УДК 519.8

А.М. Нагірна

Розв'язування оптимізаційної задачі з дробово-лінійною цільовою функцією на комбінаторній конфігурації розміщень

Рассмотрены задача оптимизации с дробно-линейной функцией цели на комбинаторной конфигурации размещений и алгоритм решения таких задач на основе теории графов с учетом свойств и структуры множества размещений. Обосновано построение последовательности значений функции–ограничения, разложение точек размещения по подграфам графа согласно координатному методу на примере численного эксперимента.

The problem of optimization with a fractional-linear objective function on a combinatorial configuration placements is examened. The algorithm of solving such problems using graph theory, taking into account the properties and structure of the set of placements is analyzed. Building a sequence of functions-limit's values, decomposition points of permutations on subgraphs polyhedra according to the coordinate method by the example of numerical experiment is justified.

Розглянуто задачу оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі на комбінаторній конфігурації розміщень і алгоритм розв'язування даного типу задач на основі теорії графів з урахуванням властивостей та структури множини розміщень. Обґрунтовано побудову послідовності значень функції–обмеження, розкладання точок розміщення по підграфам графа згідно з координатним методом на прикладі числового експерименту.

Вступ. Велике зацікавлення спеціалістів викликають математичні моделі з дробово-лінійними функціями цілі, що зустрічаються в різних галузях діяльності людини. Дробово-лінійна функція характеризується відношенням двох лінійних форм, тому її можна застосовувати в прикладних задачах оптимізації деяких відносних показників, таких як рентабельність, трудомісткість, собівартість, продуктивність і т.ін. [1–3].

При розгляді певного класу оптимізаційних задач з дробово-лінійними функціями цілі досить часто виникають припустимі розв'язки з властивостями певних комбінаторних конфігурацій: перестановок, розміщень, сполучень, розбиттів. Тому необхідно розглянути нові підходи до розв'язання такого класу задач з урахуванням структурних властивостей комбінаторних множин, які забезпечують представлення відповідної комбінаторної структури у вигляді графа чи сітки. Дана властивість дозволяє за лічені кроки знайти розв'язання задачі без повного перебору елементів відповідної комбінаторної конфігурації [4–8].

Продовжуючи дослідження робіт [1, 2, 4–8], розглянемо підхід до розв'язання оптимізаційної задачі на конфігурації розміщень з дробово-лінійною цільовою функцією, з подальшим представленням конфігурації розміщень у вигляді структурного графа.

Постановка задачі

Розглянемо задачу комбінаторної оптимізації, у якій цільова функція $F(x)$ – дробово-лінійна, чисельник $f(x)$ і знаменник $g(x)$ – лінійні функції, в яких коефіцієнти визначаються за правилом арифметичної прогресії:

$$c_i = c_1 + \Delta(i-1), \; d_i = d_1 + \delta(i-1), \qquad (1)$$

припустима комбінаторна множина $X = \{x\}$ та додаткові лінійні обмеження, які утворюють опуклу многогранну множину $D \subset R^n$ наступного вигляду: $D = \{x \in R^n \mid Gx \le d\}$, де $G \in R^{m \times n}$, $d \in R^m$. Запишемо лінійні обмеження у вигляді нерівностей:

$$Gx = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j \ge d_i, \; i \in N_m, \; j \in N_n. \qquad (2)$$

Необхідно знайти оптимальне розв'язання, $x^0 \in X$, при якому цільова функція набуває екстремального значення $f(x^0) = \operatorname{extr}_{x \in X} f(X)$, $\operatorname{extr} \in \{\min, \max\}$.

Як відомо з [4], для конфігурації перестановок можна побудувати гамільтонів шлях усередині кожної шестірки елементів перестановки і прослідкувати зміни значень цільової функції у вершинах графа на кожному з підграфів, як і для лінійної функції.

Теорема 1 [4]. Граф перестановок $\tilde{G}(P_n)$ для дробово-лінійної функції $F(x)$, коефіцієнти якої визначені згідно (1), збігається з графом перестановок для лінійної функції $G(P_n)$ з точністю до орієнтації.

Теорема 2 [5]. Граф $G(A(n,m))$ конфігурації розміщень $A(n,m)$ при $n>m$ і довільному векторі $\vec{A}=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ еквівалентний графу $G(P_n)$ комбінаторної конфігурації перестановок P_n.

Отже, метод направленого структурування можна застосувати до розв'язання задач з дробово-лінійними функціями цілі та з лінійними додатковими обмеженнями на комбінаторній конфігурації розміщень.

Алгоритм розв'язання комбінаторної задачі з дробово-лінійними функціями цілі та лінійними додатковими обмеженнями на комбінаторній конфігурації розміщень

Крок 1. ***Задання дробово-лінійної функції цілі.*** На початковому етапі визначаються коефіцієнти дробово-лінійної цільової функції за формулою (1), відповідно для чисельника і знаменника.

Крок 2. ***Задання конфігурації розміщень.*** Число конфігурацій графа конфігурації розміщень $A(n,m)$, $m \le n$, утвореного із елементів $\{1, 2, ..., n\}$, розраховується за формулою $A_n^m = n!/(n-m)!$.

Крок 3. ***Нормалізація.*** З урахуванням формули (1) дробово-лінійну функцію нормалізовано, тому слід визначити нормалізацію за допомогою вихідної перестановки *u* для кожної *i*-ї обмежної функції g_i [6]:

$$u_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & m \\ 2 & 1 & ... & \varphi_m \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Тоді початкова множина розміщень замінюється на базову за допомогою вихідної перестановки u, отримується індивідуальна множина розміщень A_i, і відповідно для кожної функції обмеження граф розміщень $G(A(n,m))$ має стандартний вигляд.

Крок 4. ***Розв'язання задачі локалізації*** **[7].** Розв'язуючи задачу локалізації g_i, $i \in N_m$, отримуємо припустиму множину розміщень для додаткового лінійного обмеження g_i. За допомогою оберненої перестановки до (3) визначаємо ту ж множину в базовій множині розміщень $G(A(n,m))$.

Крок 5. ***Пошук розв'язків задачі.*** Знаходимо переріз множин розміщень обмежувальних функцій та визначаємо множину розв'язків в базовій множині. Шляхом підстановки відповідних вершин графа в дробово-лінійну цільову функцію знаходимо необхідний екстремум функції.

Розглянемо приклад застосування алгоритму.

Дано функцію $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)=x_1 = 3x_2+5x_3$, $g(x)=2x_1+3x_2+4x_3$ на множині розміщень, сформовану з елементів $A=(1,2,3,4)$. Задано додаткові обмеження, що визначають область припустимих значень цільової функції: $g_1 = 7x_1 + x_2 + 2x_3 \le 20$, $g_2 = 4x_1 + x_2 + 7x_3 \ge 35$. Необхідно знайти максимум цільової функції на множині розміщень A_4^3.

Розв'язання. Задано нормалізовану цільову функцію $F(x)$. Тому граф G конфігурації розміщень для такої функції має стандартний вигляд (рис. 1), число конфігурацій $A_4^3 = 24$.

Нормалізуємо g_1 шляхом перестановки $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ до вигляду $g_1' = x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 20$.

Загальна структурна схема графу G розбивається на структурні схеми підграфів G_1, G_2, G_3, G_4, в крайніх вершинах яких визначають мінімальне та максимальне значення функції g_1' на підграфах.

Розв'язуючи задачу, необхідно враховувати, що елементи множини розміщень мають задовольняти умову $g_1' = x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 20$. Згідно рис. 2, підграф G_1 не задовольняє обмеження, а множини вершин підграфів G_2, G_3, G_4 необхідно розглянути детально.

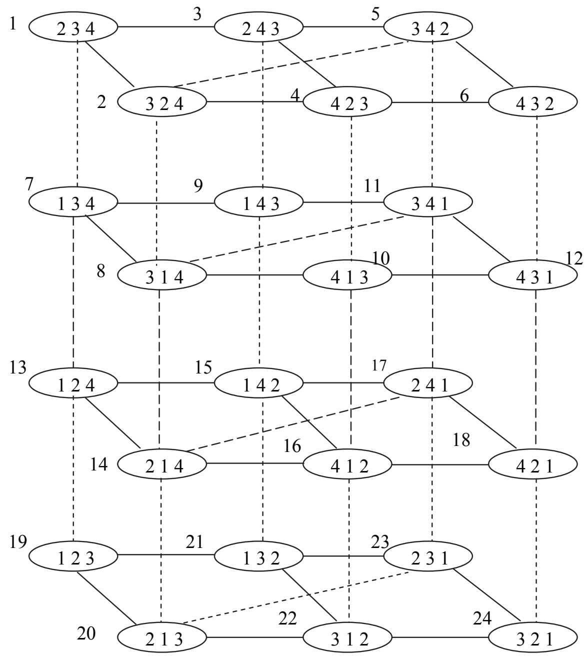

Рис. 1. Стандартний вигляд графа конфігурації розміщень

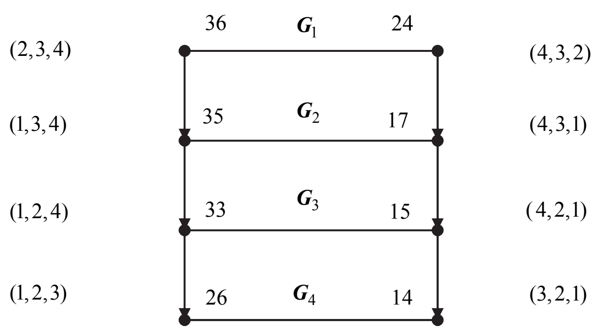

Рис. 2. Загальна структурна схема графу для g_1'

Для вершин підграфа G_2 значення g_1' будуть наступні:

Таблиця 1

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_1'
7	1	3	4	35
8	3	1	4	33
9	1	4	3	30
10	4	1	3	27
11	3	4	1	18
12	4	3	1	17

Згідно табл. 1, умову $g_1' = x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 20$ задовольнятимуть вершини: 11, 12.

Побудуємо аналогічні таблиці для вершин підграфів G_3, G_4.

Таблиця 2

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_1'
13	1	2	4	33
14	2	1	4	32
15	1	4	2	23
16	4	1	2	20
17	2	4	1	17
18	4	2	1	15

Згідно табл. 2, обмеження $g_1' \le 20$ задовольнятимуть вершини: 16, 17, 18.

Таблиця 3

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_1'
19	1	2	3	26
20	2	1	3	25
21	1	3	2	21
22	3	1	2	19
23	2	3	1	15
24	3	2	1	14

Вершини 22, 23, 24 підграфа G_4 задовольняють умову обмеження (табл. 3).

Отже, припустима множина, що визначається обмеженням $g_1' \le 20$, складатиметься із наступних вершин: $x^{11} = (3,4,1)$, $x^{12} = (4,3,1)$, $x^{16} = (4,1,2)$, $x^{17} = (2,4,1)$, $x^{18} = (4,2,1)$, $x^{22} = (3,1,2)$, $x^{23} = (2,3,1)$, $x^{24} = (3,2,1)$. Користуючись перестановкою нормалізації $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, знаходимо базову множину A_1: $(1,3,4)$, $(1,4,3)$, $(2,4,1)$, $(1,2,4)$, $(1,4,2)$, $(2,3,1)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$.

Розглянемо обмежну функцію $g_2 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 25$, в якій коефіцієнти розміщено в порядку зростання, тому потреби в нормалізації не виникає. Загальна структурна схема графу G розбивається на структурні схеми підграфів G_1, G_2, G_3, G_4 і матиме вигляд, зображений на рис. 3

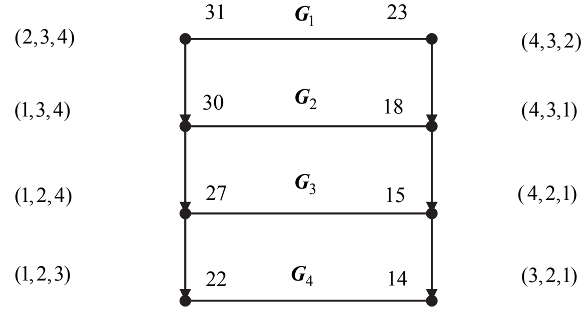

Рис. 3. Загальна структурна схема графу для g_2

Для пошуку множини припустимих розв'язків, обмежених функцією $g_2 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 25$, розглянемо підграфи G_1, G_2, G_3.

Розглянемо вершини підграфа G_1:

Таблиця 4

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_2
1	2	3	4	31
2	3	2	4	29
3	2	4	3	29
4	4	2	3	25
5	3	4	2	25
6	4	3	2	23

Згідно табл. 4, умову $g_2 \ge 25$ задовольнятимуть всі вершини підграфа G_1, крім шостої.

Розглянемо вершини підграфа G_2:

Таблиця 5

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_2
7	1	3	4	30
8	3	1	4	26
9	1	4	3	28
10	4	1	3	22
11	3	4	1	20
12	4	3	1	18

Згідно табл. 5, умову $g_2 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 25$ задовольнятимуть вершини 7, 8, 9.

Побудуємо аналогічну таблицю для вершин підграфа G_3.

Вершини 13, 14 підграфа G_4 задовольняють умову обмеження (табл. 6).

Таблиця 6

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_2
13	1	2	4	27
14	2	1	4	25
15	1	4	2	23
16	4	1	2	17
17	2	4	1	19
18	4	2	1	15

Допустима множина A_2, що визначається обмеженням $g_2 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 25$, складатиметься з наступних вершин: $x^1 = (2,3,4)$, $x^2 = (3,2,4)$, $x^3 = (2,4,3)$, $x^4 = (4,2,3)$, $x^5 = (3,4,2)$, $x^7 = (1,3,4)$, $x^8 = (3,1,4)$, $x\ \ = (1,4,3)$, $x^{13} = (1,2,4)$, $x^{14} = (2,1,4)$.

Отже, загальна множина розв'язків, яка визначається перерізом припустимої множини першого та другого обмежень, дорівнює: $A^* = A(g_1') \cap A(g_2) = \{(1,2,4);(1,3,4);(1,4,3)\}$. Значення цільових дробово-лінійних функцій в даних вершинах дорівнюють: max $F(x) = F(1,2,4) = F(1,3,4) = F(1,4,3) = 1,1$.

Висновки. Загальна схема алгоритму спрямованого структурування для комбінаторної конфігурації розміщень полягає у використанні властивості представлення многогранника розміщень у вигляді структури графа і подальшому пошуку розв'язків, які можуть бути вершинами або ребрами відповідного графа.

Подальші дослідження будуть спрямовані на створення нових підходів та алгоритмів за умови нелінійності цільової функції та програмній реалізації алгоритму для проведення числових експериментів при збільшенні потужності відповідної комбінаторної конфігурації.

1. *Шор Н.З.*, *Соломон Д.И.* Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании . – Кишенев: Штиинца, 1989. – 204 с.
2. *Семенова Н.В.*, *Колечкина Л.Н.*, *Нагорная А.Н.* Розв'язування задач векторної оптимізації з дробово-лінійними функціями критеріїв на комбінаторній множині полірозміщень // Наук. вісті НТУУ «КПІ». – 2009. – № 2. – С. 53–60.
3. *Семенова Н.В.*, *Колечкина Л.Н.*, *Нагорная А.Н.* Об одном подходе к решению векторных задач с дробно-линейными функциями критериев на комбинаторном множестве размещений // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 1. – С. 131–144.
4. *Донец Г.А.*, *Колечкина Л.Н.* Об одной задаче оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках // Там же. − № 2. – С. 12−16.
5. *Емеличев В.А.*, *Ковалев М.М.*, *Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
6. *Донец Г.А.*, *Колечкина Л.Н.* Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах / УСиМ. – 2009. − № 4. – С. 36−42.
7. *Донец Г.А.*, *Колечкина Л.Н.* Построение гамильтонова пути в графах перестановочных многогранников // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 1. – С. 10–16.
8. *Донец Г.А.*, *Колечкина Л.Н.* Алгоритм поиска значений линейной функции на лексикографически упорядоченных перестановках // Теорія оптимальних рішень. – 2009. – № 8. – С. 3−8.

Поступила 03.07.2014

Тел. для справок: +38 050 192-1433 (Киев)
E-mail: *vpn*2006*@rambler.ru*

А.Н. Нагорная

Решение оптимизационной задачи с дробно-линейной целевой функцией на комбинаторной конфигурации размещений

Введение. Особый интерес для специалистов представляют математические модели с дробно-линейными функциями цели, встречающиеся в различных областях деятельности человека. Дробно-линейная функция характеризуется отношением двух линейных форм, поэтому ее можно применять в прикладных задачах оптимизации некоторых относительных показателей в качестве таких, как рентабельность, трудоемкость, себестоимость, производительность и др. [1–3].

При рассмотрении определенного класса оптимизационных задач с дробно-линейными функциями цели часто возникают допустимые решения со свойствами определенных комбинаторных конфигураций: перестановок, размещений, сочетаний, разбиений. Поэтому необходимо рассмотреть новые подходы к решению такого класса задач с учетом структурных свойств комбинаторных множеств, обеспечивающих представление соответствующей комбинаторной структуры в виде графа или сетки. Данное свойство позволяет за считанные шаги найти решение задачи без полного перебора элементов соответствующей комбинаторной конфигурации [4–8].

Продолжая исследования работ [1, 2, 4–8], рассмотрим подход к решению оптимизационной задачи на конфигурации размещений с дробно-линейной целевой функцией, с последующим представлением конфигурации размещений в виде структурного графа.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу комбинаторной оптимизации, в которой целевая функция $F(x)$ – дробно-линейная, числитель $f(x)$ и знаменатель $g(x)$ – линейные функции, в которых коэффициенты определяются по правилу арифметической прогрессии:

$$c_i = c_1 + \Delta(i-1),\ d_i = d_1 + \delta(i-1), \qquad (1)$$

допустимое комбинаторное множество $X = \{x\}$ и дополнительные линейные ограничения, образующие выпуклое многогранное множество $D \subset R^n$ следующего вида: $D = \{x \in R^n \mid Gx \le d\}$, где $G \in R^{m\times n}$, $d \in R^m$. Запишем линейные ограничения в виде неравенств:

$$Gx = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j \ge d_i,\ i \in N_m,\ j \in N_n. \qquad (2)$$

Необходимо найти оптимальное решение, $x^0 \in X$, при котором целевая функция принимает экстремальное значение $f(x^0) = \operatorname{extr}_{x\in X} f(X)$, $\operatorname{extr} \in \{\min, \max\}$.

Как известно из [4], для конфигурации перестановок можно построить гамильтонов путь внутри каждой шестерки элементов перестановки и проследить изменения значений целевой функции в вершинах графа на каждом из подграфов, как и для линейной функции.

Теорема 1 [4]. Граф перестановок $\tilde{G}(P_n)$ для дробно-линейной функции $F(x)$, коэффициенты которой определяются согласно (1), совпадает с графом перестановок для линейной функции $G(P_n)$ с точностью до ориентации.

Теорема 2 [5]. Граф $G(A(n,m))$ конфигурации размещений $A(n,m)$ при $n > m$ и произвольном векторе $\vec{A} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ эквивалентен графу $G(P_n)$ комбинаторной конфигурации перестановок P_n.

Итак, метод направленного структурирования можно применить к решению задач с дробно-линейными функциями цели и с линейными дополнительными ограничениями на комбинаторной конфигурации размещений.

Алгоритм решения комбинаторной задачи с дробно-линейными функциями цели и линейными дополнительными ограничениями на комбинаторной конфигурации размещений.

Шаг 1. ***Определение дробно-линейной функции цели***. На начальном этапе определяются коэффициенты дробно-линейной целевой функции по формуле (1) соответственно для числителя и знаменателя.

Шаг 2. ***Задание конфигурации размещений***. Число конфигураций графа конфигурации размещений $A(n,m)$, $m \le n$, созданного из элементов $\{1, 2, ..., n\}$, рассчитывается по формуле $A_n^m = n!/(n-m)!$.

Шаг 3. ***Нормализация***. С учетом формулы (1) дробно-линейная функция нормализована, поэтому следует определить нормализацию по исходной перестановке u для каждого i-го ограничения функции g_2 [6]:

$$u_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & m \\ 2 & 1 & ... & \varphi_m \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Тогда начальное множество размещений заменяется на базовое по исходной перестановке u, получается индивидуальное множество размещений A_i и соответственно для каждой функции ограничения граф размещений $G(A(n,m))$ имеет стандартный вид.

Шаг 4. ***Решение задачи локализации*** [7]. Решая задачу локализации g_i, $i \in N_m$, получаем допустимое множество размещений для дополнительного линейного ограничения g_i. Путем обратной перестановки в (3) определяем то же множество в базовом множестве размещений $G(A(n,m))$.

Шаг 5. ***Поиск решений задачи.*** Находим сечение множеств размещений ограничивающих функций и определяем множество решений в базовом множестве. Подставив соответствующие вершины графа в дробно-линейную целевую функцию, находим требуемый экстремум функции.

Рассмотрим пример применения алгоритма.

Дана функция $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x) = x_1 = 3x_2 + 5x_3$, $g(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ на множестве размещений, сформированную из элементов $A = (1, 2, 3, 4)$. Заданы дополнительные ограничения, определяющие область допустимых значений целевой функции: $g_1 = 7x_1 + x_2 + 2x_3 \le$ ≤ 20, $g_2 = 4x_1 + x_2 + 7x_3 \ge 35$. Необходимо найти максимум целевой функции на множестве размещений A_4^3.

Решение. Задана нормализованная целевая функция $F(x)$. Поэтому граф G конфигурации размещений для такой функции имеет стандартный вид (рис. 1), число конфигураций $A_4^3 = 24$.

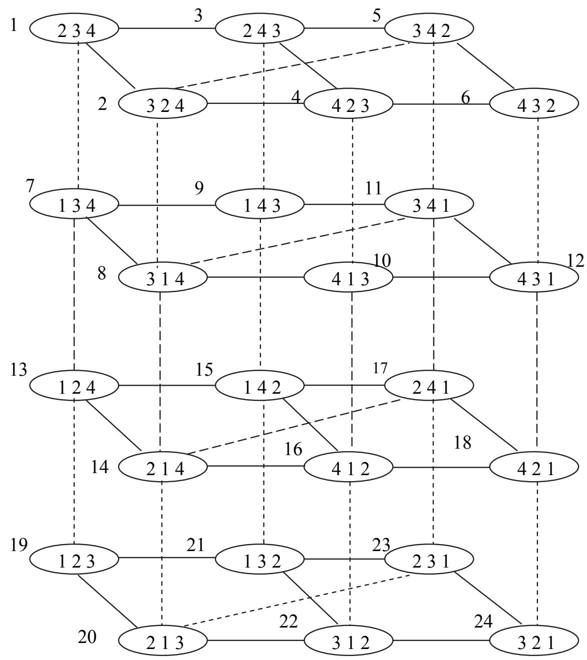

Рис. 1. Стандартный вид графа конфигурации размещений

Нормализуем g_1 путем перестановки $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ к виду $g_1' = x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 20$. Общая структурная схема графа G разбивается на структурные схемы подграфов G_1, G_2, G_3, G_4, в крайних вершинах которых определяют минимальное и максимальное значения функции g_1' на подграфах.

Решая задачу, необходимо учитывать, что элементы множества размещений должны удовлетворять условию $g_1' = x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 20$. Согласно рис. 2, подграф G_1 не удовлетворяет ограничениям, а множества вершин подграфов G_2, G_3, G_4 необходимо рассмотреть детально.

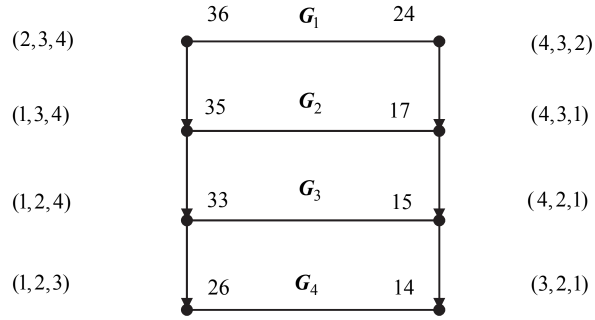

Рис. 2. Общая структурная схема графа для g_1'

Для вершин подграфа G_2 значения g_1' будут следующими:

Таблица 1

№ вершины	x_1	x_2	x_3	g_1'
7	1	3	4	35
8	3	1	4	33
9	1	4	3	30
10	4	1	3	27
11	3	4	1	18
12	4	3	1	17

Согласно табл. 1, условию $g_1' = x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 20$ будут удовлетворять вершины: 11, 12.

Построим аналогичные таблицы для вершин подграфов G_3, G_4.

Таблица 2

№ вершины	x_1	x_2	x_3	g_1'
13	1	2	4	33
14	2	1	4	32
15	1	4	2	23
16	4	1	2	20
17	2	4	1	17
18	4	2	1	15

Согласно табл. 2, ограничению $g_1' \le 20$ будут удовлетворять вершины: 16, 17, 18.

Вершины 22, 23, 24 подграфа G_4 удовлетворяют условию ограничения (табл. 3).

Таблица 3

№ вершины	x_1	x_2	x_3	g_1'
19	1	2	3	26
20	2	1	3	25
21	1	3	2	21
22	3	1	2	19
23	2	3	1	15
24	3	2	1	14

Итак, допустимое множество, определяемое ограничением $g_1' \le 20$, будут состоять из следующих вершин: $x^{11} = (3,4,1)$, $x^{12} = (4,3,1)$, $x^{16} = (4,1,2)$, $x^{17} = (2,4,1)$, $x^{18} = (4,2,1)$, $x^{22} = (3,1,2)$, $x^{23} = (2,3,1)$, $x^{24} = (3,2,1)$.

Пользуясь перестановкой нормализации $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, находим базовое множество A_1: (1,3,4), (1,4,3), (2,4,1), (1,2,4), (1,4,2), (2,3,1), (1,2,3), (1,3,2).

Рассмотрим ограничивающую функцию $g_2 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 25$, в которой коэффициенты размещены в порядке возрастания, поэтому потребности в нормализации не возникает. Общая структурная схема графа G разбивается на структурные схемы подграфов G_1, G_2, G_3, G_4, и будет иметь вид, изображенный на рис. 3

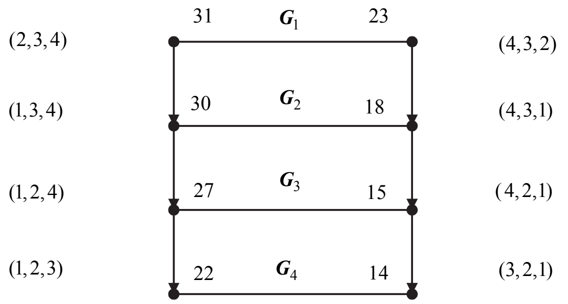

Рис. 3. Общая структурная схема графа для g_2

Для поиска множества допустимых решений, которые ограничиваются функцией $g_2 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 25$, рассмотрим подграфы G_1, G_2, G_3.

Рассмотрим вершины подграфа G_1:

Таблица 4

№ вершины	x_1	x_2	x_3	g_2
1	2	3	4	31
2	3	2	4	29
3	2	4	3	29
4	4	2	3	25
5	3	4	2	25
6	4	3	2	23

Согласно табл. 4, условию $g_2 \geq 25$ будут удовлетворять все вершины подграфа G_1, кроме шестой.

Рассмотрим вершины подграфа G_2:

Таблица 5

№ вершины	x_1	x_2	x_3	g_2
7	1	3	4	30
8	3	1	4	26
9	1	4	3	28
10	4	1	3	22
11	3	4	1	20
12	4	3	1	18

Согласно табл. 5, условию $g_2 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 25$ будут удовлетворять вершины 7, 8, 9.

Построим аналогичную таблицу для вершин подграфа G_3.

Таблица 6

№ вершины	x_1	x_2	x_3	g_2
13	1	2	4	27
14	2	1	4	25
15	1	4	2	23
16	4	1	2	17
17	2	4	1	19
18	4	2	1	15

Вершины 13, 14 подграфа G_4 удовлетворяют условию ограничения (табл. 6).

Допустимое множество A_2, определяемое ограничением $g_2 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 25$, будет состоять из следующих вершин: $x^1 = (2,3,4)$, $x^2 = (3,2,4)$, $x^3 = (2,4,3)$, $x^4 = (4,2,3)$, $x^5 = (3,4,2)$, $x^7 = (1,3,4)$, $x^8 = (3,1,4)$, $x = (1,4,3)$, $x^{13} = (1,2,4)$, $x^{14} = (2,1,4)$.

Итак, общее множество решений, определяемых сечением допустимого множества первого и второго ограничений, равно: $A^* = A(g_1') \bigcap A(g_2) = \{(1,2,4); (1,3,4); (1,4,3)\}$. Значение целевых дробно-линейных функций в данных точках равно: $\max F(x) = F(1,2,4) = F(1,3,4) = F(1,4,3) = 1,1$.

Заключение. Общая схема алгоритма направленного структурирования для комбинаторной конфигурации размещений заключается в использовании свойства представления многогранника размещений в виде структуры графа и дальнейшем поиске решений, которые могут быть вершинами или ребрами соответствующего графа.

Дальнейшие исследования будут направлены на создание новых подходов и алгоритмов при условии нелинейности целевой функции и программной реализации алгоритма для проведения численных экспериментов при увеличении мощности соответствующей комбинаторной конфигурации.

●