УДК 681.5.01

Ю.И. Дорофеев, Л.М. Любчик, А.А. Никульченко

Прогнозирующее управление распределенными сетями поставок в условиях неопределенности спроса

Рассмотрена задача синтеза стратегии управления запасами для распределенной сети поставок в условиях неопределенности спроса при наличии ограничений на переменные состояния и управления, а также транспортных запаздываний. Предложен подход, основанный на методе прогнозирующего управления и технике линейных матричных неравенств. Рассмотрено управление трехуровневой сетью поставок с пятью узлами.

The problem of control strategy synthesis for distributed supply network with demand uncertainty, time delays and constraints on the state and control inputs is considered. The approach based on the Model Predictive Control and techniques of Linear Matrix Inequalities is proposed. The three-tier supply network control containing five nodes is examined.

Розглянуто задачу синтезу стратегії управління запасами для розподіленої мережі поставок в умовах невизначеності попиту за наявності обмежень на змінні стану і управління, а також транспортних запізнень. Пропонований підхід засновано на методі прогнозного управління і техніці лінійних матричних нерівностей. Розглянуто управління трирівневою мережею поставок з п'ятьма вузлами.

Введение. Сетью поставок называется система, представляющая собой совокупность взаимосвязанных объектов, осуществляющих добычу сырья, производство, хранение, транспортировку и распределение продукции [1]. Узлы сети задают виды и объемы управляемых запасов, а дуги представляют управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки описывают перераспределение ресурсов между узлами, процессы переработки ресурсов и процессы поставок сырья извне. Неуправляемые потоки – спрос на ресурсы, формируемый внешними потребителями. В результате функционирования производственных звеньев, ассоциированных с узлами сети, и воздействия спроса со стороны внешних потребителей уровни запаса ресурсов в узлах изменяются с течением времени.

Существуют различные типы топологии сетей поставок, определяемые размещением потребителей и складов. Если некоторые виды сырья или полуфабрикатов используются в нескольких процессах, проходящих одновременно, система приобретает эшелонированную структуру, подобные системы называют распределенными сетями поставок.

Цель функционирования рассматриваемых систем – полное и своевременное удовлетворение спроса со стороны внешних потребителей при условии минимизации собственных издержек. В результате возникает необходимость в разработке методов математического моделирования управляемых сетей поставок с целью их анализа и построения оптимальных стратегий управления запасами. При этом необходимо учитывать различные факторы неопределенности как стохастической, так и нестохастической природы.

В работе [2] предложен подход к решению указанных задач управления на основе концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий (*unknown-but-bounded* (*UBB*) *inputs*) в предположении, что неизвестный спрос принадлежит заданному множеству. Такой подход приводит к минимаксным игровым постановкам и гарантированным решениям для случая наихудшего варианта реализации внешнего спроса. В [3] рассмотрена задача синтеза стратегии управления запасами как задача слежения за оптимальными уровнями запаса в узлах сети при наличии случайных внешних воздействий.

Сегодня для синтеза стратегии управления запасами в системах рассматриваемого класса в условиях неопределенности внешнего спроса широко применяется метод прогнозирующего управления (*Model Predictive Control*, *MPC*) [4]. Используя трактовку спроса в качестве внешнего возмущения, в работе [5] решена задача синтеза управления для разомкнутой системы путем решения в режиме *on-line* задач квадратичного программирования (*Quadratic Programming*, *QP*). В работе [6] для замкнутой системы решена минимаксная *MPC*-задача. Использование аппарата линейных матричных неравенств (*Linear Matrix Inequalities*, *LMI*) позволило решить задачу стабилизации системы и оценить множества достижимости на основе решения задач полуопределенного программирования (*Semi-Definite Programming*, *SDP*). Однако в работе [7] показано, что такой подход применим только в случае, когда ограничения на состояния и управления симметричны.

В статье рассматривается задача синтеза стратегии управления запасами для распределенной сети поставок в условиях неопределенности внешнего спроса при наличии асимметричных ограничений на состояния и управления, и запаздываний, обусловленных затратами времени на транспортировку и переработку ресурсов.

Модель сети поставок как объекта управления

Для математического описания сетей поставок целесообразно воспользоваться методом «дискретно-событийного» моделирования. Дискретность возникает вследствие того, что получение информации о спросе, а также подача управляющих воздействий на объект происходит в дискретные моменты времени, обычно кратные некоторому периоду Δt.

Уравнения модели сети описывают изменение уровня запасов каждого вида ресурсов в течение текущего периода. В качестве переменных состояния рассматриваются имеющиеся в наличии запасы ресурсов, переработка которых к текущему моменту завершена и они помещены в хранилища соответствующих узлов сети. В качестве управляющих воздействий рассматриваются объемы заявок на поставку ресурсов, формируемые узлами сети в текущем периоде. Внешними неуправляемыми воздействиями – возмущениями есть объемы спроса на конечную продукцию, поступающие в текущем периоде извне на узлы сети.

Для графического представления сетей поставок используется ориентированный граф, вершины которого соответствуют узлам сети, а дуги описывают управляемые и неуправляемые потоки. Предполагается, что структура сети поставок известна, состояния доступны непосредственному измерению, а значения интервалов времени, описывающих длительность процессов транспортировки и переработки ресурсов, известны и не меняются в процессе функционирования сети. Для их описания целесообразно использовать модель дискретной задержки. Тогда сеть поставок описывается разностным уравнением с запаздыванием:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda_{\mathrm{M}}} B_t u(k-t) + Ed(k), \quad k = 0,1,2,..., \qquad (1)$$

где $x(k) \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояний; $u(k) \in \mathbf{R}^m$ – вектор управляющих воздействий; $d(k) \in \mathbf{R}^q$ – вектор внешних возмущений; $B_t \in \mathbf{R}^{n \times m}, t = \overline{0, \Lambda_{\mathrm{M}}}$ – матрицы влияния управлений, $E \in \mathbf{R}^{n \times q}$ – матрица влияния возмущений; Λ_{M} – максимальное значение запаздывания материальных потоков между узлами сети. Очевидно, что структура сети определяется матрицами B_t, E.

В процессе функционирования системы должны выполняться следующие ограничения:

$$x(k) \in X = \left\{x \in \mathbf{R}^n : 0 \le x \le x^+\right\}, \; k = 0,1,2,..., \qquad (2,a)$$

$$u(k) \in U = \left\{u \in \mathbf{R}^m : \; 0 \le u \le u^+\right\}, \qquad (2,b)$$

где векторы x^+ и u^+, определяющие максимальные вместимости хранилищ узлов сети и максимальные объемы транспортировок, считаются заданными.

Для определения стратегии управления запасами необходимо смоделировать внешний спрос. На практике характеристики спроса точно не известны, поэтому предположим, что сеть поставок функционирует в условиях *UBB* спроса, который характеризуется интервальной неопределенностью. Это означает, что каждая компонента вектор–функции, описывающей спрос, принадлежит некоторому интервалу, границы которого определяются на основании изучения статистических данных. Тогда к введенным ранее ограничениям добавляется следующее:

$$d(k) \in D = \left\{ d \in \mathbf{R}^q : \ \ d^- \le d \le d^+ \right\}, \qquad (3)$$

где векторы d^- и d^+ определяют граничные значения спроса.

Множества X, U, D представляют собой ограниченные многогранники, которые определяются пересечением конечного числа замкнутых полупространств, т.е. представляют собой компактные выпуклые множества, при этом $0 \notin \operatorname{int}(X)$, $0 \notin \operatorname{int}(U)$, $0 \notin \operatorname{int}(D)$.

Рассмотрим задачу синтеза закона управления уровнем запасов, обеспечивающего для любого начального состояния $x(0) \in X$ и спроса $d(k) \in D, k \ge 0$ минимизацию некоторого критерия качества и выполнение ограничений на состояния и управления (2).

Преобразование математической модели объекта

Для преобразования модели (1) к стандартному виду без запаздываний применяется методика расширения пространства состояний [2], реализуемая путем включения в вектор состояний векторов, представляющих объемы ранее заказанных ресурсов, находящихся в процессе транспортировки и переработки

$$\xi(k) = \left[x(k)^T, u(k-1)^T, u(k-2)^T, ..., u(k-\Lambda_{\text{М}})^T \right]^T.$$

Тогда уравнения *расширенной* модели сети поставок примут вид:

$$\begin{aligned} &\xi(k+1) = A\xi(k) + Fu(k) + Gd(k), \\ &x(k) = C\xi(k), \end{aligned} \qquad (4)$$

где матрицы A, F, G, C имеют соответствующую блочную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} I_{n\times n} & B_1 & \dots & B_{\Lambda_{\text{М}}-1} & B_{\Lambda_{\text{М}}} \\ [0]_{m\times n} & [0]_{m\times m} & \dots & [0]_{m\times m} & [0]_{m\times m} \\ [0]_{m\times n} & I_{m\times m} & \dots & [0]_{m\times m} & [0]_{m\times m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{m\times n} & [0]_{m\times m} & \dots & I_{m\times m} & [0]_{m\times m} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} B_0 \\ I_{m\times m} \\ [0]_{m\times m} \\ \vdots \\ [0]_{m\times m} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} E \\ [0]_{m\times q} \\ [0]_{m\times q} \\ \vdots \\ [0]_{m\times q} \end{pmatrix}, C^{\text{T}} = \begin{pmatrix} I_{n\times n} \\ [0]_{n\times m} \\ \vdots \\ [0]_{n\times m} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Для упрощения полученной расширенной модели применяется метод декомпозиции. С помощью замены базиса строится модель, вектор состояний которой имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(k) = \Big[& z(k)^T, u(k-1)^T, \\ & u(k-2)^T, ..., u(k-\Lambda_{\text{М}})^T \Big]^T, \end{aligned} \qquad (6)$$

где элементы вектора $z(k) \in \mathbf{R}^n$ называют *фиктивными* уровнями запаса и определяют как сумму уровня запаса ресурсов, находящихся в хранилищах, а также пребывающих в процессе транспортировки и переработки. Тогда уравнение модели приобретает вид:

$$\begin{aligned} & z(k) = x(k) + \sum_{t=1}^{\Lambda_{\text{М}}} \hat{B}_t u(k-t), \\ & \text{где} \quad \hat{B}_i = \sum_{t=i}^{\Lambda_{\text{М}}} B_t, \quad i = \overline{1, \Lambda_{\text{М}}}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Полученная система с вектором состояний (6) допускает декомпозицию на две подсистемы. Первая из них, называемая далее *мгновенной* и соответствующая нулевым запаздываниям, описывается уравнением:

$$z(k+1) = z(k) + Bu(k) + Ed(k), \text{ где } B = \sum_{t=0}^{\Lambda_{\text{М}}} B_t. \qquad (8)$$

Переменными состояний второй подсистемы являются управляющие воздействия на предыдущих шагах

$$w(k) = \left[u(k-1)^T, \ \ u(k-2)^T, ..., u(k-\Lambda_{\text{М}})^T \right]^T.$$

При этом вторая подсистема асимптотически устойчива, поскольку ее матрица динамики A_w – нильпотентна:

$$w(k+1) = A_w w(k) + B_w u(k). \qquad (9)$$

Таким образом, для анализа динамических свойств распределенных сетей поставок целесообразно использовать мгновенную модель (8).

В [2] показано, что если для заданной модели сети пара матриц $(I,\ B)$ управляема, то допустимая стратегия управления существует, если выпуклый многогранник, описывающий влияние внешних воздействий, находится строго внутри выпуклого многогранника, описывающего ресурсы управления:

$$ED \subset -BU. \qquad (10)$$

Задача проверки условия (10) представляет собой совокупность задач линейного программирования (*Linear Programming*, *LP*), количество которых равно $2^{(q+m)}$ [2].

Для решения задачи синтеза стратегии управления запасами на основе мгновенной модели объекта (8) необходимо определить ограничения на значения переменных, определяющих фиктивные уровни запаса:

$$z(k) \in Z = \left\{ z \in \mathbf{R}^n :\ \ z^- \le z \le z^+ \right\}. \qquad (11)$$

Значения вектора z^-, определяющего нижнюю границу множества Z, находятся на основании (7) и условия неотрицательности наличных уровней запаса $x(k)$.

Синтез базовой *MPC*-стратегии управления

Для построения стратегии управления запасами используется *MPC*-подход, предполагающий наличие дополнительной информации, позволяющей построить прогноз будущих значений внешнего спроса в течение некоторого горизонта прогнозирования N_P [4].

Тогда задачу синтеза базовой *MPC*-стратегии можно сформулировать в виде:

$$\min_{u(k+l|k),\, l=0,1,\ldots,N_C-1} J(k) \ \text{при условиях:}$$

$$\begin{aligned} z(k+l+1|k) &= z(k+l|k) + Bu(k+l|k) + \\ &+ Ed(k+l|k), \quad l \ge 0, \quad z(k|k) \equiv z(\mathrm{k}), \end{aligned} \qquad (12)$$

где $z(k+l|k),\, d(k+l|k)$ – прогноз значений вектора состояний и внешнего спроса соответственно на l шагов вперед; $u(k+l|k)$ – управление в момент времени $k+l$, полученное в результате решения задачи (12) в момент времени k; N_C – горизонт управления.

Критерий качества выбирается в виде:

$$\begin{aligned} J(k) = \sum_{l=1}^{N_P} \left(z(k+l|k) - z^{\mathrm{opt}} \right)^T R_z \left(z(k+l|k) - z^{\mathrm{opt}} \right) + \\ + \sum_{l=1}^{N_C} u(k+l-1|k)^T R_u u(k+l-1|k), \end{aligned} \qquad (13)$$

где z^{opt} – вектор, задающий оптимальные значения фиктивных уровней запаса; $R_z \succ 0,\, R_u \succ 0$ – положительно определенные диагональные весовые матрицы соответствующих размерностей. При этом значение горизонта прогнозирования должно быть не меньше максимального запаздывания в сети $N_P \ge \Lambda_{\mathrm{M}}$, а значение горизонта управления выбирается меньше или равным значению горизонта прогнозирования $N_C \le N_P$.

После определения последовательности управляющих воздействий на основе решения задачи (12) только первый элемент этой последовательности $u(k) = u(k|k)$ применяется для управления в момент k сетью поставок. Затем измеряется новое значение вектора состояний $z(k+1)$ и процедура повторяется для новых данных. С учетом ограничений (2) задача формулируется как *QP*-задача и решается в режиме *on-line* численно.

Введенные ограничения на переменные состояний (2,*a*) *жесткие* и требование их выполнения может привести к неразрешимости задачи (12) на некоторых шагах. Однако фактически рассматриваемые ограничения не относятся к числу таких, нарушение которых недопустимо. Невыполнение условия $x(k) \ge 0$ означает невозможность полного удовлетворения спроса на текущем шаге, что создает отложенный спрос. Нарушение условия $x(k) \le x^+$ – это переполнение склада, что также не разрушительно для системы. Поэтому в соответствии с [7] предлагается ввести так называемые *мягкие* ограничения на переменные состояний модели, которые могут быть нарушены, если для решения задачи (12) необходимо, чтобы значения выходили за пределы множества Z:

$$z^- - \underline{z}(k) \le z(k) \le z^+ + \overline{z}(k), \qquad (14)$$

где $\underline{z}(k)$, $\overline{z}(k)$ – векторы, элементы которых описывают значения отложенного спроса и объемы ресурсов, не поместившихся в хранилища, на шаге k. В качестве платы за нарушение ограничений (11) в критерий качества вводятся дополнительные слагаемые:

$$\begin{aligned}\tilde{J}(k) = J(k) + \sum_{l=1}^{N_P} \underline{z}\left(k+l\,|k\right)^T \underline{R}\underline{z}(k+l\,|k) + \\ + \sum_{l=1}^{N_P} \overline{z}\left(k+l\,|k\right)^T \overline{R}\overline{z}(k+l\,|k),\end{aligned} \qquad (15)$$

где $\underline{R} \succ 0$ и $\overline{R} \succ 0$ – диагональные весовые матрицы, определяющие размер штрафов при выходе значений за нижнюю и верхнюю границу множества Z соответственно.

Определим следующие векторы прогнозируемых значений переменных:

$$\begin{aligned}Z(k) &= \left[z(k+1|k)^T, z(k+2|k)^T, ..., z(k+N_P|k)^T\right]^T, \\ U(k) &= \left[u(k|k)^T, u(k+1|k)^T, ..., u(k+N_C-1|k)^T\right]^T, \\ D(k) &= \left[d(k+1|k)^T, d(k+2|k)^T, ..., d(k+N_P|k)^T\right]^T.\end{aligned} \qquad (16)$$

Тогда прогнозирующая модель сети поставок будет иметь вид:

$$Z(k) = \overline{A}z(k) + \overline{B}U(k) + \overline{E}D(k), \qquad (17)$$

где матрицы $\overline{A}, \overline{B}, \overline{E}$ имеют блочную структуру:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ I_{n\times n} \\ \vdots \\ I_{n\times n}\end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} B & [0]_{n\times m} & [0]_{n\times m} & \cdots & [0]_{n\times m} \\ B & B & [0]_{n\times m} & \cdots & [0]_{n\times m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B & B & B & \cdots & B \end{bmatrix},$$

$$\overline{E} = \begin{bmatrix} E & [0]_{n\times q} & [0]_{n\times q} & \cdots & [0]_{n\times q} \\ E & E & [0]_{n\times q} & \cdots & [0]_{n\times q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ E & E & E & \cdots & E \end{bmatrix}. \qquad (18)$$

Определим расширенный вектор решений задачи следующим образом:

$$\overline{U}(k) = \left[U(k)^T,\ \underline{Z}(k)^T,\ \overline{Z}(k)^T\right]^T, \qquad (19)$$

где $\overline{Z}(k) = \left[\overline{z}(k+1|k)^T,\ ...,\ \overline{z}(k+N_P|k)^T\right]^T$,

$\underline{Z}(k) = \left[\underline{z}(k+1|k)^T,\ ...,\ \underline{z}(k+N_P|k)^T\right]^T$.

Из (19) следует, что $U(k) = [I\ \ 0\ \ 0]\cdot\overline{U}(k) = I_u\overline{U}(k)$, $\underline{Z}(k) = [0\ \ I\ \ 0]\cdot\overline{U}(k) = I_l\overline{U}(k)$, $\overline{Z}(k) = [0\ \ 0\ \ I]\cdot\overline{U}(k) = I_r\overline{U}(k)$. Тогда критерий качества (15) может быть представлен в виде:

$$J(k) = H_0 + H_1\overline{U}(k) + \frac{1}{2}\overline{U}(k)^T H_2\overline{U}(k), \qquad (20)$$

где $H_0 = \Omega^T W_1 \Omega$, $H_1 = 2\Omega^T W_1 \overline{B}\, I_u$, $H_2 = 2I_u^{\,T}\left(\overline{B}^T W_1 \overline{B} + W_2\right)I_u + 2I_l^{\,T} W_3 I_l + 2I_r^{\,T} W_4 I_r$, $\Omega = \overline{A}z(k) + \overline{E}D(k) - Z^{opt}$, $Z^{opt} = \left[z^{optT}, ..., z^{opt\mathrm{T}}\right]^T$, а диагональные весовые матрицы равны:

$$W_1 = \operatorname{diag}\left(R_z, ..., R_z\right),\ \ W_2 = \operatorname{diag}\left(R_u, ..., R_u\right),$$

$$W_3 = \operatorname{diag}\left(\underline{R}, ..., \underline{R}\right),\ \ W_4 = \operatorname{diag}\left(\overline{R}, ..., \overline{R}\right).$$

Оптимальные значения фиктивного запаса ресурсов определяются так:

$$z^{opt} = \begin{cases} z_i^- + \dfrac{1}{2}\left(d_i^+ - d_i^-\right), & i = \overline{1,q}, \\ z_i^-, & i = \overline{q+1,n}. \end{cases} \qquad (21)$$

Значения управляющих воздействий должны удовлетворять ограничениям (2,*b*), которые представим в матричном виде:

$$U^- \le I_u\overline{U}(k) \le U^+ \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} -I_u \\ I_u \end{bmatrix}\cdot\overline{U}(k) \le \begin{bmatrix} -U^- \\ U^+ \end{bmatrix}.$$

Аналогично прогнозируемые состояния должны удовлетворять ограничениям (14), которые с учетом (16), (19) будут иметь вид:

$$(I_l - \overline{B}I_u)\overline{U}(k) \le -\left(Z^- - \overline{A}z(k) - \overline{E}D(k)\right),$$

$$(\overline{B}I_u - I_r)\overline{U}(k) \le Z^+ - \overline{A}z(k) - \overline{E}D(k)$$

или $$\begin{bmatrix} I_l - \overline{B}I_u \\ \overline{B}I_u - I_r \end{bmatrix}\cdot\overline{U}(k) \le \begin{bmatrix} -\left(Z^- - \overline{A}z(k) - \overline{E}D(k)\right) \\ Z^+ - \overline{A}z(k) - \overline{E}D(k) \end{bmatrix}.$$

В результате задача синтеза базовой *MPC*-стратегии управления запасами для сети поставок с *мягкими* ограничениями может быть сформулирована как *QP*-задача:

$$\min_{\overline{U}(k)} \tilde{J}(k) = H_1\overline{U}(k) + \frac{1}{2}\overline{U}(k)^{\mathrm{T}} H_2 \overline{U}(k), \quad (22)$$

при ограничениях: $\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \cdot \overline{U}(k) \le \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$,

где

$$M_1 = \begin{bmatrix} -I_u \\ I_u \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} I_l - \overline{B}I_u \\ \overline{B}I_u - I_r \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} -U^- \\ U^+ \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -\left(Z^- - \overline{A}z(k) - \overline{E}D(k)\right) \\ Z^+ - \overline{A}z(k) - \overline{E}D(k) \end{bmatrix}.$$

Поскольку базовая *MPC*-стратегия управления не гарантирует устойчивость замкнутой системы, то возникает необходимость синтеза стабилизирующего управления с учетом ограничений.

Синтез стабилизирующей *MPC*-стратегии с помощью *LMI*

Переформулируем базовую оптимизационную задачу таким образом, чтобы полученное решение гарантировало устойчивость замкнутой системы. Запишем критерий качества применительно к расширенной модели (5) в случае бесконечного горизонта:

$$J_\infty(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^T R_\xi \left(\xi(k)-\xi^*\right) + u(k)^T R_u u(k)\Big), \quad (23)$$

где ξ^* – вектор страхового уровня запасов; $R_\xi \succ 0$ – диагональная весовая матрица. Необходимо оценить верхнее граничное значение критерия (23) и найти управление, минимизирующее найденную оценку. Для этого предполагается наихудший сценарий реализации внешних возмущений, что приводит к рассмотрению минимаксной задачи:

$$\min_{u(k)\in U}\left(\max_{d(k)\in D} J_\infty(k)\right). \quad (24)$$

Для нахождения оценки используется процедура [6], основанная на построении квадратичной функции Ляпунова. Определим «смещенную» функцию Ляпунова, построенную на решениях расширенной модели сети (4):

$$V\left(\xi(k)-\xi^*\right) = \left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}} P\left(\xi(k)-\xi^*\right), P = P^{\mathrm{T}} \succ 0.$$

Множество уровня функции V представляет собой эллипсоид

$$E(\xi^*, P) = \left\{\xi \in \mathbf{R}^{n+\Lambda_M m} : \left(\xi-\xi^*\right)^T P^{-1}\left(\xi-\xi^*\right) \le 1\right\}. (25)$$

Пусть функция V $\forall i \ge 0$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$V\left(\xi(k+i+1)-\xi^*\right) - V\left(\xi(k+i)-\xi^*\right) \le - \\ -\Big(\left(\xi(k+i)-\xi^*\right)^T R_\xi \left(\xi(k+i)-\xi^*\right) + \\ + u(k+i)^T R_u u(k+i)\Big). \quad (26)$$

Просуммировав левые и правые части неравенств (26) по всем i, получим искомую оценку $\max_{d(k)\in D} J_\infty(k) \le V\left(\xi(k)-\xi^*\right)$. В результате задача (24) примет вид

$$\min_{u(k)\in U} V\left(\xi(k)-\xi^*\right). \quad (27)$$

Для синтеза закона управления с учетом влияния внешних возмущений на выход системы $x(k)$ воспользуемся методом инвариантных эллипсоидов [8]. Рассмотрим минимальный ограничивающий по выходу эллипсоид:

$$E(x^*, CPC^T) = \\ = \left\{x \in \mathbf{R}^n : \left(x-x^*\right)^T \left(CPC^T\right)^{-1}\left(x-x^*\right) \le 1\right\}, \quad (28)$$

определяемый из условия минимума следа $f(P) = \mathrm{tr}\left(CPC^T\right)$, координаты центра эллипсоида определяются вектором $x^* = C\xi^*$.

Найдем закон управления в виде статистической линейной обратной связи по сигналу рассогласования между наличным и страховым уровнями запаса вида

$$u(k) = K\left(\xi(k)-\xi^*\right), \quad k \ge 0, \quad (29)$$

стабилизирующий замкнутую систему и оптимально подавляющий внешние возмущения. Указанный закон управления определяется путем минимизации инвариантных эллипсоидов (28) замкнутой системы.

Функция $V\left(\xi(k)-\xi^*\right)$ представляет собой верхнюю границу критерия (23), если неравенство (26) выполняется $\forall i \geq 0$. Таким образом, $\forall k$ и $\forall d(k) \in D$ должно выполняться:

$$V\left(\xi(k+1)-\xi^*\right)-V\left(\xi(k)-\xi^*\right)+ \\ +\left(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^T R_\xi\left(\xi(k)-\xi^*\right)+u(k)^T R_u u(k)\right) \leq 0. \tag{30}$$

Согласно теореме об аппроксимации произвольных выпуклых множеств, не обладающих свойством симметрии относительно начала координат [9], множество D аппроксимируем эллипсоидом

$$\begin{gathered} E(d^*, q^2 P_d) = \\ =\left\{d \in \mathbf{R}^q : \left(d(k)-d^*\right)^{\mathrm{T}}\left(q^2 P_d\right)^{-1}\left(d(k)-d^*\right) \leq 1\right\}, \\ P_d = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{4}(d_1^+ - d_1^-)^2, \ldots, \frac{1}{4}(d_q^+ - d_q^-)^2\right), \\ d^* = \frac{1}{2}\left(d^- + d^+\right). \end{gathered} \tag{31}$$

Эллипсоид (31) представим в виде

$$\begin{gathered} E(d^*, q^2 P_d) = \\ =\left\{d \in \mathbf{R}^q : \left(d(k)-d^*\right)^T\left(q^2 P_d\right)^{-1}\left(d(k)-d^*\right) \leq 1\right\} = \\ =\left\{d \in \mathbf{R}^q : d(k)^T P_D d(k) \leq 1\right\}, \end{gathered} \tag{32}$$

где $P_D = \left(I - d^* d(k)^+\right)^{\mathrm{T}}\left(q^2 P_d\right)^{-1}\left(I - d^* d(k)^+\right)$, знак '$^+$' обозначает псевдообращение Мура–Пенроуза.

Расширенная модель системы (5) для управления (29) примет вид:

$$\begin{gathered} \xi(k+1) = A_f\left(\xi(k)-\xi^*\right)+\left(A-I\right)\xi^* + Gd(k), \\ A_f = A + BK, \quad x(k) = C\xi(k). \end{gathered} \tag{33}$$

Введем следующие обозначения

$$s(k) = \left[\left(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^T, \xi^{*T}, d(k)^T\right]^T \in \mathbf{R}^{2(n+A_M m)+q},$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} A_f^{\mathrm{T}} P A_f - P + R_\xi + K^T R_u K & A_f^T P\left(A-I\right) & A_f^T PG \\ \left(A-I\right)^T P A_f & \left(A-I\right)^T P\left(A-I\right) & \left(A-I\right)^T PG \\ G^T P A_f & G^T P\left(A-I\right) & G^T PG \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_D \end{pmatrix}, \; f_i(s) = s^T M_i s, \quad i = 0,1.$$

Тогда (30) с учетом (32) можно переписать в виде: $\quad f_0(s) \leq 0 \quad \forall s: \quad f_1(s) \leq 1$.

Согласно *S*-теореме с одним ограничением [10] последнее выражение эквивалентно линейному матричному неравенству $M_0 \leq \alpha M_1$ для некоторого $\alpha \geq 0$, или

$$\begin{pmatrix} A_f^T P A_f - P + R_\xi + K^T R_u K & A_f^T P\left(A-I\right) & A_f^T PG \\ \left(A-I\right)^T P A_f & \left(A-I\right)^T P\left(A-I\right) & \left(A-I\right)^T PG \\ G^T P A_f & G^T P\left(A-I\right) & G^T PG - \alpha P_D \end{pmatrix} \preceq 0. \tag{34}$$

Используя лемму Шура, неравенство (34) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} A_f^T P A_f - P + R_\xi + K^T R_u K & A_f^T P\left(A-I\right) \\ \left(A-I\right)^T P A_f & \left(A-I\right)^T P\left(A-I\right) \end{pmatrix} - \\ -\begin{pmatrix} A_f^T PG \\ \left(A-I\right)^T PG \end{pmatrix}\left(G^T PG - \alpha P_D\right)^{-1}\left(G^T P A_f \quad G^T P\left(A-I\right)\right) \preceq 0.$$

Применяя тождество Шермана-Моррисона-Вудбери [11], получим:

$$\begin{pmatrix} -P + R_\xi + K^T R_u K + A_f^T\left(P^{-1} - \frac{1}{\alpha} G P_D^{-1} G^T\right)^{-1} A_f & A_f^T\left(P^{-1} - \frac{1}{\alpha} G P_D^{-1} G^T\right)^{-1}\left(A-I\right) \\ \left(A-I\right)^T\left(P^{-1} - \frac{1}{\alpha} G P_D^{-1} G^T\right)^{-1} A_f & \left(A-I\right)^T\left(P^{-1} - \frac{1}{\alpha} G P_D^{-1} G^T\right)^{-1}\left(A-I\right) \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Согласно [12] введем новую переменную:

$$Y = KQ, \quad \text{где} \quad Q = \gamma P^{-1}. \tag{35}$$

Полученное неравенство умножим слева и справа на $\operatorname{diag}\left(Q, I\right)$ и представим матрицу неравенства в виде суммы:

$$\begin{pmatrix} -Q + Q R_\xi Q + Y^T R_u Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ +\begin{pmatrix} AQ + BY \\ A - I \end{pmatrix}^T\left(Q - \frac{1}{\alpha} G P_D^{-1} G^T\right)^{-1}\left(AQ + BY \quad A - I\right) \preceq 0.$$

Используя лемму Шура, последнее неравенство можно представить в следующем виде (матрица неравенства симметрическая):

$$\begin{pmatrix} Q & G & 0 & \left(AQ + BY\right)^T & Q R_\xi^{1/2} & Y^T R_u^{1/2} \\ * & \alpha P_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \left(A-I\right)^T & 0 & 0 \\ * & * & * & Q & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \gamma I & 0 \\ * & * & * & * & * & \gamma I \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Уравнение эллипсоида (25) с использованием леммы Шура представим в виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & \left(\xi(k)-\xi^*\right)^T \\ * & Q \end{pmatrix} \succeq 0. \tag{36}$$

Окончательно матрица K в законе управления (29) с учетом (35) будет иметь вид:

$$K = YQ^{-1}, \tag{37}$$

где матрицы Y, Q и скаляры α, γ находятся как решение следующей задачи:

$$\min_{\alpha,\gamma,Q,Y} \gamma \text{ при ограничениях:}$$

$$\begin{pmatrix} Q & G & 0 & \left(AQ+BY\right)^T & QR_\xi^{1/2} & Y^T R_u^{1/2} \\ * & \alpha P_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \left(A-I\right)^T & 0 & 0 \\ * & * & * & Q & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \gamma I & 0 \\ * & * & * & * & * & \gamma I \end{pmatrix} \succeq 0, \tag{38}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \left(\xi(k)-\xi^*\right)^T \\ * & Q \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Таким образом, задача синтеза регулятора, стабилизирующего замкнутую систему и подавляющего интервально ограниченные внешние воздействия, сведена к задаче минимизации линейной функции при ограничениях, представляющих собой *LMI*, которая при фиксированном α есть *SDP*-задачей.

Синтез стабилизирующей *MPC*-стратегии при наличии ограничений

По теореме о максимальном значении линейной функции в эллипсоиде [11] и в силу (29):

$$\max_{E(\xi^*,P)} u_j(k) = \max_{E(\xi^*,P)} K_j\left(\xi(k)-\xi^*\right) = \\ = \sqrt{K_j P^{-1} K_j^{\mathrm{T}}} = \sqrt{K_j Q K_j^{\mathrm{T}}}, \quad j=\overline{1,m}, \tag{39}$$

где K_j обозначает *j*-ю строку матрицы K.

Тогда ограничения (2,*b*) в силу (39) могут быть представлены так:

$$K_j Q K_j^{\mathrm{T}} \le \left(u_j^+\right)^2, \; j=\overline{1,m}. \tag{40}$$

Используя лемму Шура, неравенства (40) можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} \left(u_j^+\right)^2 & K_j \\ * & Q^{-1} \end{pmatrix} \succeq 0, \; j=\overline{1,m}. \tag{41}$$

Умножим неравенства (41) слева и справа на $\mathrm{diag}(I,Q)$ и в соответствии с (35) представим ограничения (2,*b*) в виде *LMI*:

$$\begin{pmatrix} \left(u_j^+\right)^2 & Y_j \\ * & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \; j=\overline{1,m}. \tag{42}$$

Рассмотрим ограничения (2,*a*). По аналогии с (39), (40) получим

$$\left(C_l P C_l^T\right)^{-1} \le \left(x_l^+\right)^2, \quad l=\overline{1,n}. \tag{43}$$

Используя лемму Шура, неравенства (43) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \left(x_l^+\right)^2 & C_l \\ * & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \; l=\overline{1,n}. \tag{44}$$

Окончательно задача синтеза управления распределенной сетью поставок, подавляющего интервально ограниченные внешние возмущения и гарантирующего устойчивость замкнутой системы при наличии ограничений на управляющие воздействия и выходы, примет вид:

$$\min_{\alpha,\gamma,Q,Y} \gamma \text{ при ограничениях:}$$

$$\begin{pmatrix} Q & G & 0 & \left(AQ+BY\right)^T & QR_\xi^{1/2} & Y^T R_u^{1/2} \\ * & \alpha P_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \left(A-I\right)^T & 0 & 0 \\ * & * & * & Q & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \gamma I & 0 \\ * & * & * & * & * & \gamma I \end{pmatrix} \succeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \left(\xi(k)-\xi^*\right)^T \\ * & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \tag{45}$$

$$\begin{pmatrix} \left(u_j^+\right)^2 & Y_j \\ * & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad j=\overline{1,m}, \qquad \begin{pmatrix} \left(x_l^+\right)^2 & C_l \\ * & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad l=\overline{1,n}.$$

Соответствующие задачи полуопределенного программирования и одномерной выпуклой оптимизации (45) решаются в режиме *on-line* численно для каждого текущего состояния, соответствующего дискретному моменту времени k.

Численный модельный пример

В качестве примера рассмотрим сеть поставок, изученных в работе [3]. Модель сети описывается графом $G=\left(V=\{1,2,3,4,5\}, E=\{(5,1), (5,2),(5,3),(4,3),(3,1),(3,2)\}\right)$. Сеть содержит $n=5$ узлов, разделенных на три уровня. Заданы значения времени выполнения заказа в узлах сети: $T_1=T_3=T_5=1$, $T_2=T_4=2$ и времени транспортировки ресурсов между узлами сети: $T_{5,1}=T_{5,2}=T_{5,3}=T_{4,3}=T_{3,1}=T_{3,2}=1$.

Представим управляемые потоки в виде гипердуг, добавив два потока, описывающих поставки сырья извне, как показано на рис. 1. Дуги d_1, d_2, изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки $T_{i,j}$ и количество единиц продукции π_{ij}, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках соответственно. Возле каждого узла указаны значения времени выполнения заказа T_i. Заданы максимальные вместительности хранилищ сети и объемы транспортировок $x^+ = [200\ 200\ 250\ 500\ 400]^T$, $u^+ = [30\ 25\ 110\ 330\ 300]^T$, а также граничные значения внешнего спроса $d^- = [10\ \ 5]^T$ и $d^+ = [30\ \ 25]^T$. Начальные условия равны: $x(0) = [160\ \ 140\ \ 100\ \ 400\ \ 250]^T$.

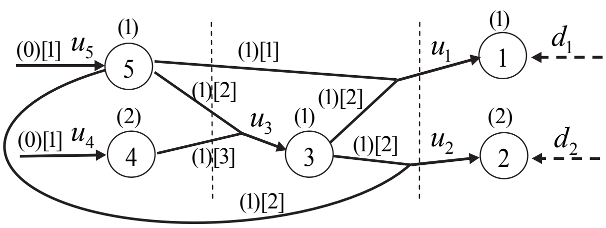


Рис. 1. Графическое представление модели сети поставок

В результате проверки установлено, что матрицы (A, B) являются управляемыми, условие (10) выполняется, следовательно допустимая стратегия управления для построенной модели сети поставок существует. Моделирование осуществлялось в течение 15 периодов. Значения вектора страховых запасов вычисляются на основании средних значений внешнего спроса:

$$\xi^* = \left[x^{*T}, ..., x^{*T}\right]^T, \quad x^* = \begin{cases} \frac{n}{2}(d_i^+ + d_i^-), \ i = \overline{1, q}, \\ (I - \Pi)^{-1} \overline{d}, \ i = \overline{q+1, n}, \end{cases}$$

$$\overline{d} = \begin{cases} \frac{1}{2}(d_j^+ + d_j^-), \ j = \overline{1, q}, \\ 0, \ j = \overline{q+1, n}. \end{cases}$$

В результате получим $x^* = [100\ 75\ 70\ 210\ 190]^T$. Весовые матрицы выбраны равными $R_\xi = \mathrm{diag}(0,03, ..., 0,03)$, $R_u = \mathrm{diag}(0,003, ..., 0,003)$, остальные – единичные, $N_P = N_C = \varLambda_M = 3$, $\alpha = 0,999$. На рис. 2 изображены полученный на последнем шаге инвариантный ограничивающий эллипсоид для узлов 1, 2 и 3, а также фазовая траектория при воздействии на систему скачкообразно меняющихся внешних возмущений. Значения внешнего спроса, а также управляющих воздействий, полученные с помощью базовой *MPC*-стратегии путем решения *QP*-задач (22) и стабилизирующей *MPC*-стратегии, полученной путем решения *SDP*-задач (45), для узлов 1, 2 и 3 представлены на рис. 3.

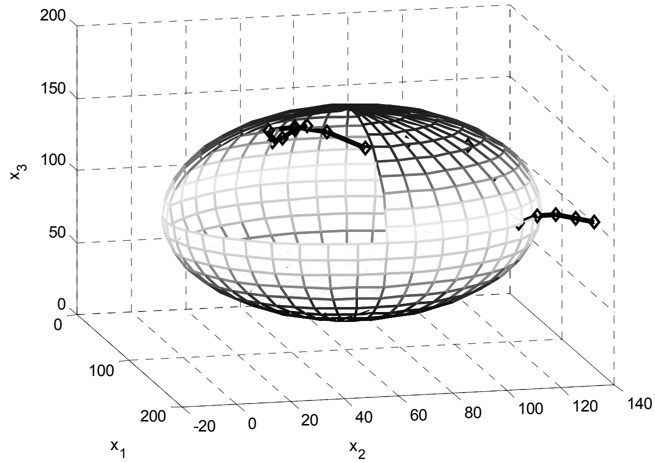
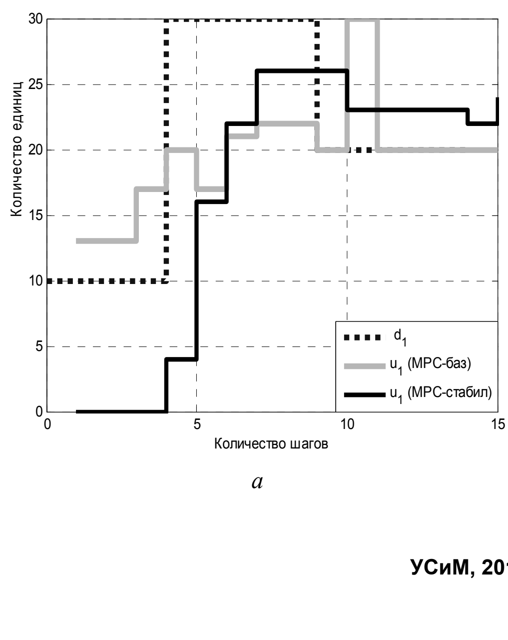
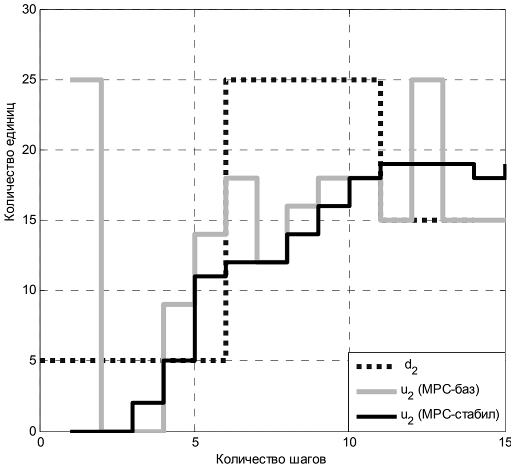


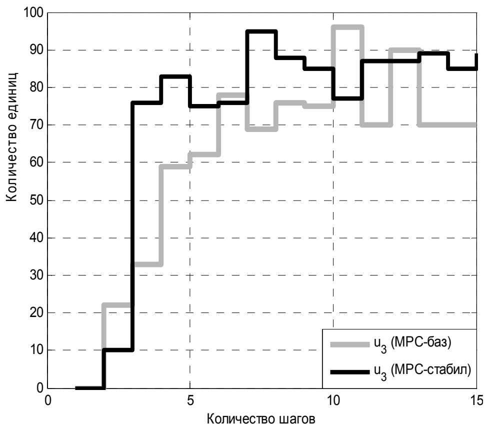
Рис. 2. Фазовая траектория и инвариантный эллипсоид, полученный на последнем шаге для узлов 1, 2 и 3



а



б



в

Рис. 3. Значения внешнего спроса и управляющих воздействий: *а* – узла 1; *б* – узла 2; *в* – узла 3

Заключение. Предложен подход к решению задачи синтеза прогнозирующего управления для подавления неопределенных интервально ограниченных внешних возмущений в распределенных сетях поставок. Применение концепции *мягких* ограничений позволяет гарантировать разрешимость задачи синтеза базовой *MPC*-стратегии, сведенной к задачам квадратичного программирования. Для обеспечения устойчивости замкнутой системы применена концепция инвариантных эллипсоидов, позволившая сформулировать задачу в терминах линейных матричных неравенств, а синтез управления свести к задачам полуопределенного программирования и одномерной выпуклой оптимизации.

1. *Лотоцкий В.А.*, *Мандель А.С.* Модели и методы управления запасами. – М.: Наука, 1991. – 189 с.
2. *Blanchini F.*, *Rinaldi F.*, *Ukovich W.* Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs // IEEE Trans. on robotics and automation. – 1997. – **13**. – P. 633–645.
3. *Hennet J.-C.* A bimodal scheme for multi-stage production and inventory control // Automatica. – 2003. – **39**. – P. 793–805.
4. *Bemporad A.*, *Morari M.* Robust model predictive control: A survey // Lecture Notes in Control and Information Sciences.– 1999. – **245**. – P. 207–226.
5. *Mayne D.*, *Seron M.*, *Rakovic S.* Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances // Automatica. – 2005. – **41**(2). – P. 219–224.
6. *Kothare M.V.*, *Balakrishnan V.*, *Morari M.* Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities // Ibid. – 1996. – **32**(10). – P. 1361–1379.
7. *Zheng A.*, *Morari M.* Stability of Model Predictive Control with Mixed Constraints // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1995. – **40**. – P. 1818–1823.
8. *Назин С.А.*, *Поляк Б.Т.*, *Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 3. – С. 106–125.
9. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988. – 320 с.
10. *Поляк Б.Т.*, *Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. – Там же, 2002. – 303 с.
11. *Голуб Дж.*, *Ван Лоан Ч.* Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
12. *Linear* Matrix Inequalities in System and Control Theory / S. Boyd, E. Ghaoui, E. Feron et al. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 192 p.

Поступила 29.06.2012
Тел. для справок: +38 067 775-3536 (Харьков)
E-mail: *yidorofeev@yandex.ru*

●