) на свойства случайного винеровского процесса:

– гиперслучайный винеровский процесс является центрированным ($m_v(t) = \mathrm{M}[V(t, g_t)]=0$);

– дисперсия этого процесса описывается интегралом

$$\sigma_v^2(t) = \int_0^t \int_0^t \mathrm{M}[n(t_1; g_{t_1}) n(t_2; g_{t_2})] \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 = \frac{1}{2} \int_0^t N_0(g_{t_1}) \, \mathrm{d}t_1 ;$$

– процесс – гауссовский. Его плотность вероятностей описывается выражением

$$f_1(v;t;g_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v(t)} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2(t)} \right); \tag{9}$$

– процесс – марковский, поскольку описывается выражением

$$v(t_3) = v(t_2; g_{t_2}) + \int_{t_2}^{t_3} n(t, g_t) \, \mathrm{d}t ;$$

– процесс имеет нулевой коэффициент сноса ($a(v;t;g_t) = 0$) и коэффициент диффузии $b(v;t;g_t) = N_0(g_t)/2$, зависящий в общем случае от времени.

В частном случае, когда условия g_t не зависят от времени t ($g_t = g$), дисперсия винеровского гиперслучайного процесса $\sigma_v^2(t) = N_0(g)t/2$.

Границы дисперсии $\sigma_{iv}^2(t)$, $\sigma_{sv}^2(t)$ этого процесса описываются выражениями $\sigma_{iv}^2(t) = N_{i0}t/2$, $\sigma_{sv}^2(t) = N_{s0}t/2$, где N_{i0} и N_{s0} – соответственно нижняя и верхняя границы спектральной плотности мощности N_0 гиперслучайного гауссовского шума $N(t)$.

Отсюда следует, что диапазон изменения дисперсии винеровского гиперслучайного процесса расширяется пропорционально времени t.

Для гиперслучайного винеровского процесса с учетом приведенных свойств прямое уравнение Колмогорова имеет вид

$$\frac{\partial f_1(v;t;g_t)}{\partial t} = \frac{1}{4} N_0(g_t) \frac{\partial^2 f_1(v;t;g_t)}{\partial v^2},$$

а его решение описывается выражением (9).

5. Гауссовский марковский гиперслучайный процесс

Обобщением рассмотренного винеровского гиперслучайного процесса является гауссовский марковский гиперслучайный процесс $X(t)$, случайные составляющие которого удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}x(t;g_t)}{\mathrm{d}t} + \alpha x(t;g_t) = \gamma \, n(t;g_t), \tag{10}$$

где α, γ – постоянные коэффициенты.

К такому уравнению можно прийти, в частности, рассматривая предыдущую задачу с учетом вязкости среды.

Тот факт, что рассматриваемый гиперслучайный процесс $X(t)$ является гауссовским, следует из того, что $N(t;g_t)$ – гауссовский белый шум, а уравнение (10) – линейное. То, что гиперслучайный процесс $X(t)$ является марковским, следует из того, что случайный процесс $X(t;g_t)$ – марковский.

Общим решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (10), является $x(t;g_t)=C\exp(-\alpha t)$, где C – константа. Частным решением этого уравнения является

$$x(t;g_t)=\gamma\exp(-\alpha t)\int_0^t n(t_1,g_{t_1})\exp(\alpha t_1)\mathrm{d}t_1\,,$$

а его общим решением –

$$x(t;g_t)=x(0,g_0)\exp(-\alpha t)+\gamma\exp(-\alpha t)\int_0^t n(t_1,g_{t_1})\exp(\alpha t_1)\mathrm{d}t_1, \qquad (11)$$

где $x(0,g_0)$ – начальные условия в нулевой момент времени в условиях g_0.

Из выражения (11) видно, что значение процесса в текущий момент времени t в условиях g_t так же, как и для винеровского гиперслучайного процесса, определяется множеством статистических условий g_{t_1} в предшествующие моменты времени $t_1<t$ и в момент времени t. Но в отличие от винеровского процесса это значение зависит не от частоты встречаемости в реализации тех или иных условий g_{t_1}, а от последовательности следования этих условий.

Гиперслучайный гауссовский марковский процесс обладает свойствами, похожими на (но не идентичными) свойства случайного гауссовского марковского процесса:

– математическое ожидание гиперслучайного гауссовского марковского процесса не зависит от изменения во времени условий и определяется условиями g_0 в первоначальный момент времени: $m_x(t)=x(0;g_0)\exp(-\alpha t)$;

– дисперсия этого процесса:

$$\sigma_x^2(t)=\frac{\gamma^2}{2}\int_0^t N_0(g_{t_1})\exp(2\alpha(t_1-t))\mathrm{d}t_1\,;$$

– ковариационная функция процесса:

$$R_x(t_1,t_2)=\sigma_x^2(t)\exp(-\alpha|\tau|),$$

где $\tau=t_2-t_1$; $t=\min(t_1,t_2)\geq 0$;

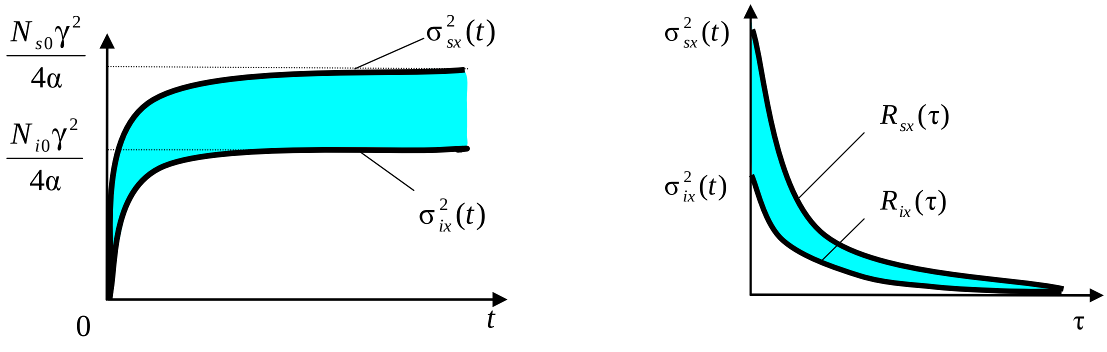
– коэффициент сноса $a(x;t;g_t)=-\alpha x(t;g_t)$, а коэффициент диффузии $b(x;t;g_t)=N_0(g_t)\gamma^2/2$.

Нетрудно убедиться, что при $\alpha>0$ границы дисперсии $\sigma_{ix}^2(t)$, $\sigma_{sx}^2(t)$ и границы ковариационной функции $R_{ix}(t_1,t_2)$, $R_{sx}(t_1,t_2)$ гауссовского марковского гиперслучайного процесса описываются выражениями

$$\sigma_{ix}^2(t)=\frac{N_{i0}\gamma^2}{4\alpha}\left(1-\exp(-2\alpha t)\right),\qquad \sigma_{sx}^2(t)=\frac{N_{s0}\gamma^2}{4\alpha}\left(1-\exp(-2\alpha t)\right),$$

$$R_{ix}(t_1,t_2)=\sigma_{ix}^2(t)\exp(-\alpha|\tau|),\qquad R_{sx}(t_1,t_2)=\sigma_{sx}^2(t)\exp(-\alpha|\tau|).$$

Отсюда следует, что с ростом t диапазон изменения дисперсии гиперслучайного процесса постепенно возрастает, но при $t\to\infty$ стремится к независящему от времени интервалу $\left[N_{i0}\gamma^2/(4\alpha),\quad N_{s0}\gamma^2/(4\alpha)\right]$ (рис. 1а). Дисперсия процесса в момент времени t определяется статистическими условиями в этот момент времени и предшествующие ему моменты времени.



а б

Рис. 1. Границы дисперсии (а) и границы ковариационной функции (б) гауссовского марковского гиперслучайного процесса

При увеличении величины τ (интервала между отсчетами) диапазон изменения ковариационной функции уменьшается и при $\tau\to\infty$ стремится к нулю (рис. 1 б). При этом коэффициент корреляции процесса

$$r_x(t_1,t_2)=\frac{R_x(t_1,t_2)}{\sigma_x^2(t)}=\exp(-\alpha|\tau|)$$

не зависит от изменения статистических условий во времени.

Прямое уравнение Колмогорова для плотности вероятностей гауссовского марковского гиперслучайного процесса имеет вид

$$\frac{\partial f_1(x;t;g_t)}{\partial t}=\alpha\frac{\partial}{\partial x}[xf_1(x;t;g_t)]+\frac{\gamma^2 N_0(g_t)}{2}\frac{\partial^2 f_1(x;t;g_t)}{\partial x^2}.$$

Решение этого уравнения описывается гауссовской функцией

$$f_1(x;t;g_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t)}\exp\left(-\frac{(x-m_x(t))^2}{2\sigma_x^2(t)}\right).$$

6. Выводы

1. Для описания физических процессов в непредсказуемо меняющихся статистических условиях предложены марковские гиперслучайные модели.
2. Обобщено понятие марковского процесса на случай гиперслучайного процесса. Получены прямое и обратное уравнения Колмогорова, описывающие диффузионные гиперслучайные процессы.
3. Исследованы винеровский и гауссовский марковский гиперслучайные процессы. Установлено, что значения этих процессов определяются статистическими условиями в текущий момент времени и моменты времени, предшествующие ему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбань И.И. Нарушение статистической устойчивости физических процессов / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2010. – № 1. – С. 171 – 184.

2. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 320 с.
3. Gorban I.I. Disturbance of statistical stability / I.I. Gorban // Information Models of Knowledge. – Kiev – Sofia: ITHEA, 2010. – P. 398 – 410.
4. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: ИПММС НАН Украины, 2007. – 184 с. – Режим доступа: http://ifsc.ualr.edu/jdberleant/intprob/, http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.
5. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк [и др.]. – М.: Наука, 1985. – 637 с.
6. Горбань І.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів [Електронний ресурс] / Горбань І.І. – К.: ИПММС НАН України, 2003. – 245 с. – Режим доступу: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.
7. Яворский Б.М. Справочник по физике для инженеров и студентов ВУЗов / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М.: Наука, 1968. – 940 с.

Стаття надійшла до редакції 07.04.2011