УДК 621.391:517.518:510.52

О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер

3*D*-коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та оператори кусково-сталої сплайн-інтерфлетації

Рассмотрены и исследованы кубатурные формулы вычисления 3*D*-коэффициентов Фурье с использованием операторов кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации на одном классе дифференцируемых функций. Доказано, что оценку погрешности кубатурных формул можно получить посредством соответствующих оценок погрешности квадратурных формул.

Cubature formulas of the calculation of 3D-Fourier's coefficients are presented by using piecewice operators of spline-interflatation in the case when information about function is set of flats on one class of differentiable functions. The error of the cubature formulas is evaluated by errors of quadratures formulas.

Запропоновано і досліджено кубатурні формули обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусковосталої сплайн-інтерфлетації на одному класі диференційовних функцій. Доведено, що оцінку похибки кубатурних формул можна отримати через відповідні оцінки похибки квадратурних формул.

Вступ. На даний час методи комп'ютерної томографії є найбільш ефективними методами дослідження внутрішньої структури тривимірного тіла без його руйнування. При розв'язанні задачі такого типу використовується метод, який узагальнює прямий метод Фур'є з двовимірного на тривимірний випадок. В цьому методі шукана функція від трьох змінних представляється у вигляді ряду Фур'є. Вибір методу при розв'язанні задачі наближеного обчислення коефіцієнтів цього ряду пояснюється видом задання початкових даних. У випадку, коли дані є слідами функції на площинах, для наближеного обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є будуються кубатурні формули з використанням інтерфлетації функцій [1].

В [2, 4] викладено загальний підхід до побудови операторів фінітного тривимірного дискретно-неперервного і дискретного перетворення Фур'є на основі методу Файлона, трилінійних сплайнів (лінійних за кожною змінною) та сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій у випадку, коли задано значення функції у вузлах. Випадок, коли дані є слідами функції на площинах, розглядається вперше. Отримано оцінки похибки кубатурних формул, побудованих з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерфлетації. Показано, що оцінку похибки кубатурної формули можна виразити відповідними оцінками похибки квадратури формул.

Постановка задачі

Побудувати кубатурні формули для обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерфлетації на класі дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що

$$\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right|\le M\,,\quad \left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right|\le M\,,$$

$\left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}$ у випадку, коли інформацію про функцію задано її слідами на площинах $x_k=k\Delta-\dfrac{\Delta}{2}$, $y_j=j\Delta-\dfrac{\Delta}{2}$, $z_s=s\Delta-\dfrac{\Delta}{2}$, $k,j,s=\overline{1,\ell}$, $\Delta=\dfrac{1}{\ell}$, та отримати оцінки похибки кубатурних формул. Довести, що оцінку похибки побудованих кубатурних формул можна отримати різними способами, зокрема, виразити через відповідні похибки квадратурних формул.

Оцінка похибки обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є. Нехай $p_k(x), p_j(y), p_s(z)$ – сплайни порядку $0, 1, 2, 3$ з властивостями $p_k(x_\alpha)=\delta_{\alpha k}$, $p_j(y_\beta)=\delta_{\beta j}$, $p_s(z_\gamma)=\delta_{\gamma s}$, $\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,\ell}$ і

$$O_1 f(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\ell} f(x_k,y,z)p_k(x)\,,$$

$$O_2 f(x,y,z)=\sum_{j=1}^{\ell} f(x,y_j,z)p_j(y)\,,$$

$$O_3 f(x,y,z)=\sum_{s=1}^{\ell} f\left(x,y,z_s\right)p_s\left(z\right),\ k,j,s\in\overline{1,\ell},$$

$$R_1\left(f;x,y,z\right)=f\left(x,y,z\right)-\sum_{k=1}^{\ell} f\left(x_k,y,z\right)p_k\left(x\right)=$$
$$=f\left(x,y,z\right)-O_1 f\left(x,y,z\right),$$

$$R_2\left(f;x,y,z\right)=f\left(x,y,z\right)-\sum_{j=1}^{\ell} f\left(x,y_j,z\right)p_j\left(y\right)=$$
$$=f\left(x,y,z\right)-O_2 f\left(x,y,z\right),$$

$$R_3\left(f;x,y,z\right)=f\left(x,y,z\right)-\sum_{s=1}^{\ell} f\left(x,y,z_s\right)p_s\left(z\right)=$$
$$=f\left(x,y,z\right)-O_3 f\left(x,y,z\right).$$

Оператор сплайн-інтерфлетант $Of\left(x,y,z\right)$ представляється через оператори $O_\mu f\left(x,y,z\right)$, $\mu=1,2,3$ наступним чином:

$$Of\left(x,y,z\right)=O_1 f\left(x,y,z\right)+O_2 f\left(x,y,z\right)+$$
$$+O_3 f\left(x,y,z\right)-O_1O_2 f\left(x,y,z\right)-O_2O_3 f\left(x,y,z\right)-$$
$$-O_1O_3 f\left(x,y,z\right)+O_1O_2O_3 f\left(x,y,z\right).$$

Лема 1. Для залишку

$$R\left(f\right)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\Big(f\left(x,y,z\right)-$$
$$-Of\left(x,y,z\right)\Big)\sin 2\pi mx dx\sin 2\pi ny dy\sin 2\pi pz dz$$

справедлива наступна рівність:

$$R(f)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y,z)\times\right.$$
$$\left.\times\sin 2\pi mx dx\,\sin 2\pi ny dy\,\sin 2\pi pz dz.\right.$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. Для залишку $R\left(f\right)$ справедлива наступна рівність:

$$R(f)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y,z)-\right.$$
$$\left.-Of\left(x,y,z\right)\right)\sin 2\pi mx dx\sin 2\pi ny dy\sin 2\pi pz dz=$$
$$=\tilde{R}_1\tilde{R}_2\tilde{R}_3 f\left(x,y,z\right).$$

Лему 2 доведено.

Кубатурна формула обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерфлетації. Далі як $p_k\left(x\right)$, $p_j\left(y\right)$, $p_s\left(z\right)$ розглянемо кусково-сталі базисні сплайни. Введемо позначення

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}1, x\in X_k\\ 0, x\notin X_k,\end{cases}\ k=\overline{1,\ell};\ h_{2j}(y)=\begin{cases}1, y\in Y_j,\\ 0, y\notin Y_j,\end{cases}\ j=\overline{1,\ell},$$

$$h_{3s}(y)=\begin{cases}1, z\in Z_s,\\ 0, z\notin Z_s,\end{cases}\ s=\overline{1,\ell},$$

$$X_k=\left[x_{k-1/2},x_{k+1/2}\right],\ Y_j=\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right],$$
$$Z_s=\left[z_{s-1/2},z_{s+1/2}\right],$$
$$x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\ y_j=j\Delta-\frac{\Delta}{2},\ k,j=\overline{1,\ell},\ \Delta=\frac{1}{\ell}.$$

Нехай $Of\left(x,y,z\right)$ – оператор кусково-сталої сплайн-інтерфлетації:

$$Of(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\ell} f(x_k,y,z)h_{1k}(x)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\ell} f(x,y_j,z)h_{2j}(y)+\sum_{j=1}^{\ell} f(x,y,z_s)h_{3s}(z)-$$
$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j,z)h_{1k}(x)h_{2j}(y)-$$
$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f(x_k,y,z_s)h_{1k}(x)h_{3s}(z)-$$
$$-\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f(x,y_j,z_s)h_{2j}(y)h_{3s}(z)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f(x_k,y_j,z_s)h_{1k}(x)h_{2j}(y)h_{3s}(z).$$

Лема 3. [1]. Для $Of\left(x,y,z\right)$ виконуються на-ступні властивості:

1. $\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^3}\right)=O\left(\Delta^3\right),$
$$\forall\left(x,y,z\right)\in G=[0,1]^3;$$
2. $Of(x_k,y,z)=f(x_k,y,z),\quad k=\overline{1,\ell};$
3. $Of(x,y_j,z)=f(x,y_j,z),\quad j=\overline{1,\ell};$
4. $Of(x,y,z_s)=f(x,y,z_s),\quad s=\overline{1,\ell}.$

Теорема. Для кубатурної формули $\Phi_1^3\left(m,n,p\right)$ обчислення $I_1^3\left(m,n,p\right)$ справедлива наступна оцінка

$$\rho\left(I_1^3(m,n,p),\Phi_1^3(m,n,p)\right)=\left|R(f)\right|\le\frac{\tilde{M}}{64}\frac{1}{\ell^3},$$

де $\left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le\tilde{M}$.

Доведення теореми можна здійснити на основі леми 2, використовуючи оцінки похибки квадратурних формул.

Дійсно, якщо $g(x)\in C^1[0,1]$, $\left|g'(x)\right|\le M$, $x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\ k=\overline{1,\ell},\ \Delta=\frac{1}{\ell}$, то для функції однієї змінної маємо наступні оцінки:

$$\left|\tilde{R}_1\right|=\left|\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left(g(x)-g(x_k)\right)\sin 2\pi mx dx\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|g(x)-g(x_k)\right|dx=\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|\int_{x_k}^{x}g'(\xi)d\xi\right|dx\le$$

$$\le M\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|x-x_k\right|dx=$$

$$=M\sum_{k=0}^{\ell-1}\left(-\frac{(x-x_k)^2}{2}\Bigg|_{x_{k-\frac12}}^{x_k}+\frac{(x-x_k)^2}{2}\Bigg|_{x_k}^{x_{k+\frac12}}\right)=$$

$$=M\ell\frac{\Delta^2}{4}=\frac{M\Delta}{4}.$$

Тоді, за лемою 2, маємо

$$\rho\left(I_1^3(m,n,p),\Phi_1^3(m,n,p)\right)\le$$

$$\le\left|\tilde{R}_1\tilde{R}_2\tilde{R}_3(f;x,y,z)\right|\le\tilde{M}\frac{\Delta^3}{4^3}=\frac{\tilde{M}}{64\ell^3}.$$

Теорему доведено.

Чисельний експеримент. Нехай

$$f(x,y,z)=\frac{1}{4}\left(\cos(2x+2y-2z)+\right.$$
$$+\cos(2x+2z-2y)+\cos(2z+2y-2x)+$$
$$\left.+\cos(2x+2y+2z)\right),$$

тоді

$$\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right|\le 2,\ \left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right|\le 2,$$

$$\left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right|\le 2,\ \left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le 8.$$

Якщо обчислювати інтеграл $I_1^3(2,3,3)$ за кубатурною формулою $\Phi_1^3(2,3,3)$, коли $\ell=19$, то

$$\left|R(f)\right|=\left|I_1^3(2,3,3)-\Phi_1^3(2,3,3)\right|=$$
$$=0{,}000667558357725–0{,}0006675583576745=$$
$$=5{,}1\cdot 10^{-14}.$$

Функцію $f(x,y,z)$ можна представити у вигляді $f(x,y,z)=\cos 2x\cos 2y\cos 2z$, тому якщо $g(u)=\cos 2u,\ u=x,y,z,$ то можна отримати наступні результати обчислень для

$$\tilde{R}_i(g,u,s)=\left|\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(g(u)-g(u_k)\right)\sin 2\pi su du\right|,$$

$i=1,2,3$

коли $\ell=19$

$$\tilde{R}_1(g,x,2)=0{,}000051056063201,$$
$$\tilde{R}_2(g,y,3)=0{,}000031522074555,$$
$$\tilde{R}_3(g,z,3)=0{,}000031522074555.$$

Отже,

$$\left|R(f)\right|=\left|I_1^3(2,3,3)-\Phi_1^3(2,3,3)\right|=$$
$$\tilde{R}_1(g,x,2)\tilde{R}_2(g,y,3)\tilde{R}_3(g,z,3)=$$
$$=0{,}000051056063201\cdot 0{,}000031522074555\times$$
$$\times 0{,}000031522074555=5{,}1\cdot 10^{-14}.$$

Так, чисельний експеримент підтверджує теоретичний результат.

Висновки. Досліджено кубатурні формули обчислення 3D-коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерфлетації на класі функцій, у яких

$$\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right|\le M,\ \left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right|\le M,$$
$$\left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right|\le M,\ \left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le\tilde{M}.$$

Інформацію про функцію задано слідами на системі взаємно перпендикулярних площин. Доведено, що оцінку похибки кубатурних формул можна виразити через відповідні оцінки похибки квадратурних формул.

1. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є // Радиоэлектроника и информатика (ХНУРЭ). – 2004. – № 4 (29). – С. 130–133.
3. *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Оператори фінітного тривимірного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі методу Файлона та трилінійних сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку. // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2005. – № 1, 2 (51, 52). – С. 19–23.
4. *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій // Вестн. Нац. техн. ун-та «ХПИ»: Сб. науч. тр. Тем. вып. «Автоматика и приборостроение». – 2005. – № 38. – С. 90–130.

Поступила 03.11.2011
Тел. для справок: +38 057 771-0545, 63-5923, 376-6026, +38 050 189-4738 (Харьков)
E-mail: *academ@kharkov.ua*, *olesya@email.com*
© О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер, 2013

О.Н. Литвин, О.П. Нечуйвитер

3*D*-коэффициенты Фурье на классе дифференцируемых функций и операторы кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации

Введение. На данный момент методы компьютерной томографии – наиболее эффективны при исследованиях внутренней структуры трехмерного тела без его разрушения. При решении задач такого типа используется метод, обобщающий прямой метод Фурье с двумерного на трехмерный случай. В этом методе искомая функция от трех переменных представляется в виде ряда Фурье. Выбор метода при решении задачи приближенного вычисления коэффициентов этого ряда объясняется видом задания начальных данных. В случае, когда данные – это следы функции на плоскостях, для приближенного вычисления 3*D*-коэффициентов Фурье строятся кубатурные формулы с использованием интерфлетации функций [1].

В [2–4] изложен общий подход к построению операторов финитного трехмерного дискретно-непрерывного и дискретного преобразования Фурье на основе метода Файлона, трехлинейных сплайнов (линейных по каждой переменной) и сплайн-интерфлетации на классе дифференцированных функций в случае, когда заданы значения функции в узлах. Случай, когда данные – это следы функции на плоскостях, рассматривается впервые. Получены оценки погрешности кубатурных формул, построенных с использованием операторов кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации. Показано, что оценку погрешности кубатурной формулы можно выразить соответствующими оценками погрешности квадратурных формул.

Постановка задачи

Построить кубатурные формулы для вычисления 3*D*-коэффициентов Фурье с использованием операторов кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации на классе действительных функций трех переменных, определенных на $G=\left[0,1\right]^3$ и таких, что

$$\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right|\le M\,,\quad \left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right|\le M\,,$$

$\left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}$ в случае, когда информация о функции задана ее следами на плоскостях $x_k=k\Delta-\dfrac{\Delta}{2}$, $y_j=j\Delta-\dfrac{\Delta}{2}$, $z_s=s\Delta-\dfrac{\Delta}{2}$, $k,j,s=\overline{1,\ell}$, $\Delta=\dfrac{1}{\ell}$, и получить оценки погрешности кубатурных формул. Доказать, что оценку погрешности построенных кубатурных формул можно получить разными способами, например, выразить через соответствующие погрешности квадратурных формул.

Оценка погрешности вычисления 3*D*-коэффициентов Фурье. Пусть $p_k\left(x\right), p_j\left(y\right), p_s\left(z\right)$ – сплайны порядка 0, 1, 2, 3 со свойствами со свойствами $p_k\left(x_\alpha\right)=$ $=\delta_{\alpha k},\ p_j\left(y_\beta\right)=\delta_{\beta j},\ p_s\left(z_\gamma\right)=\delta_{\gamma s},\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{1,\ell}$ и

$$O_1f(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\ell}f\left(x_k,y,z\right)p_k\left(x\right),$$

$$O_2f(x,y,z)=\sum_{j=1}^{\ell}f\left(x,y_j,z\right)p_j\left(y\right),$$

$$O_3f(x,y,z)=\sum_{s=1}^{\ell}f\left(x,y,z_s\right)p_s\left(z\right),\ k,j,s\in\overline{1,\ell},$$

$$R_1\left(f;x,y,z\right)=f\left(x,y,z\right)-\sum_{k=1}^{\ell}f\left(x_k,y,z\right)p_k\left(x\right)=$$
$$=f\left(x,y,z\right)-O_1f\left(x,y,z\right),$$

$$R_2\left(f;x,y,z\right)=f\left(x,y,z\right)-\sum_{j=1}^{\ell}f\left(x,y_j,z\right)p_j\left(y\right)=$$
$$=f\left(x,y,z\right)-O_2f\left(x,y,z\right),$$

$$R_3(f;x,y,z)=f(x,y,z)-\sum_{s=1}^{\ell} f(x,y,z_s)p_s(z)=$$
$$=f(x,y,z)-O_3 f(x,y,z).$$

Оператор сплайн-интерфлетант $Of(x,y,z)$ представляется через операторы $O_\mu f(x,y,z)$, $\mu=1,2,3$ следующим образом:

$$Of(x,y,z)=O_1 f(x,y,z)+O_2 f(x,y,z)+$$
$$+O_3 f(x,y,z)-O_1O_2 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z).$$

Лемма 1. Для остатка

$$R(f)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\big(f(x,y,z)-$$
$$-Of(x,y,z)\big)\sin 2\pi mxdx\sin 2\pi nydy\sin 2\pi pzdz$$

справедливо следующее равенство:

$$R(f)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 R_1R_2R_3 f(x,y,z)\sin 2\pi mxdx\sin 2\pi nydy\sin 2\pi pzdz.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для остатка $R(f)$ справедливо следующее равенство:

$$R(f)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\big(f(x,y,z)-Of(x,y,z)\big)\sin 2\pi mxdx\sin 2\pi nydy\sin 2\pi pzdz=$$
$$=\tilde R_1\tilde R_2\tilde R_3 f(x,y,z).$$

Лемма 2 доказана.

Кубатурная формула вычисления 3*D*-коэффициентов Фурье с использованием операторов кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации. Далее в качестве $p_k(x), p_j(y), p_s(z)$ рассмотрим кусочно-постоянные базисные сплайны. Введем обозначения

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}1, x\in X_k\\ 0, x\notin X_k,\end{cases} k=\overline{1,\ell};\; h_{2j}(y)=\begin{cases}1, y\in Y_j,\\ 0, y\notin Y_j,\end{cases} j=\overline{1,\ell},$$

$$h_{3s}(y)=\begin{cases}1, z\in Z_s,\\ 0, z\notin Z_s,\end{cases} s=\overline{1,\ell},$$

$$X_k=\left[x_{k-1/2},x_{k+1/2}\right],\; Y_j=\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right],$$
$$Z_s=\left[z_{s-1/2},z_{s+1/2}\right],$$
$$x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\; y_j=j\Delta-\frac{\Delta}{2},\; k,j=\overline{1,\ell},\; \Delta=\frac{1}{\ell}.$$

Пусть $Of(x,y,z)$ – оператор кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации:

$$Of(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\ell} f(x_k,y,z)h_{1k}(x)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\ell} f(x,y_j,z)h_{2j}(y)+\sum_{j=1}^{\ell} f(x,y,z_s)h_{3s}(z)-$$
$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j,z)h_{1k}(x)h_{2j}(y)-$$
$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f(x_k,y,z_s)h_{1k}(x)h_{3s}(z)-$$
$$-\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f(x,y_j,z_s)h_{2j}(y)h_{3s}(z)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f(x_k,y_j,z_s)h_{1k}(x)h_{2j}(y)h_{3s}(z).$$

Лемма 3. [1]. Для $Of(x,y,z)$ выполняются следующие свойства:

1. $\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^3}\right)=O\left(\Delta^3\right)$,
$\forall(x,y,z)\in G=[0,1]^3$;
2. $Of(x_k,y,z)=f(x_k,y,z),\quad k=\overline{1,\ell}$;
3. $Of(x,y_j,z)=f(x,y_j,z),\quad j=\overline{1,\ell}$;
4. $Of(x,y,z_s)=f(x,y,z_s),\quad s=\overline{1,\ell}$.

Теорема. Для кубатурной формулы $\Phi_1^3(m,n,p)$ вычисления $I_1^3(m,n,p)$ справедлива следующая оценка

$$\rho\left(I_1^3(m,n,p),\Phi_1^3(m,n,p)\right)=\left|R(f)\right|\le\frac{\tilde M}{64}\frac{1}{\ell^3},$$

где $\left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le\tilde M$.

Доказательство теоремы можно осуществить на основе леммы 2, используя оценки погрешности квадратурных формул.

Действительно, если $g(x)\in C^1[0,1]$, $\left|g'(x)\right|\le M$, $x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2}$, $k=\overline{1,\ell}$, $\Delta=\frac{1}{\ell}$, то для функции одной переменной имеем следующие оценки:

$$\left|\tilde R_1\right|=\left|\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\big(g(x)-g(x_k)\big)\sin 2\pi mxdx\right|\le$$
$$\le\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|g(x)-g(x_k)\right|dx=\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|\int_{x_k}^{x}g'(\xi)d\xi\right|dx\le$$
$$\le M\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|x-x_k\right|dx=$$
$$=M\sum_{k=0}^{\ell-1}\left(-\frac{(x-x_k)^2}{2}\Bigg|_{x_{k-\frac12}}^{x_k}+\frac{(x-x_k)^2}{2}\Bigg|_{x_k}^{x_{k+\frac12}}\right)=M\ell\frac{\Delta^2}{4}=\frac{M\Delta}{4}.$$

Тогда, по лемме 2, имеем

$$\rho\left(I_1^3(m,n,p),\Phi_1^3(m,n,p)\right)\le$$
$$\le\left|\tilde R_1\tilde R_2\tilde R_3(f;x,y,z)\right|\le\tilde M\frac{\Delta^3}{4^3}=\frac{\tilde M}{64\ell^3}.$$

Теорема доказана.

Численный эксперимент. Пусть

$$f(x,y,z)=\frac{1}{4}\Big(\cos(2x+2y-2z)+\cos(2x+2z-2y)+$$
$$+\cos(2z+2y-2x)+\cos(2x+2y+2z)\Big),$$

тогда

$$\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right|\le 2,\ \left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right|\le 2,$$
$$\left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right|\le 2,\ \left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le 8.$$

Если вычислять интеграл $I_1^3(2,3,3)$ по кубатурной формуле $\Phi_1^3(2,3,3)$ при $\ell=19$, то

$$\left|R(f)\right|=\left|I_1^3(2,3,3)-\Phi_1^3(2,3,3)\right|=$$
$$=0{,}000667558357725–0{,}0006675583576745=$$
$$=5{,}1\cdot 10^{-14}.$$

Функцию $f(x,y,z)$ можно представить в виде $f(x,y,z)=\cos 2x\cos 2y\cos 2z$, поэтому если $g(u)=\cos 2u$, $u=x,y,z,$ то можно получить следующие результаты вычислений для

$$\tilde{R}_i(g,u,s)=\left|\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\big(g(u)-g(u_k)\big)\sin 2\pi s u\,du\right|,\quad i=1,2,3$$

при $\ell=19$

$$\tilde{R}_1(g,x,2)=0{,}000051056063201,$$
$$\tilde{R}_2(g,y,3)=0{,}000031522074555,$$
$$\tilde{R}_3(g,z,3)=0{,}000031522074555.$$

Тогда

$$\left|R(f)\right|=\left|I_1^3(2,3,3)-\Phi_1^3(2,3,3)\right|=$$
$$=\tilde{R}_1(g,x,2)\,\tilde{R}_2(g,y,3)\,\tilde{R}_3(g,z,3)=$$
$$=0{,}000051056063201\cdot 0{,}000031522074555\times$$
$$\times 0{,}000031522074555=5{,}1\cdot 10^{-14}.$$

Таким образом, численный эксперимент подтверждает теоретический результат.

Заключение. Исследованы кубатурные формулы вычисления 3*D*-коэффициентов Фурье с использованием операторов кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации на классе функций, у которых

$$\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right|\le M,\ \left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right|\le M,$$
$$\left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right|\le M,\ \left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}.$$ Информация о функции задана следами на системе взаимно перпендикулярных плоскостей. Доказано, что оценку погрешности кубатурных формул можно выразить через соответствующие оценки погрешности квадратурных формул.

●