УДК 62-52/ 519.8

Ю.А. Зак

Построение оптимальных расписаний программных движений промышленных роботов

Предложены алгоритмы построения матрицы потерь времени при переходе и переориентации рабочих органов робота с одной рабочей позиции в другую. Исследованы свойства сформулированной задачи расписаний. Приведены алгоритмы получения точных и приближенных ее решений методом ветвей и границ.

The constructing matrix algorithms of losing the time while transition and reorientation of the operation organ from one operational position to another are proposed. The characteristics of the stated schedule tasks are studied. The algorithms of the receiving the accurate and approximate solutions by the branch and bound method are presented.

Запропоновано алгоритми побудови матриці втрат часу при переході та переорієнтації робочих органів з однієї робочої позиції у другу. Досліджено властивості сформульованої задачі розкладів. Подано алгоритми отримання точних і наближених її розв'язань методом гілок і границь.

Введение. Промышленный робот должен выполнить некоторое множество технологических операций $i = 1,...,N$. Каждая технологическая операция (контактно-точечная сварка, электрическая и лазерная сварка швов, резка металла, сверление отверстий, обработка рабочих поверхностей, установка, пайка и крепление различных элементов и деталей) связана с изменениями положений рабочих органов промышленного робота, ориентирована в трехмерном пространстве $3D$ и имеет определенную продолжительность $\tau(i)$. Многие из таких операций могут начинаться в некоторой точке трехмерного пространства i_A, заканчиваться в точке i_C и требуют для их выполнения определенного положения и ориентации всех звеньев робота, которые задаются значениями их координат и углов поворота.

Длительность выполнения каждой операции, в самом общем случае, может быть различной в зависимости от выбора точки начала и конца ее выполнения, т.е $\tau(i_A) \neq \tau(i_C)$. Движение робота при выполнении каждой рабочей операции характеризуется изменением положений всех его рабочих звеньев и установкой их в новые и отличные от положений в их начальной точке значения. Переход робота в начальную точку для выполнения следующей в расписании работ рабочей операции связан с некоторым непроизводительным перемещением рабочего органа и переориентаций всех звеньев промышленного робота, которые связаны с определенными потерями рабочего времени. Причем такие потери для различных переходов и различных пар следующих друг за другом операций могут существенно отличаться друг от друга.

Для сложных технологических циклов, включающих более 10 операций, эти непроизводительные временные потери могут быть весьма значительными и существенно влиять на суммарное время выполнения производственного цикла. Выбор оптимальной последовательности выполнения технологических операций, положения начала и завершения каждой из них, а также требуемых установок всех рабочих звеньев робота для возможности выполнения этой операции (которые в результате решения обратной задачи робототехники могут определяться неоднозначно) позволит существенно сократить время таких потерь и повысить эффективность работы роботизированных комплексов. Это чрезвычайно важно для массового и серийного производства.

Ключевые слова: промышленный робот, оптимальное расписание движений, метод ветвей и границ.

Публикации в литературе по вопросам построения расписаний робототехнических систем касались, в основном, согласований работы различных приводов робота, построения последовательностей работы транспортных роботов, а также координации работы нескольких роботов в одной роботизированной ячейке [1, 2]. В качестве методов решения задачи использовались методы имитационного моделирования, модифицированный аппарат сетей Петри. Предлагаемая в статье постановка и метод решения задачи не встречались автору в монографиях и периодической литературе.

Постановка задачи

Рассматриваемая проблема включает решение нескольких взаимосвязанных и следующих в строгой последовательности друг за другом задач.

• Для каждой возможной точки начала и окончания выполнения всех технологических операций определить положение и углы наклона рабочего органа промышленного робота в шестимерной системе координат ($x(i_A)$, $y(i_A)$, $z(i_A)$, $\alpha(i_A)$, $\beta(i_A)$, $\gamma(i_A)$).

• Для каждого из этих положений рабочего органа в результате решения обратной задачи робототехники [3, 4] определить необходимые положения всех звеньев промышленного робота, которые обеспечили бы заданную установку рабочего органа. Отметим, что для каждой из таких установок может быть получено не одно, а несколько положений звеньев.

• Определить возможные и технологически допустимые варианты переходов от точки завершения предыдущей к началу следующей операции в процессе выполнения программы производственного цикла.

• Для каждой пары точек возможного перехода от выполнения одной операции к другой и каждой пары возможных установок всех рабочих звеньев промышленного робота в этих точках вычислить времена требуемых переходов и переориентации звеньев промышленного робота – $t(i_C^l, j_A^r)$, т.е. время перехода из положения C, в котором завершено выполнение операции i при l-м положении всех рабочих звеньев робота, в положение A возможного начала выполнения операции j при требуемом r-м положении всех рабочих звеньев робота.

• Рассчитанные времена $t(i_C^l, j_A^r)$ образуют матрицу T временных потерь на непроизводительные переналадки и переходы промышленного робота при выполнении технологического цикла. Группы строк и столбцов этой матрицы, определяющие некоторую ориентированную пару технологических операций (i, j), характерны тем, что в выбранной последовательности выполнения технологических операций может быть выбран только один элемент из нее, определяющий конкретный переход, начало и конец выполнения операции и положения при этом всех рабочих звеньев робота.

• Формулировка и решение задачи теории расписаний, которая сводится к поиску оптимального и допустимого пути в некотором графе, каждое звено которого может быть выбрано из некоторого альтернативного подмножества, и длина его задана в качестве элемента матрицы T.

Алгоритмы решения обратной задачи робототехники с целью определения всех необходимых установок звеньев промышленного робота для обеспечения требуемого положения и ориентации рабочего органа, широко используются в расчетах и доведены [3, 4] до пакетов прикладных программ. Алгоритмы расчета времен перехода от одной ориентации звена промышленного робота к другой описаны в монографии [3] и используются в статье для расчета элементов матрицы $T = \left\| t(i_C^l, j_A^r) \right\|$.

Комплексная постановка и математическая формулировка задачи построения оптимальных расписаний работы промышленных роботов, исследование ее математических свойств и разработка методов решения таких задач не проводились ранее.

Рассматриваемая задача теории расписаний относится к классу задач теории расписаний экспоненциальной сложности и формулируется в виде обобщенной задачи коммивояжера. Автором исследуются свойства сформулированной задачи, предлагаются выражения для оценки минимальной длины оптимального расписания и отсева множества вариантов, не имеющего допустимых решений, предлагаются алгоритмы получения точных и приближенных решений на основе методов *ветвей и границ*.

Математическая модель задачи

Промышленный робот (ПР) должен начать выполнение программы каждого технологического цикла в некотором начальном положении рабочего органа O с координатами (x_0, y_0, z_0) и положением углов наклона $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Программой работ предусматривается выполнение n технологических операций, которые могут быть выполнены в произвольной последовательности. Каждая из этих операций в общем случае может начинаться и заканчиваться в одной из двух точек (i_A или i_B) и требует определенных установок координат и углов рабочих органов как в начальной точке выполнения операции $x(i_A)$, $y(i_A)$, $z(i_A)$, $\alpha(i_A)$, $\beta(i_A)$, $\gamma(i_A)$), так и в конечной ($x(i_B)$, $y(i_B)$, $z(i_B)$, $\alpha(i_B)$, $\beta(i_B)$, $\gamma(i_B)$). В зависимости от выбора начальной и конечной точки выполнения операции и связанных с этим установок всех звеньев ПР время выполнения технологической операции $\tau_v(i)$ может быть различным. В ряде случаев (например, в процессах контактно-точечной сварки, обработка отверстий и других) начало и конец выполнения рабочей операции определяется только одной точкой в трехмерном пространстве. В дальнейшем рассматриваются ситуации, когда нет никаких ограничений на последовательности выполнения технологических операций и каждая из них может иметь начало и завершение не более чем в двух точках.

Необходимо найти оптимальную последовательность выполнения всех технологических операций, точку начала и завершения выполнения каждой из них, а также установки всех звеньев в каждой из характерных точек, обеспечивающих минимальное время технологического цикла. Решение задачи предусматривает определение последовательности прохождения ПР всех характерных точек производственного цикла, определение в них необходимых установок рабочего органа и всех положений звеньев, а также временных затрат на выполнение операций и переналадки.

Математическая модель для построения оптимального расписания суть матрица суммарных затрат времени на выполнение каждой технологической операции при различных условиях ее выполнения и точек завершения стоящей в последовательности перед ней операции. Алгоритмы расчета элементов этой матрицы рассматриваются в следующем разделе статьи. В этой матрице, обозначенной A, предусмотрены также временные потери для перевода ПР из начального положения в начальную точку выполнения последовательности операций и возвращения его после завершения цикла в исходное положение. В общем случае эта матрица имеет размерность $(2l_1N+1)*(2l_2N+1)$ элементов, где N – количество операций, l_1 и l_2 – соответственно количество вариантов положений всех рабочих звеньев ПР, обеспечивающих требуемое положение рабочего органа в каждой из точек начала и завершения технологической операции.

Обозначим подмножество строк и столбцов, определяющих времена выполнения i-й операции с учетом непроизводительных потерь на переходы и переналадки, соответственно $\overline{T}(i)$ и $\hat{T}(i)$, подмножество строк и столбцов, определяющих суммарное время выполнения первой операции и время перевода ПР из начального состояния в первую точку последовательности, а также время перехода ПР из последней точки пути в начальное состояние соответственно $\overline{O}(i)$ и $\hat{O}(i)$.

Определение времен перехода и параметров рабочих звеньев ПР при переориентации рабочего органа из одной точки в другую

Времена перехода ПР при переориентации рабочего органа из одной позиции в другую могут быть определены на основе аналитических методов [3, 4] экспериментальных исследований или по результатам имитационного моделирования.

Рассмотрим подходы к решению этой задачи аналитическими методами.

Обозначим $G(t) = \{g_1(t),...,g_k(t),...,g_m(t)\}$, $\overline{G}(t) = \{\overline{g}_1(t),...,\overline{g}_k(t),...,\overline{g}_m(t)\}$, $\overline{\overline{G}}(t) = \{\overline{\overline{g}}_1(t),..., \overline{\overline{g}}_k(t),...,\overline{\overline{g}}_m(t)\}$ соответственно векторы значений состояний положения звеньев робота, их скоростей и ускорений в момент времени t.

Пусть $G(t_0) = \{g_1^0,...,g_k^0,...,g_m^0\}$ и $G(t_1) = \{g_1^1,... ..,g_k^1,...,g_m^1\}$ – значения компонент этих векторов в начальной и конечной точке траектории.

Траектория движения каждого звена должна удовлетворять граничным условиям. Скорости и ускорения каждого звена в начальной и конечной точке траектории должны быть равны нулю

$$\overline{g}_k(t_0) = \overline{g}_k(t_1) = 0,$$
$$\overline{\overline{g}}_k(t_0) = \overline{\overline{g}}_k(t_1) = 0,\ k = 1,..,m. \qquad (1)$$

Траектория движения каждого звена может быть представлена в виде полинома шестой степени вида [3]

$$g_k(t) = a_{k0} + a_{k1}t + a_{k2}t^2 + a_{k3}t^3 + a_{k4}t^4 + a_{k5}t^5. \quad (2)$$

Пусть $t_0 = 0$, $t_1 = T$. В выражении (2) a_{k0}, $a_{k1},...,a_{k5}$ – неизвестные коэффициенты, которые должны быть определены из граничных условий при заданных временах перехода. При этом каждой точке траектории соответствует свое определенное время.

В дальнейшем для простоты изложения индекс k опустим.

Система линейных алгебраических уравнений для определения значений коэффициентов полинома (2) имеет вид:

$$\begin{cases} a_0 = g_0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2T + 3a_3T^2 + 4a_4T^3 + 5a_5T^4 = 0, \\ 2a_2 + 6a_3T + 12a_4T^2 + 20a_5T^3 = 0, \\ a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + a_4T^4 + a_5T^5 = g_1. \end{cases} \qquad (3)$$

Эта система линейных алгебраических уравнений относительно шести неизвестных параметров $a_0 - a_5$ может быть преобразована в систему трех линейных уравнений относительно трех неизвестных

$$\begin{cases} 3T^2a_3 + 4T^3a_4 + 5T^4a_5 = 0, \\ 3Ta_3 + 6T^2a_4 + 10T^3a_5 = 0, \\ T^3a_3 + T^4a_4 + T^5a_5 = g_1 - g_0. \end{cases} \qquad (4)$$

Система уравнений (4) имеет аналитическое решение в виде

$$a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 3,4,5. \qquad (5)$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 \\ 3T & 6T^2 & 10T^3 \\ T^3 & T^4 & T^5 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 4T^3 & 5T^4 \\ 0 & 6T^2 & 10T^3 \\ g_1 - g_0 & T^4 & T^5 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3T^2 & 0 & 5T^4 \\ 3T & 0 & 10T^3 \\ T^3 & g_1 - g_2 & T^5 \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3T^2 & 4T^3 & 0 \\ 3T & 6T^2 & 0 \\ T^3 & T^4 & g_1 - g_0 \end{vmatrix}.$$

Вначале эта задача должна быть решена для критического звена ПР, которое и определяет время перехода ПР из одной точки траектории в другую. Варьируя в ходе итеративного процесса значение времени T будут определены значения неизвестных коэффициентов a_3, a_4, a_5 по формулам (5), (6). Если скорости или ускорения звеньев превышают соответствующие граничные значения в отдельных точках траектории, то значение T уменьшается. Если существует некоторый запас (резерв) и возможности увеличения скорости и ускорения в движении звена, то значение T увеличивается. Такой итеративный процесс ведется до тех пор, пока не будет определено минимальное время перехода для каждого звена ПР. Пусть $\overline{T}$ – время перехода из начальной в конечную точку траектории для критического звена ПР, $\overline{T} = \max\limits_{1 \le k \le m} T_k$.

Положив для каждого из остальных звеньев время перехода равным $\overline{T}$ по формулам (5), (6) вычислим неизвестные коэффициенты a_3, a_4, a_5 для всех звеньев робота.

Отметим, что если системой управления ПР предусмотрена возможность только последовательной работы приводов отдельных звеньев, то $\overline{T} = \sum_{k=1}^{m} T_k$.

Построение и свойства матрицы временных затрат на выполнение технологических операций и переходов ПР с одной рабочей позиции на другую

Обозначим матрицу временных затрат на выполнение технологических операций и переходов ПР с одной рабочей позиции на другую B . Она содержит элементы нулевой строки $b(0, j_\mu^p)$ и нулевого столбца $b(i_\alpha^r, 0)$, а также элементы $b(i_\alpha^r, j_\mu^p)$ в каждом из $\sum_{i=1}^{N}(l_{1i}+l_{2i})$ строк и столбцов, соответствующих возможным положениям начала и завершения выполнения всех технологических операций производственного цикла. Следовательно, количество строк и столбцов этой матрицы равно $G = \sum_{i=1}^{N}(l_{1i}+l_{2i}) + 1$.

Значение элемента $b(0, j_\mu^p)$ соответствует времени перехода ПР из начального состояния в соответствующую μ-ю начальную точку выполнения j-й при p-м положении звеньев ПР. Значение элемента $b(i_\alpha^r, 0)$ – времени перехода из α-й конечной точки выполнения i-й операции при r-м положении всех звеньев ПР в начальное состояние. Элементы $b(i_\alpha^r, j_\mu^p)$ – суть времена перехода ПР из α-й конечной точки выполнения i-й операции при r-м положении всех звеньев ПР в μ-ю начальную точку выполнения j-й при p-м положении звеньев ПР плюс минимальное время выполнения j-й технологической операции при фиксированном положении всех рабочих органов в начальной точке. Все диагональные элементы матрицы, а также элементы $b(i_\alpha^r, j_\mu^p)$, $\alpha = 1, 2$, $\mu = 1, 2$, r, $p = 1,\ldots,R$ для выбора в качестве путей перехода от выполнения одной операции к другой запрещены и поэтому положены равными ∞ .

Каждое допустимое решение представляет собой некоторое подмножество элементов матрицы $B = \Omega(B)$, удовлетворяющее следующей системе ограничений.

- Подмножество $\Omega(B)$ должно содержать только один элемент из нулевой строки и один элемент из нулевого столбца матрицы B .
- Из каждого подмножества строк $\Omega_i = \{i_\alpha^r\}$, $\alpha = 1, 2$, $r = 1,\ldots,R$, как и из каждого подмножества столбцов $\Omega^j = \left\{i_\mu^p\right\}$ $\mu = 1, 2$, $p = 1,\ldots,R$, должен быть выбран только один какой-либо элемент.
- Если в подмножество $\Omega(B)$ включен некоторый элемент строки $b(i_\alpha^r, j_2^p)$, то включение в $\Omega(B)$ любого элемента из подмножества строк $\Omega_j(\alpha = 2, \lambda \neq r) = \{j_2^\lambda\}$ и $\Omega_j(\alpha = 1, r) = \{j_1^r\}$ – недопустимо.
- Если в подмножество $\Omega(B)$ включен некоторый элемент столбца $b(i_1^r, j_\mu^p)$, то включение в $\Omega(B)$ любого элемента из подмножества столбцов $\Omega^i(\mu = 2, p) = \{i_2^p\}$ и $\Omega^i(\mu = 1, \pi \neq p) = \{i_1^\pi\}$ является недопустимым.
- Если в подмножество $\Omega(B)$в ключен некоторый элемент строки $b(i_\alpha^r, j_\mu^p)$, то наличие в подмножестве $\Omega(B)$ в j_μ^p-й строке элементов i_α^r-х столбцов $\alpha = 1, 2$, $r = 1,\ldots,R$, соответствующих i-й операции, есть недопустимым.
- Если в подмножество $\Omega(B)$ включен некоторый элемент столбца $b(i_1^r, j_\mu^p)$, то наличие в подмножестве $\Omega(B)$ в i_α^s-столбце элементов j_μ^p-столбцов $b(j_\mu^p, i_\alpha^r)$, $\mu = 1, 2$, $p = 1,\ldots,R$, соответствующих j-й операции, – недопустимо.
- Элементы подмножества $\Omega(B)$ должны составлять замкнутый маршрут, начинающийся и заканчивающийся в начальной точке $i = 0$.

Длина этого маршрута определяется выражением

$$F(B) = b[(0, j_\mu^p) \mid (0, j_\mu^p) \in \Omega(B)] +$$
$$+ \sum_{(i_\alpha^r, j_\mu^p) \in \Omega(B)} b(i_\alpha^r, j_\mu^p) + b[(i_\alpha^r, 0) \mid (i_\alpha^r, 0) \in \Omega(B)]. \quad (7)$$

Среди всех допустимых подмножеств (маршрутов) необходимо выбрать замкнутый маршрут, минимизирующий значение критерия оптимальности $F(B)$.

Свойства допустимых и оптимальных расписаний

Пусть на некотором шаге итеративного процесса решения задачи после выполненных преобразований и исключения из матрицы B некоторого подмножества строк и столбцов матрица B будет преобразована в матрицу $\overline{\mathrm{B}}(s)$. Обозначим:

$Q_A(i,s)$ и $Q_C(i,s)$, $H_A(j,s)$ и $H_C(j,s)$ – соответственно множество строк и столбцов матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s)$, оставшихся после всех преобразований исходной матрицы B, соответствующих i-й технологической операции, начальной точкой выполнения которой есть точка i_A и i_C;

$$i \in \tilde{I}(s) = \{0, 1, ..., i, ..., N_{is}\},$$
$$j \in \tilde{J}(s) = \{0, 1, ..., i, ..., N_{Js}\};$$
$$Q(i,s) = Q_A(i,s) \bigcup Q_C(i,s),$$
$$H(j,s) = H_A(j,s) \bigcup H_C(j,s).$$

Пусть $\Omega\{\tilde{I}(s)\} = \bigcup_{i \in \tilde{I}(s)} Q(i,s)$, $\Omega\{\tilde{J}(s)\} = \bigcup_{j \in \tilde{J}(s)} H(j,s)$ – соответственно множества всех строк и столбцов матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s)$.

Элементы матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s)$ обозначим $\beta_{ij}(s)$, $i \in \Omega\{\tilde{I}(s)\}$, $j \in \Omega\{\tilde{J}(s)\}$.

На начальном этапе решения задачи $s = 0$, $B = \overline{\mathrm{B}}(s)$, $Q(i,s) = \Omega_i$ $H(j,s) = \Omega^j$, $\tilde{I}(s) = \tilde{I}$, $\tilde{J}(s) = J$. $\Omega\{\tilde{I}(s=0)\} = \bigcup_{i \in \tilde{I}} \Omega_i$, $\Omega\{\tilde{J}(s=0)\} = \bigcup_{j \in \tilde{I}} \Omega^j$.

Возможны ситуации, когда $Q(i,s) = H(i,s) = \varnothing$, либо только $Q_A(i,s) = \varnothing$ или $Q_C(i,s) = \varnothing$, либо только $H_A(j,s) = \varnothing$ или $H_C(j,s) = \varnothing$.

Преобразованием 1 *матрицы* $\overline{\mathrm{B}}(s)$ назовем преобразование, в результате которого из каждого элемента подмножества строк $Q(i,s)$ матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s)$ вычитается минимальное значение среди всех элементов данного подмножества строк, т.е. величина

$$\beta^{\min}(i,s) = \min_{j \in H(j,s)} \beta_{ij}(s), \; i \in Q(i,s);$$
$$H(j,s) \subseteq \Omega\{\tilde{J}(s)\}, \; Q(i,s) \subseteq \Omega\{\tilde{I}(s)\}. \quad (8)$$

В результате преобразования 1 в каждом подмножестве строк $Q(i,s)$ матрицы будет содержаться, по крайней мере, по одному нулевому элементу и элементы новой матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s,1) = \left\| \beta_{ij}(s,1) \right\|$ преобразуются по формулам

$$\beta_{ij}(s,1) = \beta_{ij}(s) - \beta^{\min}(i,s), \; j \in H(j,s);$$
$$H(j,s) \subseteq \Omega\{\tilde{J}(s)\}, \; Q(i,s) \subseteq \Omega\{\tilde{I}(s)\}. \quad (9)$$

Преобразованием 2 *матрицы* $\overline{\mathrm{B}}(s,1)$ назовем преобразование, в результате которого из каждого элемента подмножества столбцов $H(j,s)$ матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s,1)$ вычитается минимальное значение среди всех элементов данного подмножества строк, т.е. величина

$$\delta^{\min}(j,s) = \min_{i \in Q(i,s)} \beta_{ij}(s,1), \; j \in H(j,s),$$
$$H(j,s) \subseteq \tilde{J}(s). \quad (10)$$

В результате преобразования 2 в каждом подмножестве столбцов $H(j,s)$ матрицы будет содержаться, по крайней мере, по одному нулевому элементу и элементы новой матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s,2) = \left\| \beta_{ij}(s,2) \right\|$ преобразуются по формулам

$$\beta_{ij}(s,2) = \beta_{ij}(s,1) - \delta^{\min}(j,s), \; j \in H(j,s),$$
$$H(j,s) \subseteq \Omega\{\tilde{J}(s)\}. \quad (11)$$

Преобразованием 3 *матрицы* $\overline{\mathrm{B}}(s)$ назовем преобразование, в результате которого после выбора некоторого элемента, определяющего переход после завершения выполнения $\hat{i}$-й операции в положении $\hat{i}_C$ с r-м значением элементов вектора всех рабочих звеньев ПР к началу выполнения $\hat{j}$-й операции в точке $\hat{j}_A$ с p-м значением элементов вектора всех рабочих звеньев ПР, в матрице $\overline{\mathrm{B}}(s)$ проводятся следующие преобразования:

• исключаются все строки подмножества $l \in Q(\hat{i}, s)$ и все столбцы подмножества $l \in$ $\in H(j, s)$;

• все элементы на пересечении подмножества строк $Q_A(\hat{j}, s)$ и подмножества столбцов $H_C(\hat{i}, s)$ полагаем равными ∞, $\beta_{ij}(s) = \infty$, $i \in Q_A(\hat{j}, s)$, $j \in H_C(\hat{i}, s)$;

• вновь преобразованная матрица подвергается затем последовательно преобразованиям 1 и 2.

Пусть на некотором этапе решения задачи определено некоторое подмножество $\Psi(s)$ выбранных элементов (i_C^r, j_A^p) матрицы B, $(i_C^r, j_A^p) \in \Psi(s)$, величина которых равна $b(i_C^r,$ $j_A^p)$. Сумма выбранных на s-м шаге решения элементов равна

$$f(s) = \sum_{(i_C^r, j_A^p) \in \Psi(s)} \beta_{i_C^r, j_A^p}(s, 2). \qquad (12)$$

Включение в подмножество $\Psi(s)$ элемента (i_C^r, j_A^p) означает, что в расписание программных движений ПР включен переход после выполнения i-й операции, завершенной в пункте C при r-м положении рабочих звеньев, в начальную точку A выполнения j-й операции с установкой рабочих звеньев в p-е положение. Направление выполнения j-й операции будет начинаться в точке A и завершаться в точке C.

После выбора из этих элементов на каждом ρ-м шаге принятия решений $\rho = 1, 2, ..., s$ проводилось преобразование матрицы $\overline{\mathrm{B}}(\rho)$ по правилу преобразоваия 3, а на начальном этапе решения при $\rho = 0$ последовательно выполнено преобразование исходной матрицы $\overline{\mathrm{B}}(\rho = 0) = 0$ преобразованиями 1 и 2. Обозначим $E(\rho)$– сумму приводящих констант на ρ-м шаге приведения

$$E(\rho) = \sum_{i \in \tilde{I}(\rho)} \beta^{\min}(i, \rho) + \sum_{j \in \tilde{J}(\rho)} \delta^{\min}(j, \rho). \qquad (13)$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Минимальное значение длины производственного цикла (замкнутого маршрута движения ПР с начальной и конечной точкой пути в пункте $i = 0$ при заданном фиксированном положении всех звеньев), удовлетворяющего всем ограничениям задачи, сформулированным в предыдущем разделе, s-м этапе решения, не может быть меньше величины, определяемой выражением

$$\xi(F, s) = f(s) + \sum_{\rho=0}^{s} E(\rho). \qquad (14)$$

Значение $\xi(F, s)$ назовем нижней границей критерия оптимальности на s-м этапе решения.

***Следствия утверждения* 1**

• На начальном этапе решения задачи $s = 0$

$$\xi(F, 0) = f(0) = \sum_{i \in \tilde{I}} \beta^{\min}(i, 0) + \sum_{j \in \tilde{J}} \delta^{\min}(j, 0); \qquad (15)$$

• Если $s_2 > s_1$ и $\Psi(s_1) \subset \Psi(s_2)$, то $\xi(F, s_2) \geq$ $\geq \xi(F, s_1)$.

Оценка нулевых элементов матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s, 2) = \left\| \beta_{ij}(s, 2) \right\|$.

Для каждого элемента $\beta_{i_1 f_2}(s, 2) = 0$, где $i_1 \in Q(i, s)$, $j_2 \in H(j, s)$, матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s,2)$ в подмножестве элементов строк $Q(i,\ s)$ и подмножестве столбцов $H(j,\ s)$ определим два наименьшие по величине элемента, отличные от элемента $\beta_{i_1 f_2}(s, 2) = 0$

$$\sigma_{i_1}^1(s, 2) = \left\{ \min_{i \in Q(i,s)} \min_{i \in \Omega\{J(s)\}} \beta_{lj}(s, 2) \middle| ([i, l] | s, 2) \neq \neq ([i_1, j_2] | s, 2) \right\}, \qquad (16)$$

$$\sigma_{j_2}^2(s, 2) = \{ \min_{j \in H(j,s)} \min_{l \in \Omega\{\tilde{I}(s)\}} \beta_{lj}(s, 2) \,|\, ([l, j] \,|\, s, 2) \neq \neq ([i_1, j_2] \,|\, s, 2) \}. \qquad (17)$$

Значение

$$\sigma_{i_1 f_2}(s, 2) = \sigma_{i_1}^1(s, 2) + \sigma_{j_2}^2(s, 2) \qquad (18)$$

назовем минимальной суммой приводящих констант нулевого элемента, соответствующего переходу от некоторого положения ПР при завершении выполнения i_1-й операции и переходу к началу выполнения j_2 операции. При этом $i_1 \in \tilde{I}(s)$, $j_2 \in \tilde{J}(s)$.

Пусть $\Gamma(s, 0) = \{(i_1, j_2) \,|\, i_1 \in \tilde{I}(s),\ j_2 \in \tilde{J}(s);$

$\beta_{i_1 j_2}(s, 2) = 0\}$ – подмножество нулевых элементов матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s,2)$.

Среди всех нулевых элементов найдем такой, для которого

$$\sigma_{i^* j^*}(s,2) = \max_{(i_1,j_2)\in\Gamma(s,0)} \sigma_{i_1 j_2}(s,2). \qquad (19)$$

Утверждение 2. Среди всех элементов матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s,2)$ выбор элемента с максимальной оценкой нулевого элемента $([i^*, j^*] \mid s,2)$ и при рассмотрении двух следующих возможностей расширения подмножества выбранных элементов на s-м шаге процесса решения

$$\Psi_1(s+1) = \{\Psi(s) \bigcup ([i^*, j^*] \mid s,2)\}, \qquad (20)$$

т.е. включение в это подмножество данного элемента;

$$\begin{aligned}\Psi_2(s+1) = \{\Psi(s) \bigcup ([l,w] \mid s,2) :\\ : ([l,w] \mid s,2) \neq ([i^*, j^*] \mid s,2)\},\end{aligned} \qquad (21)$$

т.е. включение в это подмножество любого другого элемента матрицы $\overline{\mathrm{B}}(s,2)$, кроме данного, приведет к разбиению рассматриваемого множества вариантов на два непересекающихся подмножества, разность нижних границ значения критерия оптимальности максимальна.

Алгоритм решения задачи

Алгоритм решения задачи построен на основе метода ветвей и границ [6], использует рассмотренные ранее свойства допустимых и оптимальных расписаний и является обобщением известных в литературе алгоритмов решения задач одного и N коммивояжеров [5, 6].

Пусть на некотором шаге решения задачи построено W различных подмножеств $\Psi^w(s)$, $w=1,\ldots,W$, включенных в состав расписания элементов матрицы B. Для каждого из этих подмножеств по формулам (12) – (14) определены нижние границы значения критерия оптимальности $\xi(F^w,s)$. Пусть также получено некоторое количество допустимых решений задачи, среди которых сохраняем в памяти наилучшее из них с подмножеством элементов матрицы B – $\Omega(B) = \overline{\Psi}(N)$ и значением критерия оптимальности, равным $\Phi\{\overline{\Psi}(N)\}$. На начальном этапе решения полагаем $\overline{\Psi}(N) = \varnothing$, $\Phi\{\overline{\Psi}(N)\} = \infty$, а также $\Psi^0(\mathrm{s}=0) = \varnothing$, $f(s=0)=0$, а значение $\xi(F, 0)$ вычисляется по формуле (15).

На каждой итерации алгоритма выполняются следующие шаги.

Ш а г 1. Определяем подмножество $\Psi^{w^*}(s)$ с наименьшим значением нижней границы $\xi(F^{w^*},s) = \min_{1\le w\le W} \xi(F^w,s)$. Если матрица $\vec{\mathrm{B}}^{w^*}(s)$ не содержит ни одного элемента, то получено решение задачи, и, положив $\overline{\Psi}(N) = \Psi^{w^*}(s)$, для восстановления его переходим к шагу 4. В противном случае, если $\xi(F^{w^*},s) \ge \Phi\{\overline{\Psi}(N)\}$, то ранее построенное подмножество $\overline{\Psi}(N)$ будет оптимальным решением и переходим к шагу 4. Если $\xi(F^{w^*},s) < \Phi\{\overline{\Psi}(N)\}$ переходим к шагу 2.

Ш а г 2. Вычисляем оценки нулевых элементов матрицы $\vec{\mathrm{B}}^{w^*}(s)$ подмножества вариантов $\Psi^{w^*}(s)$ по формулам (16) – (18). Находим нулевой элемент с максимальным значением нулевой оценки в соответствии с выражением (18). Если таких элементов несколько, то выбираем любой из них. Пусть это будет элемент матрицы $\vec{\mathrm{B}}^{w^*}(s)$ – $(i^{w^*}, j^{w^*} \mid s,2)$. Разбиваем подмножества вариантов $\Psi^{w^*}(s)$ на два подмножества $\Psi_1^{w^*}(s+1)$ и $\Psi_2^{w^*}(s+1)$ в соответствии с выражениями (20) и (21) . Определяем

$$\Psi_1^{w^*}(s+1) = \{\Psi^{w^*}(s) \bigcup (i^{w^*}, j^{w^*})\},$$

$$\Psi_2^{w^*}(s+1) = \Psi^{w^*}(s). \qquad (22)$$

Исключаем подмножество $\Psi^{w^*}(s)$ из дальнейшего рассмотрения. Переходим к шагу 3.

Ш а г 3.

1. Проводим преобразование трех элементов матрицы $\overline{\mathrm{B}}_1^{w^*}(s+1)$ подмножества вариантов для вновь образованного подмножества вариантов $\Psi_1^{w^*}(s+1)$ и вычисляем значение нижней границы для этого подмножества $\xi(F_1^{w^*},s+1)$ по формулам (12) – (14). Полагаем $s := (s+1)$.

Если $\overline{\mathrm{B}}_1^{w^*}(s+1) = \varnothing$ и $\xi(F_1^{w^*},s+1) > \min_{1\le w\le W}\{\xi(F^w,s) \mid w \neq w^*)$, то получено допустимое решение задачи. Исключаем подмножество $\Psi_1^{w^*}(s+1)$ из дальнейшего рассмотрения. Если $\xi(F_1^{w^*}, s+1) < \Phi\{\bar{\Psi}(N)\}$, то полагаем $\bar{\Psi}(N) = \Psi_1^{w^*}(s+1)$, $\Phi\{\bar{\Psi}(N)\} = \xi(F_1^{w^*}, s+1)$.

2. Формируем матрицу элементов $\bar{\mathrm{B}}_2^{w^*}(s+1)$ для вновь образованного подмножества вариантов $\Psi_2^{w^*}(s+1)$, положив в матрице $\bar{\mathrm{B}}^{w^*}(s)$ элемент, стоящий на пересечении i^{w^*}-й строки и j^{w^*}-го столбца, равным ∞, $\beta_{i^{w^*} j^{w^*}}(s,2) = \infty$. Определяем значение нижней границы величины критерия оптимальности для этого подмножества вариантов согласно выражению

$$\xi\left(F_2^{w^*}, s\right) = \xi\left(F^{w^*}, s\right) + \delta_{i^{w^*} j^{w^*}}(s,2). \qquad (23)$$

3. Проводим переиндексацию всех оставшихся перспективных подмножеств вариантов и, положив $W := (W+1)$, переходим к шагу 1.

Выполняем преобразование 1 и 2 матрицы $\bar{\mathrm{B}}^{w^*}(s)$ подмножества вариантов $\Psi^{w^*}(s)$ и вычисляем сумму приводящих констант $E^{w^*}(s)$ по формуле (13).

Ш а г 4. Восстановление оптимального расписания.

Все листья ветви дерева, соответствующей оптимальному расписанию, – множество элементов матрицы B, составляющих оптимальное расписание выполнения работ. Выбираем лист ветви дерева $(0, j_A^p)$, у которого первый пункт ноль. Этот элемент определяет, что с начального нулевого пункта ПР перемещается в точку A с p-м положением звеньев, в которой начинается выполнение операции j. Далее среди всех листьев этой ветви ищем лист, первый признак которого определяет точку и положение рабочих звеньев, в которой завершается выполнение этой j-й операции. Пусть это будет элемент (j_C^r, l_A^p). Следовательно, осуществлен переход после выполнения j-й операции, завершенной в пункте C при r-м положении рабочих звеньев, в начальную точку A выполнения l-й операции с установкой рабочих звеньев в p-е положение, направление выполнения l-й операции будет начинаться в точке A и завершаться в точке C. Затем ищем лист этой ветви, первый признак которой определяет завершение l-й операции и так далее, пока не будет найден лист $(h_A^p, 0)$, второй признак которого равен нулю.

Иллюстративный пример

ПР должен выполнить в течение рабочего цикла пять сварочных швов. Начало и конец сварочной операции может быть выбран в одной из двух заданных точек. При выполнении первого сварочного шва, соединяющего точки один и два, возможны два различных положения всех звеньев ПР в каждой из этих точек. При выполнении остальных сварочных швов (между точками 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8, 9 и 10) допустимо лишь одно положение всех звеньев в каждой из этих точек. Начало и завершение выполнения всех сварочных операций при фиксированном положении всех звеньев робота должно быть предусмотрено в одной и той же точке ноль при одном и том же фиксированном положении всех звеньев ПР. В табл. 1 заданы времена перехода ПР

Т а б л и ц а 1. Матрица времен переход и выполнения операций B

№ Операции	Положение ПР	Времена переходов и выполнения операций												
		1-я операция				2-я операция		3-я операция		4-я операция		5-я операция		**0** конец цикла
		1–1	1–2	2–1	2–2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0 начало цикла		40	20	25	30	40	35	50	35	40	50	35	45	∞
1	1–1	∞	∞	∞	∞	30	60	50	70	110	140	40	80	25
	1–2	∞	∞	∞	∞	50	70	35	60	90	120	60	100	20
	2–1	∞	∞	∞	∞	80	90	40	50	120	100	70	110	20
	2–2	∞	∞	∞	∞	20	100	110	85	95	130	90	130	25
2	3	30	50	70	90	∞	∞	80	90	120	130	130	150	35
	4	10	40	50	90	∞	∞	100	120	150	110	100	120	40
3	5	80	60	30	60	40	60	∞	∞	20	40	70	60	40
	6	40	70	45	80	30	45	∞	∞	60	80	30	55	55
4	7	10	20	60	30	80	90	35	50	∞	∞	20	40	20
	8	30	50	40	40	70	90	30	40	∞	∞	60	35	45
5	9	80	90	20	50	45	10	50	55	90	60	∞	∞	50
	10	50	30	30	65	15	60	50	35	50	30	∞	∞	65

между различными точками и длительности выполнения сварочных операций для различных допустимых маршрутов движения рабочего органа ПР. Так, например, значение элемента, стоящего на пересечении i_α^r-й строки и j_μ^p (здесь i и j – индексы операций, α и μ – индексы точек, в которых начинается операция j и заканчивается операция i, а r и p – соответственно индексы положений звеньев ПР в этих точках), – суть время перехода и перенастройки всех звеньев ПР из i_α^r в j_μ^p плюс время выполнения j-й, если она начинается в положении j_μ^p. Элементы нулевой строки определяют время перехода из начального состояния в соответствующее положение плюс время выполнения рабочей операции, если она начинается в данном положении. Элементы нулевого столбца – время перехода ПР и положения завершения операции в начальное положение рабочего цикла.

В табл. 2 приведена матрица $\overline{\mathrm{B}}(s=0)$ после выполнения преобразований 1 и 2, в каждом подмножестве строк и столбцов которой, соответствующих одному и тому же индексу операции, содержится по крайней мере по одному нулевому элементу. При этом сумма приводящих

Т а б л и ц а 2. Преобразованная матрица времен переход и выполнения операций $\overline{\mathrm{B}}(s=0)$

№ операции	Положение ПР	Времена переходов и выполнения операций												
		1-я операция				2-я операция		3-я операция		4-я операция		5-я операция		**0** Конец цикла
		1–1	1–2	2–1	2–2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0 начало цикла		20	**0**	5	10	20	5	15	**0**	20	30	5	15	∞
1	1–1	∞	∞	∞	∞	10	40	25	35	90	120	10	50	5
	1–2	∞	∞	∞	∞	30	50	**0**	25	70	100	30	70	**0**
	2–1	∞	∞	∞	∞	60	70	5	15	100	80	40	80	**0**
	2–2	∞	∞	∞	∞	**0**	80	75	50	75	110	60	100	5
2	3	20	40	60	80	∞	∞	55	65	110	120	110	130	25
	4	**0**	30	40	80	∞	∞	75	95	140	100	80	100	30
3	5	60	40	10	40	20	40	∞	∞	**0**	20	40	30	20
	6	20	50	25	60	10	25	∞	∞	40	60	**0**	25	35
4	7	**0**	10	50	20	70	80	10	25	∞	∞	**0**	20	10
	8	20	40	30	30	60	80	5	15	∞	∞	40	15	35
5	9	70	80	10	40	35	**0**	55	75	80	50	∞	∞	40
	10	40	20	20	55	5	50	25	30	40	20	∞	∞	55

констант, определяющая нижнюю границу критерия оптимальности на начальном этапе решения, равна $\xi(F)=115$.

Процесс решения задачи, описанный ранее методом *ветвей и границ*, представлен на рис. 1. В результате решения получено оптимальное расписание выполнения производственного цикла, представленное на рис. 2.

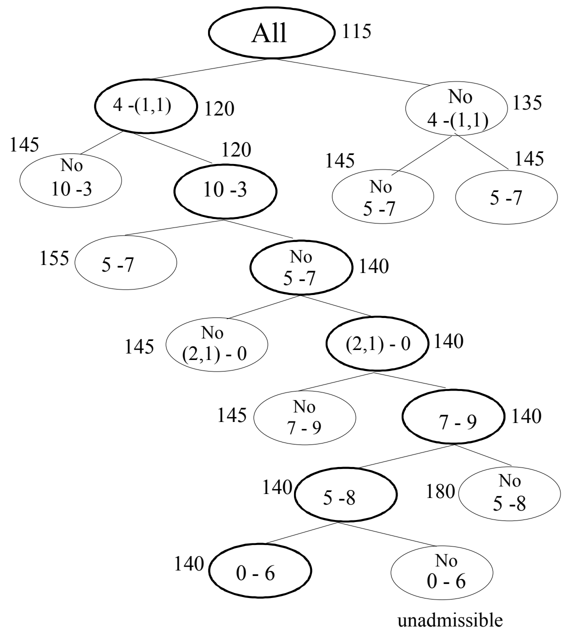

Рис. 1. Дерево решений задачи

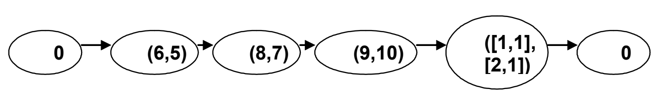

Рис. 2. Оптимальная последовательность выполнения технологических операций и переходов

Заключение. Минимизация суммарных потерь времени на переориентацию исполнительного органа и звеньев, занимающих существенную часть времени производственного цикла, чрезвычайно актуальна для массового и крупносерийного производства.

Возможности использования различных последовательностей и способов выполнения технологических операций и гибкость системы управления звеньями ПР предоставляют очень большое количество возможностей реализации программных движений рабочего органа, среди которых необходимо осуществить выбор допустимой последовательности движений и соответствующей ей положений рабочего органа и рабочих звеньев ПР, минимизирующей время выполнения производственного цикла.

Математическая модель сформулированной технической проблемы представлена в виде задачи теории расписаний, относится к классу *NP*-проблем экспоненциальной сложности и представлена в статье в виде обобщенной задачи коммивояжера. Элементы матрицы времен переходов и выполнения технологических операций для различных допустимых вариантов выполнения операций, а также положений рабочих звеньев и исполнительных органов ПР могут быть определены на основе экспериментальных исследований, по результатам имитационного моделирования или описанными аналитическими методами.

На основе анализа свойств допустимых и оптимальных решений задачи предложены алгоритмы решения задачи методом *ветвей и границ*, допускающим распараллеливание вычислительного процесса, с помощью которого может быть получено как точное, так и приближенное решение задачи (на основе развития до конца только одной ветви дерева).

Решение сформулированной задачи требует значительных объемов вычислений, что связано не с эффективностью предлагаемых методов, а сложностью решаемой проблемы. Однако эти затраты оправданы, так как могут привести к значительному увеличению производительности или сокращению затрат на покупку оборудования при проектировании крупносерийного и массового производства.

1. *Che A*., *Chu C*. A polynomial algorithm for 2-degry cyclic robot scheduling // European J. of Operational Research, 2003. – N 1. – P.31–44.
2. *Chen H.-G*., *Guerrero H.H*. A rule-based robot scheduling system for flexible manufacturing cells. // J. of Intelligent Manufacturing, 2007. – N 5. – P. 285–296.
3. *Зенкевич С.Л*., *Ющенко А.С*. Управление роботами. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 399 с.
4. *Костюк В.И*., *Ямпольский Л.С*. Промышленные роботы. Конструирование, управление, эксплуатация: Учеб. пособие для втузов. – К.: Вища шк., 1985. – 359 с.
5. *Зак Ю.А*. Алгоритмы решения задач *n* коммивояжеров // Кибернетика, 1972. – № 1. – С. 99–106.
6. *Lawler E.L*., *Wood D.E*. Branch-and-Bound Methods (of Survey). v. 4, §14. – Oper. Res., 1966. – P. 252–260.

Поступила 21.01.2014

Тел. для справок: +49 241 543-255 (Аахен, Германия)
E-mail: *yuriy_zack@hotmail.com*
Сайт: *www.optimorum.de*