

В.А. Богаенко, О.А. Марченко, Т.А. Самойленко

Анализ численного моделирования динамики грунтового массива при неустановившейся напорной фильтрации

Представлен сравнительный анализ результатов расчетов, полученных при численной реализации трех математических моделей динамических процессов в водонасыщенном грунтовом массиве. Задачи решены на кластере СКИТ-4 Института кибернетики НАН Украины. Приведены данные быстродействия параллельных алгоритмов при решении задач.

The numerical results comparing analysis for three different mathematical models of dynamic processes in saturated solid environment are presented. Problems have been solved on Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine SKIT-4 cluster. The parallel algorithms performance data while solving considered problems are given.

Подано порівняльний аналіз результатів розрахунків, отриманих за чисельної реалізації трьох математичних моделей динамічних процесів у водонасиченому ґрунтовому масиві. Задачі розв'язано на кластері СКИТ-4 Інституту кібернетики НАН України. Наведено дані швидкодії паралельних алгоритмів при розв'язанні задач.

Введение. Прогноз функционирования грунтовых гидротехнических сооружений в значительной степени зависит от комплексного, системного подхода к учету в процессе математического моделирования различных факторов, влияющих на поведение этих объектов. В связи с этим построение, теоретическое обоснование и численная реализация наиболее адекватной модели – ложная и актуальная задача.

На примере профильной задачи для фильтрующего основания гравитационной плотины в статье представлены три начально-краевые задачи по определению динамических характеристик грунтового основания при условии изменения уровня воды в верхнем водоеме.

Для каждой из этих дифференциальных моделей на основании построения обобщенного решения Галеркина при использовании метода конечных элементов (МЭК) ранее [1–4] получены оценки точности непрерывного, по времени приближенного обобщенного решения как решения соответствующей задачи Коши и полностью дискретного приближенного обобщенного решения, рассчитываемого по схеме Кранка–Николсона; проведен сравнительный анализ результатов расчетов, полученных в процессе приближенного решения данных задач.

Сложность моделей и необходимость проведения долгосрочных прогнозов обуславливают потребность в использовании в данном случае высокопродуктивных вычислительных систем. Проведена модификация алгоритмов, описанных в [5, 6], для решения рассматриваемых задач на

кластерных системах, в том числе содержащих графические процессоры (*GPU*), и проведено сравнение их эффективности при применении к различным моделям.

Математические модели

Модель I представляет собой начально-краевую задачу для параболо-гиперболической системы, включающей в себя нестационарное уравнение фильтрации и уравнения теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние грунтового массива [1]:

$$\begin{cases} \bar{\mu} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{\phi}(x, y, t) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{\phi}(x, y, t) \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0, \\ \rho_{\text{гр.}} \frac{\partial^2 u_{\text{ск.}}}{\partial t^2} - \mu \Delta u_{\text{ск.}} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \rho_{\text{гр.}} \frac{\partial^2 v_{\text{ск.}}}{\partial t^2} - \mu \Delta v_{\text{ск.}} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} = \\ = -\rho_{\text{гр.}} g, \quad (x, y, t) \in \Omega_T, \quad \Omega_T = \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1)$$

где h – пьезометрический напор, $u_{\text{ск.}}$, $v_{\text{ск.}}$ – горизонтальное и вертикальное смещение скелета грунта, $P = \rho_{\text{в.}} g (h - y)$ – гидростатическое давление, $K_{\phi}(x, y, t)$ – коэффициент фильтрации, λ , μ – постоянные Ламе, $\bar{\mu}$ – влагоемкость, $\rho_{\text{гр.}}$ – плотность влагонасыщенного грунта, $\rho_{\text{в.}}$ – плотность воды, g – ускорение свободного падения.

Зададим краевые условия (рис. 1):

$$\begin{aligned} h(x, y, t) &= y_1 + \tilde{h}(t), \quad (x, y, t) \in AB \times (0, T], \\ h(x, y, t) &= y_2, \quad (x, y, t) \in CD \times (0, T], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (x, y, t) \in (GA \cup DE) \times (0, T], \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (x, y, t) &\in (GE \cup BK \cup KF \cup FC) \times (0, T], \\
 u_{\text{ск.}} &= 0, \quad (x, y, t) \in (GA \cup DE) \times (0, T], \\
 u_{\text{ск.}} = v_{\text{ск.}} &= 0, \quad (x, y, t) \in GE \times (0, T], \quad (3) \\
 \tau_{xy} &= 0, \quad (x, y, t) \in (GA \cup DE) \times (0, T], \\
 \sigma_n &= -\rho_{\text{бет.}} g (y_3 - y_0), \quad (x, y, t) \in BK \times (0, T], \\
 \sigma_n &= -\rho_{\text{бет.}} g (\tilde{y}(x) - y_0), \quad (x, y, t) \in KF \times (0, T], \\
 \sigma_n &= -\rho_{\text{бет.}} g (\tilde{y}(x) - y_0) - \rho_{\text{в.}} g (y_2 - \tilde{y}(x)), \\
 &\quad (x, y, t) \in FC \times (0, T],
 \end{aligned}$$

$\tau_s = 0$, $(x, y, t) \in (BK \cup KF \cup KC) \times (0, T]$,
 $\sigma_n = 0$, $\tau_s = 0$, $(x, y, t) \in (AB \cup CD) \times (0, T]$,
 где σ_n , τ_s – нормальная и касательная составляющие вектора напряжений, $\rho_{\text{бет.}}$ – плотность материала тела плотины, $\tilde{y}(x)$ – уравнение прямой, проходящей через точки M и C .

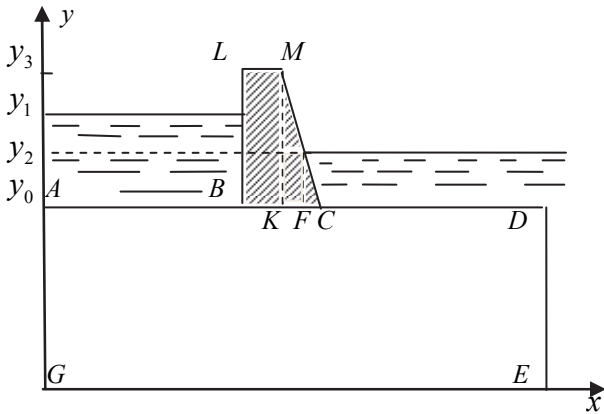


Рис. 1. Расчетная область

Физические параметры и параметры области следующие: $K_{\phi}(x, y, t) = \bar{K}_{\phi} e^{\varepsilon(\theta)/(0,18\varepsilon_0 - 0,048)}$, $\bar{K}_{\phi} = 0,3 \text{ м/сут}$, $\varepsilon(\theta) = \varepsilon_0 + \theta(1 - \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = 0,64$, $\varepsilon_t = 1,06$, $\gamma_{\text{ч.}} = W_t / \gamma_{\text{в.}}$, $\gamma_{\text{ч.}} = 2,54$ – объемный вес частиц грунта, $W_t = 0,282$ – полная влажность грунта, $\gamma_{\text{в.}}$ – удельный вес воды, $\theta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$ – объемная деформация, $\rho_{\text{гр.}} = 1,94 \text{ т/м}^3$, $\rho_{\text{бет.}} = 2,3 \text{ т/м}^3$, $\bar{\mu} = 10^{-3}$, $y_0 = 260 \text{ м}$, $y_1 = 377 \text{ м}$, $y_2 = 266 \text{ м}$, $y_3 = 420 \text{ м}$, $\tilde{h}(t) = t/86400 \text{ м/сек}$ (соответствует скорости подъема воды 10 м/сут), модуль упругости $E = 5000 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Начальные условия:

$$\begin{aligned}
 h(x, y, 0) &= h_0, \quad u_{\text{ск.}}(x, y, 0) = u_0, \quad v_{\text{ск.}}(x, y, 0) = v_0, \\
 \frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial t}(x, y, 0) &= \frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial t}(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}.
 \end{aligned}$$

На основании метода Галеркина и в предположении существования дополнительного условия $\frac{\partial h}{\partial t}(x, y, 0) = h_1$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$, сформулирована следующая обобщенная задача [1]:

$$\begin{aligned}
 m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, z \right) + \bar{m} \left(\frac{\partial w}{\partial t}, z \right) + a(w, z) &= (\tilde{F}, z), \\
 w \in Z, \quad \forall z \in Z_0, \quad \forall t \in (0, T], & \quad (4) \\
 (w(\cdot, \cdot, 0), z) &= (w^0, z),
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}(\cdot, \cdot, 0), z \right) = (w^1, z), \quad \forall z \in Z_0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
 m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, z \right) &= \rho_{\text{гр.}} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} z_2 + \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} z_3 \right) d\Omega, \\
 \bar{m} \left(\frac{\partial w}{\partial t}, z \right) &= \iint_{\Omega} \bar{\mu} \frac{\partial w_1}{\partial t} z_1 d\Omega, \\
 a(w, z) &= \mathbf{W}_1(w, z) + \mathbf{W}_2(w, z) + \mathbf{F}(w, z), \\
 \mathbf{W}_1(w, z) &= \\
 &= \iint_{\Omega} \left(K_{\phi}(x, y, t) \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial z_1}{\partial x} + K_{\phi}(x, y, t) \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial z_1}{\partial y} \right) d\Omega,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_2(w, z) &= \iint_{\Omega} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial z_2}{\partial x} + \frac{\partial w_3}{\partial y} \frac{\partial z_3}{\partial y} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda \left(\frac{\partial w_3}{\partial y} \frac{\partial z_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial z_3}{\partial y} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_2}{\partial y} + \frac{\partial z_3}{\partial x} \right) \right] d\Omega,
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(w, z) = \iint_{\Omega} \rho_{\text{в.}} g (w_1 - y) \left(\frac{\partial z_2}{\partial x} + \frac{\partial z_3}{\partial y} \right) d\Omega,$$

$$\begin{aligned}
 (\tilde{F}, z) &= -\iint_{\Omega} \rho_{\text{гр.}} g z_3 d\Omega - \int_{BK} \rho_{\text{бет.}} g (y_3 - y_0) z_3 d\Gamma - \\
 &\quad - \int_{KF} \rho_{\text{бет.}} g (\tilde{y}(x) - y_0) z_3 d\Gamma -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{FC} (\rho_{\text{бет.}} (\tilde{y}(x) - y_0) + \rho_{\text{б.}} (y_2 - \tilde{y}(x))) g z_3 d\Gamma + \\
& + \int_{AB} \rho_{\text{б.}} g (y_1 - y) z_3 d\Gamma + \int_{CD} \rho_{\text{б.}} g (y_2 - y) z_3 d\Gamma, \\
w^0 &= (h_0, u_0, v_0)^T, \quad w^1 = (h_1, 0, 0)^T, \quad (\cdot, \cdot) - \text{ска-} \\
& \text{лярное произведение векторов.}
\end{aligned}$$

Решение задачи (4), (5) ищем на множестве Z вектор-функций

$$\begin{aligned}
w(x, y, t) &= (h(x, y, t), u_{\text{ск.}}(x, y, t), v_{\text{ск.}}(x, y, t))^T = \\
&= (w_1(x, y, t), w_2(x, y, t), w_3(x, y, t))^T,
\end{aligned}$$

компоненты которых и их производные по

$$\text{времени} \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, t), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y, t), \quad \forall t \in (0, T],$$

$\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0)$ вместе с $w(x, y, 0)$ принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$. Множеству Z_0 принадлежат вектор-функции $z(x, y) = (z_1(x, y), z_2(x, y), z_3(x, y))^T$ с компонентами из пространства $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющими однородным главным краевым условиям (2), (3).

Приближенное обобщенное решение задачи (4), (5) $w^N(x, y, t) \in Z^N$ ищется посредством МКЭ на подмножестве $Z^N \subset Z$ и удовлетворяет следующим интегральным тождествам:

$$\begin{aligned}
m \left(\frac{\partial^2 w^N}{\partial t^2}, z^N \right) + \bar{m} \left(\frac{\partial w^N}{\partial t}, z^N \right) + a(w^N, z^N) &= \\
= (\tilde{F}, z^N) \quad \forall z^N \in Z_0^N, \quad \forall t \in (0, T], & \quad (6)
\end{aligned}$$

$$(w^N(\cdot, \cdot, 0), z^N) = (w^0, z^N),$$

$$\left(\frac{\partial w^N}{\partial t}(\cdot, \cdot, 0), z^N \right) = (w^1, z^N) \quad \forall z^N \in Z_0^N. \quad (7)$$

Для функций $w(x, y, t)$, $w^N(x, y, t)$, которые есть решениями задач (4), (5) и (6), (7) соответственно, выполняется оценка [1]:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (w(x, y, t) - w^N(x, y, t)) \right\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} +$$

$$+ \left\| w(x, y, t) - w^N(x, y, t) \right\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} \leq C s^k,$$

где $C = \text{const} > 0$, s – максимальная длина сторон треугольников, $k = 1, 2, 3$ – степень многочленов МКЭ.

Для получения приближенного дискретного по времени решения задачи (6), (7) $\{W^j(x, y)\}_{j=0}^J \subset Z_t^N$ используется схема Кранка–Николсона [1]; имеется оценка:

$$\max_{0 \leq j \leq J} \|W^j - w(x, y, j\tau)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C(s^k + \tau^2), \quad (9)$$

$$C = C(T) > 0.$$

Модель II – это модель динамической консолидации водонасыщенных грунтов [2, 3, 7], при построении которой рассмотрены три группы уравнений для квазидвухфазных грунтов:

- уравнений, описывающих закон изменения количества движения классической механики;

- группы уравнений, определяющих скорость движения жидкости в пористой среде на основании законов Навье–Стокса и Дарси–Герсеванова;

- уравнений, следующих из закона сохранения масс фаз грунта; система уравнений, сформулированная на основании принципа эффективных напряжений Терцаги и с учетом только упругих деформаций, имеет вид

$$\begin{aligned}
(1-m)\rho_{\text{ч.}} \frac{\partial^2 u_{\text{ск.}}}{\partial t^2} + \frac{\rho_{\text{б.}} g m^2}{\bar{K}_\phi} \left(\frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial t} - \frac{\partial u_{\text{б.}}}{\partial t} \right) - \\
- \left[\mu \Delta u_{\text{ск.}} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial y} \right) \right] - (1-m) \frac{\partial P_{\text{б.}}}{\partial x} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-m)\rho_{\text{ч.}} \frac{\partial^2 v_{\text{ск.}}}{\partial t^2} + \frac{\rho_{\text{б.}} g m^2}{\bar{K}_\phi} \left(\frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial t} - \frac{\partial v_{\text{б.}}}{\partial t} \right) - \\
- \left[\mu \Delta v_{\text{ск.}} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial y} \right) \right] -
\end{aligned}$$

$$-(1-m) \frac{\partial P_{\text{б.}}}{\partial y} = -(1-m)\rho_{\text{ч.}} g,$$

$$m \rho_{\text{б.}} \frac{\partial^2 u_{\text{б.}}}{\partial t^2} + \frac{\rho_{\text{б.}} g m^2}{\bar{K}_\phi} \left(-\frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial t} + \frac{\partial u_{\text{б.}}}{\partial t} \right) - m \frac{\partial P_{\text{б.}}}{\partial x} = 0,$$

$$m \rho_{\text{б.}} \frac{\partial^2 v_{\text{б.}}}{\partial t^2} + \frac{\rho_{\text{б.}} g m^2}{\bar{K}_\phi} \left(-\frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial t} + \frac{\partial v_{\text{б.}}}{\partial t} \right) - m \frac{\partial P_{\text{б.}}}{\partial y} = -m \rho_{\text{б.}} g,$$

$$\frac{\partial P_{\text{б.}}}{\partial t} = \frac{M_{\text{б.}}}{m} \left[(1-m) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_{\text{б.}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\text{б.}}}{\partial y} \right) \right], \quad (10)$$

$$(x, y, t) \in \Omega_T, \Omega_T = \Omega \times (0, T],$$

где $u_{\text{в.}}$, $v_{\text{в.}}$ – горизонтальная и вертикальная составляющие вектора смещений жидкости; $P_{\text{в.}}$ – поровое давление; $\rho_{\text{ч.}}$, $\rho_{\text{в.}}$ – плотность минеральных частиц и жидкости соответственно ($\rho_{\text{гр.}} = \rho_{\text{ч.}}(1-m) + \rho_{\text{в.}}m$), $\rho_{\text{ч.}} = 2,54 \text{ т/м}^3$; $m = 0,39$ – пористость; $\bar{K}_{\text{ф.}}$ – коэффициент фильтрации, заданный в предыдущей модели; $M^{\text{в.}} = 203 \cdot 10^3 \text{ тс/м}^2$ – модуль упругости жидкости.

Краевые условия имеют вид

$$u_{\text{ск.}} = 0, u_{\text{в.}} = 0, (x, y, t) \in (GA \cup DE) \times (0, T], \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = 0, \frac{\partial P_{\text{в.}}}{\partial x} = 0, (x, y, t) \in (GA \cup DE) \times (0, T],$$

$$\frac{\partial P_{\text{в.}}}{\partial y} = 0, (x, y, t) \in GE \times (0, T], \quad (12)$$

$$u_{\text{ск.}} = v_{\text{ск.}} = 0, v_{\text{в.}} = 0, w_{\text{в.},n} = 0,$$

$$(x, y, t) \in GE \times (0, T], \quad (13)$$

$$\sigma_n + P_{\text{в.}} = -P_{\text{в.}}^+ = -\rho_{\text{в.}} g (y_1 + \tilde{h}(t) - y_0),$$

$$(x, y, t) \in AB \times (0, T], \quad (14)$$

$$\sigma_n + P_{\text{в.}} = -P_{\text{в.}}^+ = -\rho_{\text{в.}} g (y_2 - y_0),$$

$$(x, y, t) \in CD \times (0, T], \quad (15)$$

$$\sigma_n = k m w_{\text{отн.},n}, \tau_s = 0, 0 \leq k \leq \infty,$$

$$(x, y, t) \in (AB \cup CD) \times (0, T], \quad (16)$$

$$\sigma_n + P_{\text{в.}} = -\rho_{\text{бет.}} g (y_3 - y_0), \tau_s = 0,$$

$$w_{\text{отн.},n} = 0, (x, y, t) \in BK \times (0, T], \quad (17)$$

$$\sigma_n + P_{\text{в.}} = -\rho_{\text{бет.}} g (\tilde{y}(x) - y_0), \tau_s = 0,$$

$$w_{\text{отн.},n} = 0, (x, y, t) \in KF \times (0, T], \quad (18)$$

$$\sigma_n + P_{\text{в.}} = -\rho_{\text{бет.}} g (\tilde{y}(x) - y_0) - \rho_{\text{в.}} g (y_2 - \tilde{y}(x)),$$

$$\tau_s = 0, w_{\text{отн.},n} = 0, (x, y, t) \in FC \times (0, T], \quad (19)$$

где $w_{\text{в.},n}$ – нормальная составляющая вектора смещений жидкости $w_{\text{в.}} = (u_{\text{в.}}, v_{\text{в.}})^T$, $w_{\text{отн.},n}$ – нормальная составляющая вектора относительного смещения воды $w_{\text{отн.}} = w_{\text{в.}} - w_{\text{ск.}}$.

Условие (16) записывается исходя из (15) и условия

$$P_{\text{в.},n}^+ - P_{\text{в.},n} = k m w_{\text{отн.},n},$$

$$0 \leq k \leq \infty, (x, y, t) \in (AB \cup CD) \times (0, T],$$

отражающего пропорциональность разности значений давления воды и порового давления на границе раздела двух сред степени открытости границы [8]. Случаю, когда поры полностью открыты, соответствует значение коэффициента $k = 0$. В отсутствие связи с пустотами грунтовой среды (например, при наличии непроницаемой мембраны) условиям (15), (16) при $k = +\infty$ соответствует условие $\sigma_n = -P_{\text{в.}}^+$.

Начальные условия:

$$u_{\text{ск.}}(x, y, 0) = u_{\text{в.}}(x, y, 0) = u_0,$$

$$v_{\text{ск.}}(x, y, 0) = v_{\text{в.}}(x, y, 0) = v_0,$$

$$\frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial t}(x, y, 0) = \frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial t}(x, y, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u_{\text{в.}}}{\partial t}(x, y, 0) = \frac{\partial v_{\text{в.}}}{\partial t}(x, y, 0) = 0,$$

$$P_{\text{в.}}(x, y, 0) =$$

$$= \frac{M^{\text{в.}}}{m} \left[(1-m) \left(\frac{\partial u_{\text{ск.}}(x, y, 0)}{\partial x} + \frac{\partial v_{\text{ск.}}(x, y, 0)}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + m \left(\frac{\partial u_{\text{в.}}(x, y, 0)}{\partial x} + \frac{\partial v_{\text{в.}}(x, y, 0)}{\partial y} \right) \right] -$$

$$-\rho_{\text{в.}} g (h_0 - y) = \frac{M^{\text{в.}}}{m} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \rho_{\text{в.}} g (h_0 - y),$$

$$(x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (20)$$

Обобщенным решением начально-краевой задачи (10)–(20) будет вектор-функция $w(x, y, t) \in Z$, удовлетворяющая интегральным соотношениям вида (4), (5), где квадратичные формы

$$m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, z \right), \bar{m} \left(\frac{\partial w}{\partial t}, z \right), a(w, z), \text{ а также } (\tilde{F}, z)$$

записываются аналогично [2, 3], Z – множество вектор-функций $w(x, y, t) = (u_{\text{ск.}}(x, y, t),$

$$v_{\text{ск.}}(x, y, t), u_{\text{в.}}(x, y, t), v_{\text{в.}}(x, y, t))^T = (w_{\text{ск.}}(x, y, t),$$

$$w_{\text{в.}}(x, y, t))^T = (w_1(x, y, t), w_2(x, y, t), w_3(x, y, t),$$

$$w_4(x, y, t))^T, \text{ удовлетворяющих главным краевым условиям (11), (13), и компоненты которых, а также их некоторые частные производные по времени принадлежат пространству } W_2^1(\Omega), \forall t \in (0, T]. \text{ Множеству } Z_0 \text{ принадлежат}$$

вектор-функции $z(x, y) = (z_1(x, y), z_2(x, y), z_3(x, y), z_4(x, y))^T$, удовлетворяющие однородным главным краевым условиям (11), (13), а их компоненты принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$.

Для непрерывного по времени и полностью дискретно приближенных обобщенных решений имеются оценки вида соответственно (8) и (9) [2, 3].

Согласно модели III, напряженно-деформируемое состояние основания плотины описывается системой уравнений теории упругости [4]:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{гр.}} \frac{\partial^2 u_{\text{ск.}}}{\partial t^2} - \mu \Delta u_{\text{ск.}} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial y} \right) &= 0, \\ \rho_{\text{гр.}} \frac{\partial^2 v_{\text{ск.}}}{\partial t^2} - \mu \Delta v_{\text{ск.}} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial y} \right) &= -\rho_{\text{гр.}} g, \\ (x, y, t) \in \Omega_T, \Omega_T &= \Omega \times (0, T]. \end{aligned}$$

Краевые и начальные условия заданы следующим образом:

$$u_{\text{ск.}} = 0, \tau_{xy} = 0, (x, y, t) \in (GA \cup DE) \times (0, T],$$

$$u_{\text{ск.}} = v_{\text{ск.}} = 0, (x, y, t) \in GE \times (0, T],$$

$$\sigma_n = -\rho_{\text{в.}} g (y_3 - y_0), (x, y, t) \in BK \times (0, T],$$

$$\sigma_n = -\rho_{\text{бет.}} g (\tilde{y}(x) - y_0), (x, y, t) \in KF \times (0, T],$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -\rho_{\text{бет.}} g (\tilde{y}(x) - y_0) - \rho_{\text{в.}} g (y_2 - \tilde{y}(x)), \\ (x, y, t) &\in FC \times (0, T], \end{aligned}$$

$$\tau_s = 0, (x, y, t) \in (BK \cup KF \cup KC) \times (0, T],$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -\rho_{\text{в.}} g (y_1 + \tilde{h}(t) - y_0), \tau_s = 0, \\ (x, y, t) &\in AB \times (0, T], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -\rho_{\text{в.}} g (y_2 - y_0), \tau_s = 0, \\ (x, y, t) &\in CD \times (0, T], \end{aligned}$$

$$u_{\text{ск.}}(x, y, 0) = u_0, v_{\text{ск.}}(x, y, 0) = v_0,$$

$$\frac{\partial u_{\text{ск.}}}{\partial t}(x, y, 0) = \frac{\partial v_{\text{ск.}}}{\partial t}(x, y, 0) = 0, (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

Для непрерывного по времени $w^N(x, y, t) = (u_{\text{ск.}}^N(x, y, t), v_{\text{ск.}}^N(x, y, t))^T$ и полностью дискретного $\{W^j(x, y)\}_{j=0}^J$ приближенных обобщенных решений, построенных аналогично предыдущим задачам способом, получены оценки:

$$\|w^N - w\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))} \leq C s^k,$$

$$\max_{0 \leq j \leq J} \|W^j - w^j\|_{L_2(\Omega)} \leq C(s^k + \tau^2).$$

Предполагается, что функции, представленные в постановках задач, обладают достаточной гладкостью [1–4].

Начальные условия для решения всех трех начально-краевых задач взяты из решения стационарных задач: для определения начального напряженно-деформированного состояния решена стационарная задача, соответствующая модели III; для определения начальных напоров решена стационарная задача фильтрации, соответствующая модели I.

Анализ результатов расчетов

Деформация прямоугольной сетки расчетной области по результатам счета на момент времени $t = 100$ ч представлена на рис. 2, а для модели I; на рис. 2, б – для модели II при $k = 0$ в краевом условии (16), на рис. 2, в – для модели III.

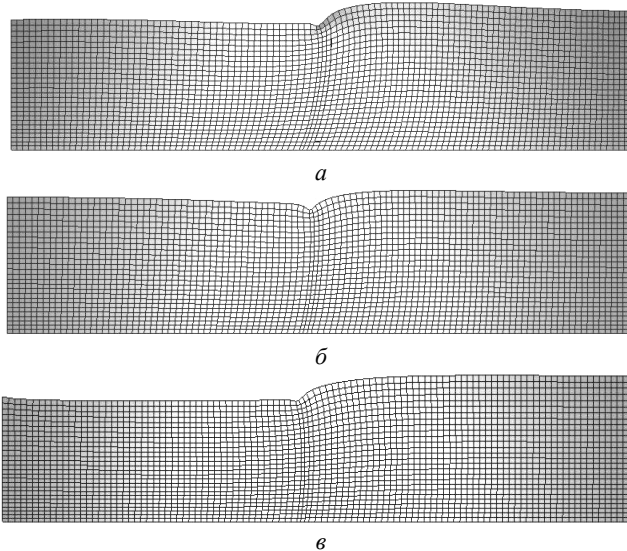


Рис. 2. Деформация прямоугольной сетки расчетной области, $t = 100$ ч

Полученные числа показывают, что модель I дает максимальные по трем моделям абсолютные значения для изолиний по горизонтальным смещениям и минимальные – по вертикальным ($u_{\text{ск.}, \text{max}} = 6,16$ м, $v_{\text{ск.}, \text{max}} = -10,67$ м, $t = 100$ ч); модель III: максимальные – по вертикальным и минимальные по горизонтальным ($u_{\text{ск.}, \text{max}} = 1,32$ м, $v_{\text{ск.}, \text{max}} = -13,33$ м, $t = 100$ ч). Модель II при значении $k = 0$ в условии (16) дает средние абсо-

плотные значения для изолиний как по горизонтальным, так и по вертикальным смещениям: $u_{ск, \max} = 3,36 \text{ м}$, $v_{ск, \max} = -10,77 \text{ м}$, $t = 100 \text{ ч}$.

Сравнительный анализ графиков изолиний напоров для модели I (рис. 3,а) и модели II при $k = 0$ (рис. 3,б) для одного и того же момента времени $t = 100 \text{ ч}$ показал, что они практически совпадают. Уменьшение проницаемости дна верхнего водоема, в нашей постановке – увеличение значений коэффициента k в (16) ((рис. 3,б) соответствует $k = 0$, (рис. 3,в) – $k = 100$, (рис. 3,г) – $k = 1000$) приводит к уменьшению значений напоров на участке AB границы расчетной области и в части области под верхним водоемом; такие же изменения коэффициента k в краевом условии (16) для нижнего водоема приводит к увеличению напора на границе CD и в части области под нижним водоемом.

Учет проницаемости дна водоемов через коэффициент k в краевых условиях (16) модели II имеет значительное влияние на полученные результаты смещений как скелета $w_{ск}$, так и воды $w_{в}$ в грунте. Уменьшение проницаемости приводит к уменьшению абсолютных значений компонент векторов $w_{ск}$ и $w_{в}$ (на рис. 4 и 5 представлены изолинии соответственно горизонтальных смещений $u_{ск}$ и $u_{в}$ для момента времени $t = 100 \text{ ч}$: на обоих рисунках вариант а соответствует $k = 0$, б – $k = 100$, в – $k = 1000$), а также абсолютных значений компонент вектора $w_{отн}$.

Решение задач относительно моделей I и II распараллелено на кластерных системах как процесс поиска значений коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), так и решение СЛАУ. Поиск коэффициентов СЛАУ при этом не требует обменов, и его эффективность зависит только от равномерности загрузки процессоров. При решении разреженной СЛАУ итерационными методами количество обменов и размер передаваемых данных зависит от распределения матрицы СЛАУ по системе. В связи с этим, а также с

тем, что при решении рассматриваемой задачи методом конечных элементов, результирующая СЛАУ заполнена существенно неоднородно, возникает оптимизационная задача выбора оптимального по критерию быстродействия распределения данных.

Параллельный алгоритм учитывает эти особенности так:

- для решения СЛАУ применяется параллельный алгоритм *BiCGStab* [9] с блочно-строчным распределением матрицы, хранимой в сжато-строчном формате, который для случая модели II модифицируется с учётом представления матрицы СЛАУ в виде произведения базовой матрицы и матрицы, ответственной за учёт краевых условий (17) – (19);

- для минимизации обменов данными используется перенумерование строк и столбцов матрицы по алгоритму Катхила–МакКи, а для оптимизации суммарной вычислительной эффективности используется эвристический алгоритм, базирующийся на теоретических оценках времени работы алгоритмов [5, 6].

Вычисления, проводимые каждым процессом, могут быть дополнительно распараллелены с использованием графического процессора (*GPU*). Особенности вычислений на *GPU* учтены так:

- матрица СЛАУ для вычислений на *GPU* конвертируется в блочный сжато-строчный формат, использование которого улучшает характеристики алгоритмов в случае большого коэффициента заполненности [10];

- при вычислении коэффициентов СЛАУ, каждый блок потоков обрабатывает один конечный элемент, а каждый поток – одну из вершин этого элемента; граф связности элементов раскрашивается; вычисления проводятся последовательно по каждому цвету, что позволяет использовать быструю локальную память для доступа к данным, общим для каждого конечного элемента.

Рассматриваемые задачи решены на кластере СКИТ–4 Института кибернетики НАНУ. Для вычислений на *GPU* использована технология *OpenCL*, а в качестве библиотеки обмена сообщениями – *OpenMPI*.

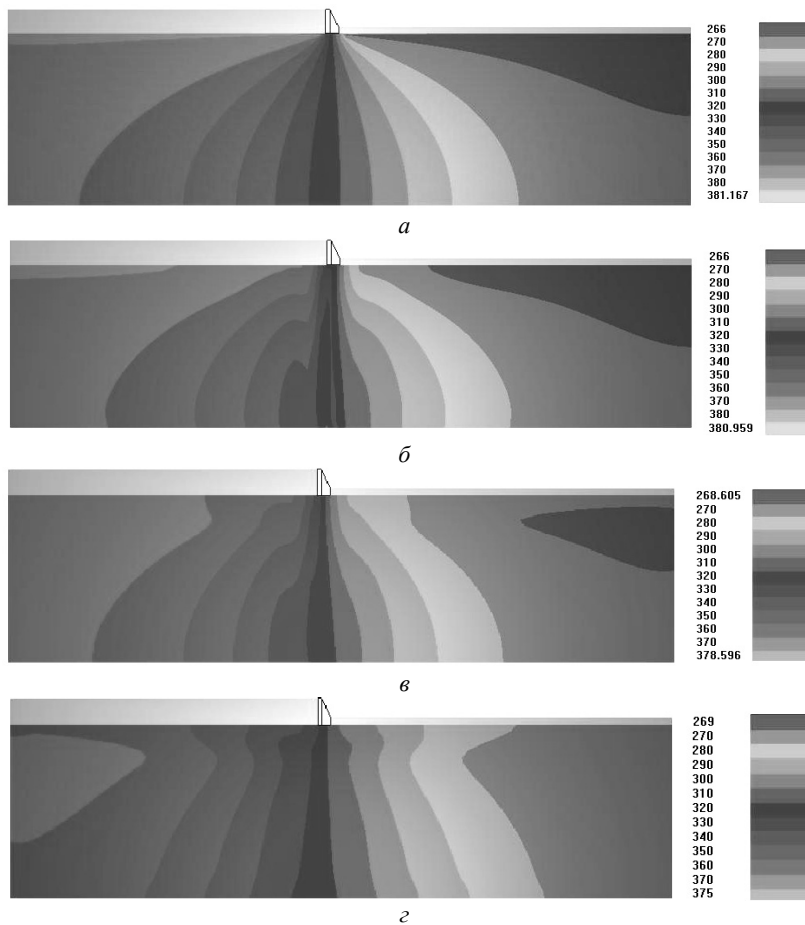


Рис. 3. Изолинии напоров, $t = 100$ ч

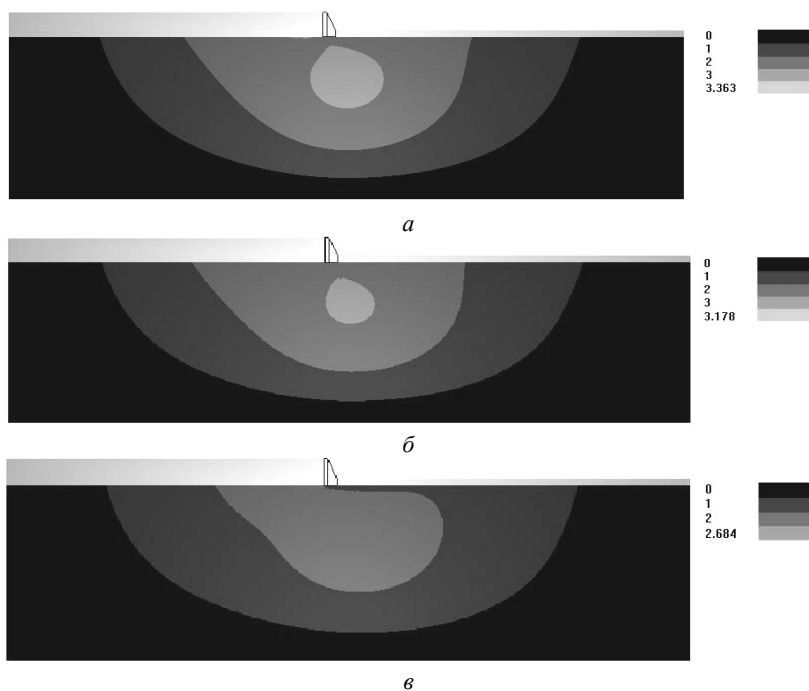


Рис. 4. Изолинии горизонтальных смещений скелета $u_{ск}$.

Размер матрицы СЛАУ в случае модели I составил 78624×78624 с количеством ненулевых элементов, равным 2240500, а для модели II – 96768×96768 при количестве ненулевых элементов, равным 2421944.

Для тестирования быстродействия параллельных алгоритмов решение выполнено при трех вариантах организации вычислений: в однопоточном режиме (в рамках каждого процесса функционирует лишь один поток), в многопоточном режиме и в режиме с использованием GPU. Ускорение алгоритмов представлено на рис. 6. В абсолютных величинах время решения последовательным алгоритмом задачи относительно модели I на одном шаге по времени составило 98,6 с, а задачи относительно модели II – 149,8 с. Отметим также, что время, необходимое на заполнение матрицы СЛАУ, существенно меньше, чем время решения СЛАУ – 1,7 процента от общего времени решения для модели I и 0,5 процента – для модели II.

Заключение. Анализ результатов свидетельствует о том, что модель II динамической консолидации водонасыщенного грунта, в которой принцип эффективных напряжений Терцаги учтен не только при выводе дифференциальных уравнений, но и в краевых условиях, когда давление столба воды в водоеме перераспределяется на напряжение в скелете и поровое давление, что позволяет учитывать проницаемость дна водоемов, позволяет получить наиболее реальную картину динамических процессов в водонасыщенной грунтовой среде. При этом отсутствие учета фильтрационных процессов в исследовании напряженно-деформированного состояния (модель III) такой среды ведет к существенному искажению ре-

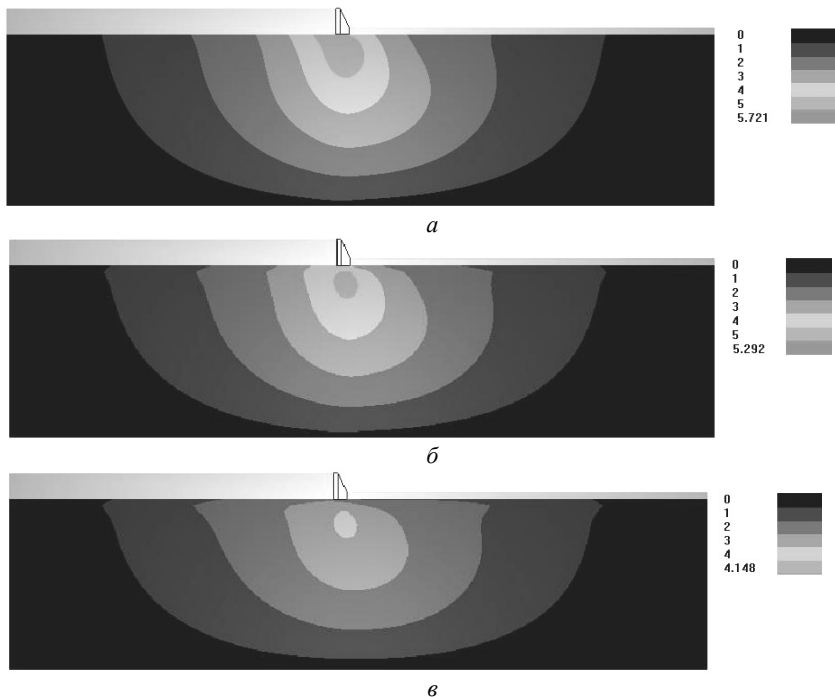


Рис. 5. Изолинии горизонтальных смещений воды u_v .
 результатов в сравнении с двумя первыми моделями, в которых эти процессы учтены.

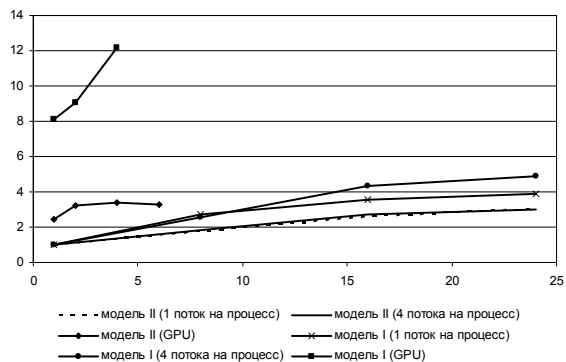


Рис. 6. Ускорение алгоритмов

Наиболее математически сложная модель II ожидаемо и наиболее алгоритмически сложна, в результате чего расчет по этой модели медленней, чем по остальным. С другой стороны, применение параллельных алгоритмов, особенно использующих GPU, более эффективно для задач относительно модели I, что можно объяснить большим коэффициентом заполненности матрицы СЛАУ в этом случае.

В целом, полученные результаты относительно быстродействия параллельных алгоритмов показывают, что использование многопоточной схемы вычислений не приносит существенного ускорения работы для рассматриваемых задач, тогда как использование GPU позитивно влияет на быстродействие. Следует отметить также небольшую масштабируемость параллельных алгоритмов, что есть след-

ствием большого коэффициента заполненности матрицы СЛАУ.

1. Марченко О.А., Самойленко Т.А. Исследование приближенного решения квазилинейной парабологиперболической задачи // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 5. – С. 142–154.
2. Скопецкий В.В., Марченко О.А., Самойленко Т.А. Построение дискретного приближенного решения нелинейной системы динамики двухфазных сред // Там же. – 2009. – № 4. – С. 69–80.
3. Скопецкий В.В., Марченко О.А. Постановка и исследование задач для динамических систем неоднородных двухфазных сред // Там же. – 2005. – № 6. – С. 87–102.
4. Скопецкий В.В., Дейнека В.С., Марченко О.А. Моделирование динамического равновесия объектов, ослабленных тонкими малопрочными включениями // Там же. – 1995. – № 2. – С. 124–130.
5. Богаенко В.О. Паралельні алгоритми моделювання процесу фільтраційної консолідації під дією двокомпонентного розчину // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: Зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільськ. нац. ун-т, 2011. – 5. – С. 28–36.
6. Богаенко В.А. Методика численного моделирования процесса электрокинетической очистки грунтов в неизотермических условиях // УСиМ. – 2013. – № 1. – С. 5–15.
7. Зарецкий Ю.К., Ломбардо В.Н. Статика и динамика грунтовых плотин. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 256 с.
8. Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А. Коллебания и волны в слоистых средах. – Киев: Наук. думка, 1990. – 224 с.
9. Yousef Saad. Iterative methods for sparse linear systems. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. – 528 p.
10. Abhijeet Gaikwad, Ioane Muni Toke. GPU based Sparse Grid Technique for Solving Multidimensional Options Pricing PDEs // Supercomputing'09, Proc. of the 2nd Workshop on High-Performance Computational Finance – SC09-WHPCF09, ACM Press, 2009, Article № 6.

Поступила 09.07.2014
 Тел. для справок: +38 044 526-4167, 526-5556, 067 425-6472,
 235-4231, 050 702-6401 (Киев)

E-mail: sevab@ukr.net, march62@rambler.ru

© В.А. Богаенко, О.А. Марченко, Т.А. Самойленко, 2014