УДК 519.718

Б.Є. Рицар

Числова теоретико-множинна інтерпретація полінома Жеґалкіна

Рассмотрена численная теоретико-множественная интерпретация полинома Жегалкина и описан простой теоретико-множественный метод преобразования (совершенной) дизъюнктивной нормальной формы логической функции от *n* переменных в полином Жегалкина, и наоборот. Преимущества предложенного метода показаны на примерах.

A numeric set-theoretical interpretation of polynomial Zhegalkin is considered and a simple set-theoretical transformation method of (perfect) – disjunctive normal form of the logic function of *n* variables in polynomial Zhegalkin and vice versa is described. The advantages of suggested of the suggested method are illustrated by examples.

Розглянуто числову теоретико-множинну інтерпретацію полінома Жеґалкіна та описано простий теоретико-множинний метод перетворення (досконалої) диз'юнктивної нормальної форми логікової функції від *n* змінних у поліном Жеґалкіна, і навпаки. Переваги запропонованого методу показано на прикладах.

Вступ. У практиці логікового синтезу цифрових пристроїв (ЦП), окрім зображення логікових функцій у диз'юнктивній нормальній формі (ДНФ, *Sum-Of-Product form – SOP*), часто вживають поліномну нормальну форму (ПНФ, *Exclusive-OR Sum-Of-Product form – ESOP*), утворену двомісними операціями кон'юнкції (*AND*) і суми за mod2 (*EXCLUSIVE OR*) та константою **1**. Останні складають поліномний базис $\{\&, \oplus, \mathbf{1}\}$, що визначає структуру дворівневих схем логікових елементів *AND-EXOR*: на першому рівні – *AND*, на другому – *EXOR*. Аргументів на користь ЦП, побудованих з *AND-EXOR*, порівняно з традиційними *AND-OR*, чимало [1–5]: мають кращу тестувальну здатність, тобто їх легше тестувати та діагностувати, а для деяких спеціальних класів функцій, особливо симетричних, необхідних для синтезу різних арифметичних пристроїв, детекторів помилок, кодоперетворювачів та іншого, уможливлюють реалізацію ЦП з порівняно меншою кількістю логікових елементів.

Вираз функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у поліномній формі можна одержати безпосередньо з її досконалої ДНФ простою заміною символа операції диз'юнкції ($\vee$) на символ операції суми за mod2 ($\oplus$) на тій підставі, що мінтерми взаємно ортогональні. Утворена внаслідок такої заміни канонічна форма – це досконала ПНФ, яка тотожно дорівнює досконалій ДНФ *f*. З досконалої ПНФ функції *f* за *розкладом Ріда–Маллера* (*Reed–Muller expansion – RM-розклад*) можна утворити ПНФ з кон'юнктермів довільних рангів $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$, які матимуть змінні зі знаком або без знаку інверсії. Зокрема, якщо в кон'юнктермах досконалої ПНФ потрібно усунути знак інверсії з *i*-ї змінної, то замість $\bar{x}_i$ підставляється вираз $\bar{x}_i = x_i \oplus 1$, а якщо потрібно внести знак інверсії в *i*-ту змінну, то замість x_i підставляється вираз $x_i = \bar{x}_i \oplus 1$. У кожному разі до кон'юнктермів θ^r, утворених після розкриття дужок, застосовують правило спрощення: $\theta^r \oplus \theta^r = 0$ і $\theta^r \oplus \theta^r \oplus \theta^r = \theta^r$.

Вираз ПНФ *f*, у якому всі змінні є без знаку інверсії, називають *поліномом Жеґалкіна* (*Positive Polarity Reed–Muller expression – PPRM*-поліном).

Нехай, наприклад, досконала ДНФ функції $f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$. Щоб одержати поліном Жеґалкіна функції *f*, потрібно спочатку записати її досконалу ПНФ, а потім виконати *RM*-розклад за виразом $\bar{x}_i = x_i \oplus 1$:

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_3 =$$
$$= (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2)(1 \oplus x_3) \oplus (1 \oplus x_1) x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 (1 \oplus x_3) =$$
$$= 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus$$
$$\oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 .$$

Після усунення пар однакових кон'юнктермів одержимо поліном Жеґалкіна

$$f = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 .$$

Постановка задачі

У практиці логікового синтезу ЦП часто виникає потреба виконувати взаємні перетворення типу «(досконала) ДНФ $\Leftrightarrow$ поліном Жеґалкіна». Аналітичні методи перетворень, унаслідок їх специфіки, не мають прямого практичного застосування в комп'ютерних програмах автоматизованого проектування ЦП. З цією метою застосовують методи, переважно табличний на основі карт Карно [1, 6] та векторно-матричний [4, 5, 7] – досить громіздкі й складні. Зокрема, щоб зреалізувати на комп'ютері взаємні перетворення між (досконалою) ДНФ і поліномом Жеґалкіна, у першому випадку потрібно попередньо виконати спеціальні перетворення, у другому – одержати Кронекерів добуток над матрицями розмірності 2^n.

Як показано в [8, 9], для комп'ютерної реалізації різних операцій і процедур над числовими (двійковими і/або трійковими) кон'юнктермами довільних рангів $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ логікових функцій, які можуть виникати в процесі логікового синтезу ЦП, досить простим і зручним є теоретико-множинний підхід. У цій статті покажемо, що, крім диз'юнктивної форми зображення функцій, такий підхід можна успішно застосовувати й до поліномних форм, зокрема, до полінома Жеґалкіна.

Основна частина

Теоретико-множинне зображення логікової функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у поліномній формі (тобто ПНФ f), основою якої є логіковий базис $\{\&, \oplus, \mathbf{1}\}$, називатимемо *поліномною теоретико-множинною формою* (*ПТМФ*) функції f. У загальному випадку ПТМФ f – це множина

$$Y^{\oplus} = \{\theta_1^{r_1}, \theta_2^{r_2}, \ldots, \theta_k^{r_k}\}^{\oplus}, \qquad (1)$$

де $\theta_1^{r_1}, \theta_2^{r_2}, \ldots, \theta_k^{r_k}$ – взаємно ортогональні числові кон'юнктерми рангів $r_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$; верхній індекс $\oplus$ символізує поліномне зображення функції f, а знаки коми між кон'юнктермами множини $Y^{\oplus}$ відображають операцію суми за $\mathrm{mod}\,2$ у теоретико-множинному форматі.

ПТМФ $Y^{\oplus}$ (1) називатимемо *досконалою* ПТМФ $Y^{\oplus}$, якщо її елементами є числові кон'юнктерми n-рангу, тобто числові (двійкові чи десяткові) мінтерми $m_1, m_2, \ldots, m_k$ функції f:

$$Y^{\oplus} = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}^{\oplus}.$$

Отже, досконала ПТМФ $Y^{\oplus}$ функції f – це теоретико-множинний відповідник її досконалої ПНФ. Водночас досконала ПТМФ $Y^{\oplus}$ тотожно дорівнює досконалій ТМФ $Y^1 = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}^1$, яка є теоретико-множинним відповідником досконалої ДНФ f [8]. Отже, щоб від досконалої ТМФ Y^1 перейти до досконалої ПТМФ $Y^{\oplus}$ досить верхній індекс «1» замінити на символ $\oplus$, а в разі зворотного переходу – $\oplus$ на одиницю. Натомість, щоб з досконалої ДНФ f одержати досконалу ПТМФ $Y^{\oplus}$, потрібно вирази мінтермів замінити на їх числові відповідники – двійкові n-позиційні числа, символи диз'юнкції $\vee$ замінити на коми та скласти з цих чисел множину $Y^{\oplus}$; в разі зворотного переходу виконати заміни у зворотному порядку. Отже, якщо досконала ДНФ функції $f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$, то її досконала ТМФ $Y^1 = \{(000), (011), (110)\}^1 = \{0, 3, 6\}^1$ і досконала ПТМФ $Y^{\oplus} = \{(000), (011), (110)\}^{\oplus} = \{0, 3, 6\}^{\oplus}$.

Вироджену функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{1}$ ці форми відображає кон'юнктерм нульового рангу, а саме: у двійковому форматі $Y^1 = \{(--\cdots-)\}^1 = \mathbf{1}$ і $Y^{\oplus} = \{(--\cdots-)\}^{\oplus} = \mathbf{1}$, а в десятковому – $Y^1 = \{(0,1,\ldots,2^n-1)\}^1 = \mathbf{E}_2^n$ і $Y^{\oplus} = \{(0,1,\ldots,2^n-1)\}^{\oplus} = \mathbf{E}_2^n$. Відповідно $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{0}$ відображає досконала ТМФ $Y^1 = \varnothing$ і досконала ПТМФ $Y^{\oplus} = \varnothing$.

Теоретико-множинним методом взаємне перетворення ПНФ $f \Leftrightarrow$ ПТМФ $Y^{\oplus}$ виконується за правилом, аналогічним правилу взаємного перетворення ДНФ $f \Leftrightarrow$ ТМФ Y^1 [8]:

$$x_i \leftrightarrow (1)_i, \ \bar{x}_i \leftrightarrow (0)_i,$$

$$\text{відсутня } x_i \leftrightarrow (-)_i, \text{ знак } \oplus \leftrightarrow (,) . \qquad (2)$$

Наприклад, ПНФ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_3$, а її ПТМФ $Y^{\oplus} = \{(10-), (1-1), (--1)\}^{\oplus}$.

У разі необхідності одержати з ПНФ f досконалу ПНФ f, а звідти – досконалу ДНФ f, потрібно у кон'юнктерми ПНФ f, що мають ранг $r < n$, внести вираз $(x_i \oplus \bar{x}_i)$, де x_i – відсутня змінна. Тоді досконала ПНФ f одержується після розкриття дужок та усунення пар однакових мінтермів. На прикладі розглянутої вище функції така процедура виконується у такий спосіб:

$$f = x_1\bar{x}_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_3 = x_1\bar{x}_2(x_3 \oplus \bar{x}_3) \oplus$$
$$\oplus\, x_1(x_2 \oplus \bar{x}_2)x_3 \oplus (x_1 \oplus \bar{x}_1)(x_2 \oplus \bar{x}_2)x_3 =$$

$$= x_1\bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus$$
$$\oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 =$$
$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 =$$
$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3.$$

Числовим теоретико-множинним методом перехід «ПТМФ $Y^{\oplus} \Rightarrow$ досконала ПТМФ $Y^{\oplus} \Rightarrow$ досконала ТМФ Y^1» зреалізувати простіше, що ілюструється прикладом, де задля наочності застосовано десяткові числа:

$$Y^{\oplus} = \{(10-),(1-1),(--1)\}^{\oplus} = \{(4,5),(5,7),$$
$$(1,3,5,7)\}^{\oplus} = \{1,3,4,5\}^{\oplus} = \{1,3,4,5\}^1.$$

У статті розглянуто числову теоретико-множинну інтерпретацію полінома Жеґалкіна та метод взаємного перетворення з одного формату зображення функції f в інший.

У загальному випадку поліном Жеґалкіна функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – це логіковий вираз, який зображає суму за mod2 скінченної кількості кон'юнктермів рангів $r_i = 0, 1, 2, \ldots, n$, змінні яких не мають знаку інверсії:

$$f(x_n, x_{n-1},..., x_1) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus ...$$
$$... \oplus c_nx_n \oplus c_{12}x_1x_2 \oplus ... \oplus c_{13}x_1x_3 \oplus ...$$
$$... \oplus c_{1,2,...,k}x_1x_2\cdots x_k \oplus ...$$
$$... \oplus c_{1,2,...,n}x_1x_2\cdots x_n = \bigoplus_{I=0}^{2^n-1} c_I\theta_I, \qquad (3)$$

де $c_I \in \{0, 1\}$ – коефіцієнти кон'юнктермів θ_I, $I \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$; причому $\theta_0 = 1$.

Покажемо, що між значеннями коефіцієнтів c_I (3) і значеннями коефіцієнтів $f_I \in \{0, 1\}$, $I = 0,1,...,2^n - 1$, мінтермів m_I (на I-му наборі) досконалої ДНФ або ПНФ функції f (оскільки $\bigvee_{I=0}^{2^n-1} f_Im_I \equiv \bigoplus_{I=0}^{2^n-1} f_Im_I$) існує певна відповідність. На прикладі довільної функції від двох змінних поліном Жеґалкіна можна одержати так:

$$f(x_1, x_2) = f_0m_0 \vee f_1m_1 \vee f_2m_2 \vee f_3m_3 =$$
$$= f_0\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee f_1\bar{x}_1x_2 \vee f_2x_1\bar{x}_2 \vee f_3x_1x_2 =$$
$$= f_0\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus f_1\bar{x}_1x_2 \oplus f_2x_1\bar{x}_2 \oplus f_3x_1x_2 = f_0(x_1 \oplus 1)\times$$
$$\times(x_2 \oplus 1) \oplus f_1(x_1 \oplus 1)x_2 \oplus f_2x_1(x_2 \oplus 1) \oplus f_3x_1x_2 =$$
$$= f_0 \oplus (f_0 \oplus f_1)x_2 \oplus (f_0 \oplus f_2)x_1 \oplus$$
$$\oplus(f_0 \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus f_3)x_1x_2 \overset{Zh}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Zh}{\Rightarrow} c_0 \oplus c_1x_2 \oplus c_2x_1 \oplus c_3x_1x_2, \qquad (4)$$

де оператор $\underset{Zh}{\Rightarrow}$ символізує процедуру переходу з досконалої ДНФ/ПНФ до полінома Жеґалкіна, коефіцієнти c_i якого зв'язані з коефіцієнтами f_i $i = 0, 1, 2, 3$, співвідношеннями:

$$c_0 = f_0,\ c_1 = f_0 \oplus f_1, c_2 = f_0 \oplus f_2,$$
$$c_3 = f_0 \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus f_3. \qquad (5)$$

Співвідношення (5) між значеннями коефіцієнтів f_i досконалих ДНФ чи ПНФ та значеннями коефіцієнтів c_i, $i = 0, 1, 2, 3$, полінома Жеґалкіна функції $f(x_1, x_2)$ ілюструє табл. 1.

Т а б л и ц я 1

N	f_0	f_1	f_2	f_3	c_0	c_1	c_2	c_3	N	f_0	f_1	f_2	f_3	c_0	c_1	c_2	c_3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	9	1	0	0	1	1	1	1	0
2	0	0	1	0	0	0	1	1	10	1	0	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	0	0	1	0	11	1	0	1	1	1	1	0	1
4	0	1	0	0	0	1	0	1	12	1	1	0	0	1	0	1	0
5	0	1	0	1	0	1	0	0	13	1	1	0	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0	1	1	0	14	1	1	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	0	1	1	1	15	1	1	1	1	1	0	0	0

Тепер розглянемо зворотний перехід від полінома Жеґалкіна до досконалої ПНФ (ДНФ) для функції від двох змінних:

$$f(x_1, x_2) = c_0 \oplus c_1x_2 \oplus c_2x_1 \oplus c_3x_1x_2 =$$
$$= f_0 \oplus (f_0 \oplus f_1)x_2 \oplus (f_0 \oplus f_2)x_1 \oplus$$
$$\oplus (f_0 \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus f_3)x_1x_2 =$$
$$= f_0(1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2) \oplus f_1(x_2 \oplus x_1x_2) \oplus$$
$$\oplus f_2(x_1 \oplus x_1x_2) \oplus f_3x_1x_2 =$$
$$= f_0m_0 \oplus f_1m_1 \oplus f_2m_2 \oplus f_3m_3,$$

де
$$m_0 = 1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2$$
$$m_1 = x_2 \oplus x_1x_2 = \bar{x}_1x_2$$
$$m_2 = x_1 \oplus x_1x_2 = x_1\bar{x}_2$$
$$m_3 = x_1x_2.$$

Отже,

$$f(x_1, x_2) = f_0\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus f_1\bar{x}_1x_2 \oplus f_2x_1\bar{x}_2 \oplus f_3x_1x_2.$$

З одержаної досконалої ПНФ повернутися до полінома Жеґалкіна можна так:

$$f_0\bar{x}_2\bar{x}_1 \oplus f_1\bar{x}_2x_1 \oplus f_2x_2\bar{x}_1 \oplus f_3x_2x_1 =$$
$$= f_0m_0 \oplus f_1m_1 \oplus f_2m_2 \oplus f_3m_3 =$$
$$= c_0m_0 \oplus (c_0 \oplus c_1)m_1 \oplus (c_0 \oplus c_2)m_2 \oplus$$
$$\oplus (c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3)m_3 =$$

$$= c_0(m_0 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_3) \oplus$$
$$\oplus c_1(m_1 \oplus m_3) \oplus c_2(m_2 \oplus m_3) \oplus c_3 m_3 =$$
$$= c_0 p_0 \oplus c_1 p_1 \oplus c_2 p_2 \oplus c_3 p_3,$$

де

$$p_0 = m_0 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 x_2 \oplus x_1\bar{x}_2 \oplus x_1 x_2 = 1$$
$$p_1 = m_1 \oplus m_3 = \bar{x}_1 x_2 \oplus x_1 x_2 = x_2$$
$$p_2 = m_2 \oplus m_3 = x_1\bar{x}_2 \oplus x_1 x_2 = x_1$$
$$p_3 = m_3 = x_1 x_2.$$

Отже, $f(x_1, x_2) = c_0 \oplus c_1 x_2 \oplus c_2 x_1 \oplus c_3 x_1 x_2$, що відповідає (4).

Для функції $f(x_1, x_2, x_3)$ поліном Жеґалкіна матиме такий вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = c_0 \oplus c_1 x_3 \oplus c_2 x_2 \oplus c_3 x_2 x_3 \oplus$$
$$\oplus c_4 x_1 \oplus c_5 x_1 x_3 \oplus c_6 x_1 x_2 \oplus c_7 x_1 x_2 x_3, \qquad (6)$$

де
$$c_0 = f_0,$$
$$c_1 = f_0 \oplus f_1,$$
$$c_2 = f_0 \oplus f_2,$$
$$c_3 = f_0 \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus f_3,$$
$$c_4 = f_0 \oplus f_4,$$
$$c_5 = f_0 \oplus f_1 \oplus f_4 \oplus f_5,$$
$$c_6 = f_0 \oplus f_2 \oplus f_4 \oplus f_6,$$
$$c_7 = f_0 \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus f_3 \oplus f_4 \oplus f_5 \oplus f_6 \oplus f_7.$$

Зворотний перехід від полінома Жеґалкіна до досконалої ПНФ (ДНФ) через заміну $c_i \to f_i$ у цьому випадку також засвідчуватиме повну відповідність і взаємозамінність коефіцієнтів f_i і c_i.

Щоб довести справедливість твердження про взаємозамінність коефіцієнтів f_i і c_i для довільної функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, упорядкуємо між ними співвідношення у вигляді матричних рівнянь для $n = 1, 2$.

Зокрема, якщо для $f(x)$ маємо

$$f_0 = c_0, \; f_1 = c_0 \oplus c_1,$$

то в матричному зображенні цю систему можна записати у вигляді рівняння або в більш компактній формі:

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} \text{ або } F^1 = A_1 C^1. \qquad (7)$$

Справді, взаємозамінність коефіцієнтів $f_i \leftrightarrow c_i$ матиме місце, оскільки у поліномному форматі добуток матриці A_1 самої на себе, який позначимо як $A_1^2 = A_1 A_1$, дорівнює одиничній матриці E_2 другого порядку:

$$A_1^2 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1 \oplus 0\cdot1 & 1\cdot0 \oplus 0\cdot1 \\ 1\cdot1 \oplus 1\cdot1 & 1\cdot0 \oplus 1\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2.$$

Тоді, перемноживши ліву і праву частини рівності (7) на A_1, одержимо $C^1 = A_1 F^1$.

Для $n = 2$, беручи за основу вираз (5), одержимо (пунктирними лініями виділено блоки для $n = 1$):

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix} C^2 \text{ або}$$

$$F^2 = A_2 C^2, \qquad (8)$$

де $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ – нульова матриця другого порядку.

За аналогічною процедурою одержимо

$$A_2^2 \equiv \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} A_1^2 \oplus \mathbf{0}\cdot A_1 & A_1\cdot\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\cdot A_1 \\ A_1^2 \oplus A_1^2 & A_1\cdot\mathbf{0} \oplus A_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_2^2 \end{bmatrix} = E_4,$$

де $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – одинична матриця порядку 2^2. Отже, на підставі цього та (8) для $n = 2$ справедливо записати рівність $C^2 = A_2 F^2$.

Для доведення справедливості твердження про взаємозамінність коефіцієнтів f_i і c_i для довільного n застосуємо метод математичної індукції.

Для $n = 1, 2$, як бачимо, це твердження справджується.

Нехай для $n-1$ справедлива рівність $A_{n-1}^2 = E_{2^{n-1}}$. Тоді $C^{n-1} = A_{n-1} F^{n-1}$, де $A_{n-1} = \begin{bmatrix} A_{n-2} & \mathbf{0} \\ A_{n-2} & A_{n-2} \end{bmatrix}$.

Оскільки для n

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_{2^n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ A_{n-1} & A_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{2^n-1} \end{bmatrix} \text{ або } F^n = A_n C^n, \quad (9)$$

а $$A_n^2 = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ A_{n-1} & A_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ A_{n-1} & A_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{n-1}^2 \oplus \mathbf{0} \cdot A_{n-1} & A_{n-1} \cdot \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \cdot A_{n-1} \\ A_{n-1}^2 \oplus A_{n-1}^2 & A_{n-1} \cdot \mathbf{0} \oplus A_{n-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{2^{n-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{2^{n-1}} \end{bmatrix} = E_{2^n},$$

тобто $A_n^2 = E_{2^n}$, то на підставі цього та (9) справедливо записати рівність

$$C^n = A_n F^n. \quad (10)$$

Взаємозамінність коефіцієнтів f_i і c_i (10) дає підставу твердити про взаємозамінність мінтермів досконалих форм (ПНФ, ДНФ, ТМФ) та кон’юнктермів полінома Жеґалкіна, яку можна використати для числової теоретико-множинної інтерпретації полінома Жеґалкіна.

Поліном Жеґалкіна функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ у теоретико-множинній формі зображення називатимемо *теоретико-множинною формою полінома Жеґалкіна* – ТМФЖ $Y^{\oplus}$. Зазначимо, що на відміну від трійкових кон’юнктермів ПТМФ $Y^{\oplus}$ кон’юнктерми ТМФЖ $Y^{\oplus}$ матимуть значення позицій $\sigma \in \{1, -\}$. При цьому, ТМФЖ $Y^{\oplus}$ виродженної функції $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathbf{1}$ не відрізняється від досконалої ПТМФ $Y^{\oplus}$: у двійковому форматі маємо $Y^{\oplus} = \{(0,1,...,2^n-1)\}^{\oplus} = \mathbf{E}_2^n$, у десятковому форматі – $Y^{\oplus} = \{(--\dots-)\}^{\oplus} = \mathbf{1}$. Це легко показати, якщо кон’юнктерми полінома Жеґалкіна замінити на їх числові відповідники за правилом (2) та усунути в утвореній множині пари однакових чисел. Отже, якщо в (4) $f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = 1$, то $f(x_1, x_2) = \mathbf{1}$. Тоді у двійковому форматі матимемо

$$x_1x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus x_1x_2 \oplus x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 \overset{Zh}{\Rightarrow}$$

$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \{(11), (-1), (1-), (--), (11),$$

$$(-1), (11), (1-), (11)\}^{\oplus} = \{(--)\}^{\oplus},$$

відповідно у десятковому форматі –

$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \{(3), (1,3), (2,3), (0,1,2,3), (3),$$

$$(1,3), (3), (2,3), (3)\}^{\oplus} = \{(0,1,2,3)\}^{\oplus},$$

де $\overset{Zh}{\Rightarrow}$ – оператор переходу до ТМФЖ $Y^{\oplus}$ функції f.

Якщо $f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = 0$, то $f(x_1, x_2) = \mathbf{0}$, а оскільки $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, то ТМФЖ $Y^{\oplus} = \varnothing$.

Числову теоретико-множинну інтерпретацію полінома Жеґалкіна (для невироджених випадків) розглянемо на прикладі функції $f(x_1, x_2)$. Відповідність між коефіцієнтами f_i і c_i проілюструємо на картах Карно (рис. 1), де *а* і *б* – карти для f_i і їх мінтермів m_i ДНФ/ПНФ, а *в* і *г* – карти для c_i і їх кон’юнктермів полінома Жеґалкіна.

$$\underset{а}{\begin{array}{|c|c|} \hline f_0 & f_1 \\ \hline f_2 & f_3 \\ \hline \end{array}} \Rightarrow \underset{б}{\begin{array}{|c|c|} \hline \bar{x}_1\bar{x}_2 & \bar{x}_1 x_2 \\ \hline x_1\bar{x}_2 & x_1x_2 \\ \hline \end{array}} \quad \overset{Zh}{\Rightarrow} \quad \underset{в}{\begin{array}{|c|c|} \hline c_0 & c_1 \\ \hline c_2 & c_3 \\ \hline \end{array}} \Rightarrow \underset{г}{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & x_2 \\ \hline x_1 & x_1x_2 \\ \hline \end{array}}$$

Рис. 1

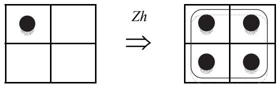
Карти *а* і *б* та *в* і *г* взаємно зв'язані відповідністю клітинок. Їх об'єднаємо попарно та утворимо числові карти (рис. 2), що відображають відповідність $f_i \overset{Zh}{\Rightarrow} c_i$: ліворуч – для двійкових індексів (00), (01), (10), (11) коефіцієнтів f_i, праворуч – для десяткових індексів (0), (1), (2), (3) коефіцієнтів c_i.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 00 & 01 \\ \hline 10 & 11 \\ \hline \end{array} \quad \overset{Zh}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 2

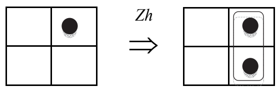
Відповідність ТМФ (ПТМФ) $\overset{Zh}{\Rightarrow}$ ТМФЖ визначатимемо так. На числових картах (див. рис. 2) чорним кружечком (●) виділемо клітинки, номери яких відповідають значенням індексів коефіцієнтів $f_i = 1$ і $c_i = 1$. З табл. 1 для заданих $f_i \in \{0, 1\}$ визначимо значення c_i, записуючи відповідний вираз мінтерма ДНФ і полінома Жеґалкіна. Зчитувані з карти коефіцієнтів c_i числа (з контурів – множини чисел) – це шукані числові кон’юнктерми ТМФЖ $Y^{\oplus}$ функції $f(x_1, x_2)$.

Нехай $f_0 = 1$, $f_1 = f_2 = f_3 = 0$; це мінтерм $m_0 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \Rightarrow \{(00)\}^1$.

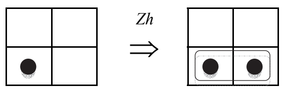


Тоді $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 1$, що відповідає поліному $\overset{Zh}{\Rightarrow} 1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2$.

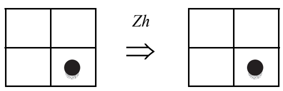
Відповідно ТМФЖ $Y^{\oplus} = \{(0,1,2,3)\}^{\oplus} = \{(--)\}^{\oplus}$.



$$f_1 = 1,\ f_0 = f_2 = f_3 = 0;\ m_1 = \bar{x}_1 x_2 \Rightarrow \{(01)\}^1;$$
$$c_1 = c_3 = 1,\ c_0 = c_2 = 0, \text{ тобто } \overset{Zh}{\Rightarrow} x_2 \oplus x_1 x_2;$$
$$Y^{\oplus} = \{(1,3)\}^{\oplus} = \{(-1)\}^{\oplus}.$$



$$f_2 = 1,\ f_0 = f_1 = f_3 = 0;\ m_2 = x_1 \bar{x}_2 \Rightarrow \{(10)\}^1;$$
$$c_2 = c_3 = 1,\ c_0 = c_1 = 0, \text{ тобто } \overset{Zh}{\Rightarrow} x_1 \oplus x_1 x_2;$$
$$Y^{\oplus} = \{(2,3)\}^{\oplus} = \{(1-)\}^{\oplus}.$$



$$f_3 = 1,\ f_0 = f_1 = f_2 = 0;\ m_3 = x_1 x_2 \Rightarrow \{(11)\}^1;$$
$$c_3 = 1,\ c_0 = c_1 = c_2 = 0, \text{ тобто } \overset{Zh}{\Rightarrow} x_1 x_2;$$
$$Y^{\oplus} = \{(3)\}^{\oplus} = \{(11)\}^{\oplus}.$$

У табл. 2 відображено для $f(x_1, x_2)$ відповідність між диз'юнктивним і поліномним поданнями як в аналітичному, так і в теоретико-множинному форматах. У стовпці *маска* розміщено маски літералів ($l \in \{\bar{x}, x\}$ – для аналітичного формату, $l \in \{0,1\}$ – для числового формату), які формують кон'юнктерми і їх ранги r для певних ДНФ/ПНФ і ТМФ/ПТМФ, а саме: маска $\{ll\}$ формує кон'юнктерми другого рангу; $\{l-\}$ і $\{-l\}$ – першого рангу; $\{--\}$ – нульового рангу.

У стовпцях *Аналітичний формат* містяться вирази кон'юнктермів ДНФ/ПНФ і полінома Жеґалкіна, а у стовпцях *Теоретико-множинний формат* – їх двійкові (або трійкові) та десяткові відповідники для ТМФ/ПТМФ і ТМФЖ.

Т а б л и ц я 2

Маска	Аналітичний формат		Теоретико-множинний формат			
	ДНФ/ПНФ	Поліном Ж.	ТМФ/ПТМФ		ТМФЖ	
$\{ll\}$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$1\oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2$	(00)	(0)	(– –)	(0,1,2,3)
	$\bar{x}_1 x_2$	$x_2 \oplus x_1x_2$	(01)	(1)	(–1)	(1,3)
	$x_1\bar{x}_2$	$x_1 \oplus x_1x_2$	(10)	(2)	(1–)	(2,3)
	x_1x_2	x_1x_2	(11)	(3)	(11)	(3)
$\{l-\}$	$\bar{x}_1$	$1\oplus x_1$	(0–)	(0,1)	(– –), (–1)	(0,2)
	x_1	x_1	(1–)	(2,3)	(1–), (11)	(2)
$\{-l\}$	$\bar{x}_2$	$1\oplus x_2$	(–0)	(0,2)	(– –), (1–)	(0,1)
	x_2	x_2	(–1)	(1,3)	(–1), (11)	(1)
$\{--\}$	**1**	1	(– –)	(0,1,2,3)	(– –), (–1), (1–), (11)	(0)

Табл. 3 ілюструє аналогічну відповідність для $f(x_1, x_2, x_3)$, де маски літералів формують кон'юнктерми різних рангів r так:

$$\{lll\} - r = 3;\quad \{ll-\}, \{l-l\}, \{-ll\} - r = 2;$$
$$\{l--\}, \{-l-\}, \{--l\} - r = 1;$$
$$\{---\} - r = 0.$$

Взаємно однозначна відповідність між розглянутими формами, яка відображена у табл. 2 і 3, зберігатиметься для довільної функції від n змінних.

У табл. 2 і 3 подвійною лінією відокремлено множини елементів досконалих форм обох форматів для масок $\{ll\}$ і $\{lll\}$. Так зазначено, що елементи табл. 2 і 3 у стовпцях ДНФ/ПНФ і ТМФ/ПТМФ для решти масок утворено операцією склеювання (у загальному випадку для ДНФ – це вираз $\theta^{r-1}x_i \vee \theta^{r-1}\bar{x}_i = \theta^{r-1}$, де $\theta^{r-1}x_i = \theta_1^r$ і $\theta^{r-1}\bar{x}_i = \theta_2^r$ – сусідні кон'юнктерми r-рангу). Поліноми Жеґалкіна для таких масок утворюватимуться операцією суми за $\mathrm{mod}\,2$ та процедурою усунення пар однакових кон'юнктермів. Наприклад, у табл. 2 для маски $\{l-\} = \{0-\}$, якій відповідає вираз $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 = \bar{x}_1$, одержимо поліном Жеґалкіна $(1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2) \oplus (x_2 \oplus x_1x_2) = 1 \oplus x_1$.

Числовим теоретико-множинним методом перетворення типу «досконала ДНФ $\Rightarrow$ поліном Жеґалкіна» виконується за схемою:

$$\text{досконала ДНФ } f \Rightarrow \text{досконала ТМФ } Y^1 \overset{Zh}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \text{ТМФЖ } Y^{\oplus} \Rightarrow \text{поліном Жеґалкіна.}$$

Т а б л и ц я 3

Маска	Аналітичний формат		Теоретико-множинний формат			
	ДНФ/ ПНФ	Поліном Жеґалкіна	ТМФ/ПТМФ		ТМФЖ	
$\{lll\}$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$1\oplus x_3\oplus x_2\oplus x_2x_3\oplus x_1\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3$	(000)	(0)	(– – –)	(0,1,2,3,4,5,6,7)
	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3$	(001)	(1)	(– –1)	(1,3,5,7)
	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$x_2\oplus x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3$	(010)	(2)	(–1–)	(2,3,6,7)
	$\bar{x}_1x_2x_3$	$x_2x_3\oplus x_1x_2x_3$	(011)	(3)	(–11)	(3,7)
	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3$	(100)	(4)	(1– –)	(4,5,6,7)
	$x_1\bar{x}_2x_3$	$x_1x_3\oplus x_1x_2x_3$	(101)	(5)	(1–1)	(5,7)
	$x_1x_2\bar{x}_3$	$x_1x_2\oplus x_1x_2x_3$	(110)	(6)	(11–)	(6,7)
	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	(111)	(7)	(111)	(7)
$\{ll–\}$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$1\oplus x_2\oplus x_1\oplus x_1x_2$	(00–)	(0,1)	(– – –), (– –1)	(0,2,4,6)
	$\bar{x}_1x_2$	$x_2\oplus x_1x_2$	(01–)	(2,3)	(–1–), (–11)	(2,6)
	$x_1\bar{x}_2$	$x_1\oplus x_1x_2$	(10–)	(4,5)	(1– –), (1–1)	(4,6)
	x_1x_2	x_1x_2	(11–)	(6,7)	(11–), (111)	(6)
$\{l–l\}$	$\bar{x}_1\bar{x}_3$	$1\oplus x_3\oplus x_1\oplus x_1x_3$	(0–0)	(0,2)	(– – –), (– 1–)	(0,1,4,5)
	$\bar{x}_1x_3$	$x_3\oplus x_1x_3$	(0–1)	(1,3)	(– –1), (–11)	(1,5)
	$x_1\bar{x}_3$	$x_1\oplus x_1x_3$	(1–0)	(4,6)	(1– –), (11–)	(4,5)
	x_1x_3	x_1x_3	(1–1)	(5,7)	(1–1), (111)	(5)
$\{–ll\}$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	$1\oplus x_3\oplus x_2\oplus x_2x_3$	(–00)	(0,4)	(– – –), (1– –)	(0,1,2,3)
	$\bar{x}_2x_3$	$x_3\oplus x_2x_3$	(–01)	(1,5)	(– –1), (1–1)	(1,3)
	$x_2\bar{x}_3$	$x_2\oplus x_2x_3$	(–10)	(2,6)	(–1–), (11–)	(2,3)
	x_2x_3	x_2x_3	(–11)	(3,7)	(–11), (111)	(3)
$\{l– –\}$	$\bar{x}_1$	$1\oplus x_1$	(0– –)	(0,1,2,3)	(– – –), (– –1), (–1–), (–11)	(0,4)
	x_1	x_1	(1– –)	(4,5,6,7)	(1– –), (1–1), (11–), (111)	(4)
$\{–l–\}$	$\bar{x}_2$	$1\oplus x_2$	(–0–)	(0,1,4,5)	(– – –), (– –1), (1– –), (1–1)	(0,2)
	x_2	x_2	(–1–)	(2,3,6,7)	(–1–), (–11), (11–), (111)	(2)
$\{– –l\}$	$\bar{x}_3$	$1\oplus x_3$	(– –0)	(0,2,4,6)	(– – –), (–1–), (1– –), (11–)	(0,1)
	x_3	x_3	(– –1)	(1,3,5,7)	(– –1), (–11), (1–1), (111)	(1)
$\{– – –\}$	**1**	1	(– – –)	(0,1,2,3,4,5,6,7)	(– – –), (– –1), (–1–), (–11), (1– –), (1–1), (11–), (111)	(0)

Схема зворотного перетворення «поліном Жеґалкіна $\Rightarrow$ досконала ТМФ (ДНФ)» має такий вигляд:

$$\text{поліном Жеґалкіна} \Rightarrow \text{ТМФЖ } Y^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\text{досконала ТМФ } Y^{1} \Rightarrow \text{досконала ДНФ } f.$$

У розглянутих схемах взаємні перетворення «досконала ТМФ $Y^1 \Leftrightarrow$ ТМФЖ $Y^{\oplus}$» виконуються заміною значень i-х позицій їх кон'юнктермів за правилом, яке ґрунтується на правилі (2):

$$(0)_i \leftrightarrow (-)_i;\ (1)_i \leftrightarrow (1)_i. \qquad (11)$$

Над утвореною ТМФЖ $Y^{\oplus}$ далі виконується процедура спрощення, яка реалізується усуненням пар однакових чисел. Після цього, щоб одержати поліном Жеґалкіна, потрібно i-ті позиції двійкових кон'юнктермів спрощеної ТМФЖ $Y^{\oplus}$ замінити на літерали полінома за правилом, яке буде справедливе також для зворотного перетворення «поліном Жеґалкіна $\Rightarrow$ ТМФЖ $Y^{\oplus}$»:

$$(0)_i \leftrightarrow \text{відсутня } x_i;\ (1)_i \leftrightarrow x_i. \qquad (12)$$

Зазначимо, перехід ТМФЖ $Y^{\oplus} \Rightarrow$ досконала ТМФ Y^1 однозначний – двійкові кон'юнктерми спрощеної ТМФЖ $Y^{\oplus}$ переписуються без змін, оскільки, як зазначено раніше, ці форми тотожні.

Отже, за описаною раніше схемою перехід від досконалої ДНФ f до ТМФЖ $Y^{\oplus}$ для розглянутого прикладу (п'ятий зверху рядок табл. 2) виконуватиметься так:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1x_2 \Rightarrow \{(00),(01)\}^1 \overset{Zh}{\Rightarrow} \{(--),(-1)\}^{\oplus}$$
$$\text{або} \quad \overset{Zh}{\Rightarrow} \{(0,1,2,3),(1,3)\}^{\oplus} = \{(0,2)\}^{\oplus}.$$

Зокрема, для виродженої функції $f(x_1,x_2)=\mathbf{1}$ (останній рядок табл. 2) поліном Жеґалкіна дорівнює одиниці:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 x_2 \oplus x_1\bar{x}_2 \oplus x_1 x_2 = (1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2) \oplus$$
$$\oplus (x_2 \oplus x_1 x_2) \oplus (x_1 \oplus x_1 x_2) \oplus x_1 x_2 = 1.$$

У теоретико-множинному форматі – це числовий кон'юнктерм нульового рангу, тобто ТМФ $Y^1 = \{(--)\}^1$, якому відповідає ТМФЖ $Y^{\oplus}$:

$$Y^1 = \{00, 01, 10, 11\}^1 \overset{Zh}{\Rightarrow} \{(--), (-1), (1-), (11)\}^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(0,1,2,3), (1,3), (2,3), (3)\}^{\oplus} = \{(0)\}^{\oplus}.$$

Перетворення «ДНФ/ТМФ $\Rightarrow$ поліном Жеґалкіна» виконується за аналогічною схемою за умови, якщо кон'юнктерми ДНФ/ТМФ взаємно ортогональні. Останні можна одержати або процедурою ортогоналізації [5, 8] або перетворенням заданої ДНФ/ТМФ у досконалу форму. Ортогоналізацію кон'юнктермів, яка належить до складних багатоваріантних процедур, є сенс застосовувати тоді, коли кількість неортогональних елементів невелика. Натомість другий шлях значно простіший, якщо в досконалу форму перетворювати ТМФ Y^1 [8, 9]. Цей випадок відображено схемою:

$$\text{ДНФ } f \Rightarrow \text{ТМФ } Y^1 \Rightarrow \text{досконала ТМФ } Y^1 \overset{Zh}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \text{ТМФЖ } Y^{\oplus} \Rightarrow \text{поліном Жеґалкіна}.$$

Перетворення «поліном Жеґалкіна $\Rightarrow$ ДНФ f» виконується за зворотною схемою, яка на етапі переходу від досконалої ДНФ Y^1 до ТМФ Y^1 доповнюється процедурою мінімізації.

Запропонований числовий теоретико-множинний метод перетворення кон'юнктермів (досконалої) ДНФ чи ТМФ у поліном Жеґалкіна, і навпаки, покажемо на прикладах.

Приклад 1. Числовим теоретико-множинним методом перетворити досконалу ДНФ функції $f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$ у поліном Жеґалкіна, і навпаки.

Розв'язання. Перетворивши досконалу ДНФ f у досконалу ТМФ Y^1 та застосувавши правило (11), одержимо ТМФЖ $Y^{\oplus}$ заданої функції:

$$Y^1 = \{(000), (001), (100), (101), (111)\}^1 \overset{Zh}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \{(---), (--1), (1--), (1-1), (111)\}^{\oplus}.$$

Відтак, розписавши утворені кон'юнктерми ТМФЖ $Y^{\oplus}$ на множини десяткових чисел і спростивши одержану множину усуненням пар однакових чисел, запишемо за правилом (12) поліном Жеґалкіна:

$$= \{(0,1,2,3,4,5,6,7), (1,3,5,7),$$
$$(4,5,6,7), (5,7), (7)\}^{\oplus} = \{0,2,7\}^{\oplus} =$$
$$= \{(000), (010), (111)\}^{\oplus} \Rightarrow 1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 x_3.$$

Зворотне перетворення «поліном Жеґалкіна $\Rightarrow$ досконала ДНФ» виконується так:

$$1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \Rightarrow \{(000), (010), (111)\}^{\oplus} \Rightarrow \{(---),$$
$$(-1-), (111)\}^{\oplus} = \{(0,1,2,3,4,5,6,7), (2,3,6,7), (7)\}^{\oplus} =$$
$$= \{0,1,4,5,7\}^{\oplus} \Rightarrow \{(000), (001), (100), (101), (111)\}^1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Приклад 2. Числовим теоретико-множинним методом перетворити поліном Жеґалкіна функції $f(a,b,c,d) = a \oplus bc \oplus ad$ в еквівалентну ДНФ, і навпаки [4], с. 17.

Розв'язання.

$$a \oplus bc \oplus ad \Rightarrow \{(1000), (0110), (1001)\}^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(1---), (-11-), (1--1)\}^{\oplus} =$$
$$= \{(8,9,10,11,12,13,14,15), (6,7,14,15),$$
$$(9,11,13,15)\}^{\oplus} = \{6,7,8,10,12,15\}^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(0110), (0111), (1000), (1010), (1100), (1111)\}^1.$$

Одержану досконалу ТМФ Y^1 змінімізуємо, наприклад, методом розчеплення кон'юнктермів [10]:

$$Y^1 \overset{S}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} lll- \\ ll-l \\ l-ll \\ -lll \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{011-} & \underline{011-} & 100- & 101- & 110- & 111- \\ 01-0 & 01-1 & \underline{10-0} & \underline{10-0} & 11-0 & 11-1 \\ 0-10 & 0-11 & \underline{1-00} & 1-10 & \underline{1-00} & 1-11 \\ -110 & \underline{-111} & -000 & -010 & -100 & \underline{-111} \end{bmatrix} \overset{C}{\Rightarrow}$$
$$\overset{C}{\Rightarrow} \{(011-), (10-0), (1-00), (-111)\}^1.$$

Звідси, еквівалентна ДНФ заданої функції $f = \bar{a}bc \vee a\bar{b}\bar{d} \vee a\bar{c}\bar{d} \vee bcd$.

Зворотне перетворення «ДНФ $f \Rightarrow$ поліном Жеґалкіна» виконується так:

$$\bar{a}bc \vee a\bar{b}\bar{d} \vee a\bar{c}\bar{d} \vee bcd \Rightarrow \{(011-), (10-0),$$
$$(1-00), (-111)\}^1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(0110), (0111), (1000), (1010), (1100), (1111)\}^1 \overset{Zh}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \{(-11-), (-111), (1---), (1-1-), (11--), (1111)\}^{\oplus} \Rightarrow$$

$$=\{(6,7,14,15),(7,15),(8,9,10,11,12,13,14,15),$$
$$(10,11,14,15),(12,13,14,15),(15)\}^{\oplus}=\{6,8,9\}^{\oplus}=$$
$$=\{(0110),(1000),(1001)\}^{\oplus}\Rightarrow\{(-11-),$$
$$(1---),(1--1)\}^{\oplus}=a\oplus bc\oplus ad.$$

Приклад 3. Числовим теоретико-множинним методом перетворити ДНФ $f(x_1,x_2,x_3)=$ $=x_1\vee x_2\vee x_3$ у поліном Жеґалкіна, і навпаки [11], с. 33.

Розв’язання.

$$x_1\vee x_2\vee x_3\Rightarrow\{(1--),(-1-),(--1)\}^1=$$
$$=\{(4,5,6,7),(2,3,6,7),(1,3,5,7)\}^1=\{1,2,3,4,5,6,7\}^1=$$
$$=\{(001),(010),(011),(100),(101),(110),(111)\}^1\overset{Zh}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Zh}{\Rightarrow}\{(--1),(-1-),(-11),(1--),(1-1),(11-),(111)\}^{\oplus}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_3\oplus x_2\oplus x_2x_3\oplus x_1\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3.$$

З одержаного полінома Жеґалкіна задана ДНФ f утворюється так:

$$x_3\oplus x_2\oplus x_2x_3\oplus x_1\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{(--1),(-1-),(-11),(1--),(1-1),(11-),(111)\}^{\oplus}=$$
$$=\{(1,3,5,7),(2,3,6,7),(3,7),(4,5,6,7),$$
$$(5,7),(6,7),(7)\}^{\oplus}=\{1,2,3,4,5,6,7\}^{\oplus}=$$
$$=\{(001),(010),(011),(100),(101),(100),(111)\}^1\overset{S}{\Rightarrow}$$
$$\overset{S}{\Rightarrow}\begin{bmatrix} ll- \\ l-l \\ -ll \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 00- & \underline{01-} & \underline{01-} & \underline{10-} & \underline{10-} & \underline{11-} & \underline{11-} \\ \underline{0-1} & 0-0 & \underline{0-1} & \underline{1-0} & \underline{1-1} & \underline{1-0} & \underline{1-1} \\ \underline{-01} & \underline{-10} & \underline{-11} & -00 & \underline{-01} & \underline{-10} & \underline{-11} \end{bmatrix}\overset{c}{\Rightarrow}$$
$$\overset{C}{\Rightarrow}\begin{Bmatrix} ll- \\ l-l \end{Bmatrix}=\{(01-),(10-),(11-);(0-1),(1-0),(1-1)\}^1.$$

З одержаної множини покриття на наступному кроці розчеплення маємо:

$$(01-),(10-),(11-)\overset{S}{\Rightarrow}\begin{bmatrix} l-- \\ -l- \end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} 0-- & \underline{1--} & \underline{1--} \\ \underline{-1-} & -0- & \underline{-1-} \end{bmatrix}\overset{C}{\Rightarrow}(1--),(-1-),$$
$$(0-1),(1-0),(1-1)\overset{S}{\Rightarrow}\begin{bmatrix} l-- \\ --l \end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} 0-- & \underline{1--} & \underline{1--} \\ \underline{--1} & --0 & \underline{--1} \end{bmatrix}\overset{C}{\Rightarrow}(1--),(--1).$$

Звідси мінімальна ТМФ $Y^1=\{(1--),(-1-),$ $(--1)\}^1$. Отже, $f=x_1\vee x_2\vee x_3$.

Висновки. З розглянутого матеріалу можна зробити висновок про те, що запропонована числова теоретико-множинна інтерпретація полінома Жеґалкіна та оснований на цьому метод взаємного перетворення диз’юнктивного і поліномного форматів зображення логікових функцій від *n* змінних, зручно використовувати для безпосередньої реалізації на комп'ютері без будь-яких проміжних процедур або перетворень. Метод можна також застосовувати до системи логікових функцій від *n* змінних.

1. *Sasao T.* Switching Theory for Logic Synthesis. – Kluwer Acad. Publ., 1999. – 361 p.
2. *Sasao T.* Representation of logic functions using EXOR operations // IFIP WG.10.5 Workshop on Applications of the Reed-Muller Expansions in Circuit Design, Aug. 1995, Makuhari, Chiba, Japan. – P. 11–22.
3. *Sasao T.* Easily testable realizations for generalized Reed-Muller expressions // IEEE Trans. On Comp., June 1997. – **46**, N 6. – P. 709–716.
4. *Закревский А.Д.*, *Топоров Н.Р.* Полиномиальная реализация частичных булевых функций и систем. – М.: УРСС, 2003. – 200 с.
5. *Закревский А.Д.*, *Поттосин Ю.В.*, *Черемисинова Л.Д.* Логические основы проектирования дискретных устройств. – М.: Физматлит, 2007. – 592 с.
6. *Almaini A.E.A.*, *McKenzie L.* Tabular techniques for generating Kronecker expentions // IEE Proc. Comp. Digit. Tech., July 1996. – **143**, N 4. – P. 205–212.
7. *Astola J.T.*, *Stankovic R.S.* Fundamentals of Switching Theory and Logic Design. – Springer, 2006. – P. 47–87.
8. *Рицар Б.Є.* Теоретико-множинні оптимізаційні методи логікового синтезу комбінаційних мереж. Дис. … д. техн. наук. – Львів, 2004. – 348 с.
9. *Rytsar B.*, *Romanowski P.*, *Shvay A.* Set-theoretical Constructions of Boolean Functions and theirs Applications in Logic Synthesis // Fundamenta Informaticae. – 2010. – **99**, № 3. – P. 339–354.
10. *Рицар Б.Є.* Мінімізація бульових функцій методом розчеплення кон’юнктермів // УСиМ. – 1998. – № 3. – С. 14–22.
11. *Steinbach B.*, *Posthoff C.* Logic Functions and Equations: Examples and Exercises. – Springer Science + Business Media B.V. – 2009. – 33 p.

Поступила 05.10.2012

Тел. для справок: +38 0322 759-513 (Львов)
E-mail: *bohdanrytsar@gmail.com*

Б.Е. Рыцар

Числовая теоретико-множественная интерпретация полинома Жегалкина

Введение. В практике логического синтеза цифровых устройств (ЦУ), кроме представления логических функций в дизъюнктивной нормальной форме – ДНФ (*Sum-Of-Product form – SOP*), часто применяют полиномиальную нормальную форму – ПНФ (*Exclusive-OR Sum-Of-Product form – ESOP*), образованную двухместными операциями конъюнкции (*AND*) и суммы по mod2 (*EXCLUSIVE OR*) и константой **1**. Последние составляют полиномиальный базис $\{\&, \oplus, \mathbf{1}\}$, определяющий структуру двухуровневых схем логических элементов *AND-EXOR*: на первом уровне – *AND*, на втором – *EXOR*. Аргументов в пользу ЦУ, построенных из *AND-EXOR*, в сравнении с традиционными *AND-OR*, достаточно [1–5]: имеют лучшую тестируемую способность, т.е. их легче тестировать и диагностировать, а для некоторых специальных классов функций, особенно симметричных, необходимых для синтеза различных арифметических устройств, детекторов ошибок, кодопреобразователей и других, допускают реализацию ЦУ со сравнительно меньшим числом логических элементов.

Выражение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в полиномиальной форме можно непосредственнно получить из ее совершенной ДНФ f простой заменой символа операции дизъюнкции ($\vee$) на символ операции суммы по $\mathrm{mod}\,2$ ($\oplus$) на том основании, что минтермы функции f взаимно ортогональны. Образованная вследствие такой замены каноническая форма – это совершенная ПНФ f, тождественно равная совершенной ДНФ f. Из совершенной ПНФ f по *разложению Рида–Маллера* (*Reed–Muller expansion*) – *RM-разложению*, можно образовать ПНФ из конъюнктермов произвольных рангов $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$, которые будут иметь переменные со знаком или без знака инверсии. В частности, если в конъюнктермах совершенной ПНФ необходимо удалить знак инверсии из i-й переменной, то вместо $\bar{x}_i$ подставляется выражение $\bar{x}_i = x_i \oplus 1$, а если необходимо внести знак инверсии в i-ю переменную, то вместо x_i подставляется выражение $x_i = \bar{x}_i \oplus 1$. В каждом случае к конъюнктермам θ^r, образованным после раскрытия скобок, применяется правило упрощения: $\theta^r \oplus \theta^r = 0$ и $\theta^r \oplus \theta^r \oplus \theta^r = \theta^r$.

Выражение ПНФ f, в котором все переменные не имеют знака инверсии, называют *полиномом Жегалкина* (*Positive Polarity Reed–Muller expression – PPRM*-полином).

Пусть, например, совершенная ДНФ функции $f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$. Чтобы получить полином Жегалкина этой функции, необходимо при помощи выражения $\bar{x}_i = x_i \oplus 1$ выполнить *RM*-разложение:

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_3 =$$
$$= (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2)(1 \oplus x_3) \oplus (1 \oplus x_1) x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 (1 \oplus x_3) =$$
$$= 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus$$
$$\oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 .$$

После удаления пар одинаковых конъюнктермов получим полином Жегалкина

$$f = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 .$$

Постановка задачи

В практике логического синтеза ЦУ часто возникает необходимость взаимных преобразований типа «(совершенная) ДНФ $\Leftrightarrow$ ПНФ». Аналитические методы преобразования, в силу их специфики, не имеют прямого практического применения в компьютерных программах автоматизированного проектирования ЦУ. С этой целью используют методы, преимущественно табличный на основе карт Карно [1, 6] и векторно-матричный [4, 5, 7], довольно громоздкие и сложные. В частности, для реализации на компьютере взаимных преобразований между (совершенной) ДНФ и полиномом Жегалкина, в первом случае требуется выполнение предварительного специального преобразования, во втором – получение кронекерского произведения матриц размерности 2^n.

Как показано в [8, 9], для компьютерной реализации разных операций и процедур над числовыми (двоичными и/или троичными) конъюнктермами произвольных рангов $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ логических функций, которые могут возникать в процессе логического синтеза ЦУ, довольно прост и удобен теоретико-множественный подход. В данной статье покажем, что, кроме дизъюнктивной формы представления функций, такой подход можно успешно применять и к полиномиальным формам, в частности, к полиному Жегалкина.

Основная часть

Теоретико-множественное представление логической функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в полиномиальной форме (ПНФ f), основа которой – логический базис $\{\&, \oplus, \mathbf{1}\}$, будем называть *полиномиальной теоретико-множественной формой* (ПТМФ) функции f. В общем случае ПТМФ f – это множество

$$Y^{\oplus} = \{\theta_1^{r_1}, \theta_2^{r_2}, \ldots, \theta_k^{r_k}\}^{\oplus} , \qquad (1)$$

где $\theta_1^{r_1}, \theta_2^{r_2}, \ldots, \theta_k^{r_k}$ – взаимно ортогональные числовые конъюнктермы рангов $r_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$; верхний индекс $\oplus$ символизирует полиномиальное представление функции f, а запятые между конъюнктермами (1) представляют операцию суммы по $\mathrm{mod}\,2$ в теоретико-множественном формате.

ПТМФ $Y^{\oplus}$ (1) будем называть *совершенной ПТМФ* $Y^{\oplus}$, если ее элементы – числовые конъюнктермы n-ранга, т.е. числовые (двоичные либо десятичные) минтермы $m_1, m_2, \ldots, m_k$ функции f: $Y^{\oplus} = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}^{\oplus}$.

Следовательно, совершенная ПТМФ $Y^{\oplus}$ функции f – это теоретико-множественный представитель ее совершенной ПНФ. В то же время совершенная ПТМФ $Y^{\oplus}$ тождественно равна совершенной ТМФ $Y^1=\{m_1,m_2,\ldots,m_k\}^1$, которая есть теоретико-множественным представителем совершенной ДНФ f [8]. Таким образом, чтобы от совершенной ТМФ Y^1 перейти к совершенной ПТМФ $Y^{\oplus}$ достаточно верхний индекс 1 заменить на символ $\oplus$, а в случае обратного перехода – $\oplus$ на единицу. При этом, чтобы из совершенной ДНФ f получить совершенную ПТМФ $Y^{\oplus}$, необходимо выражения минтермов заменить на их числовое представление – двоичные n-разрядные числа, символы дизъюнкции $\vee$ заменить на запятые и сложить из этих чисел множество $Y^{\oplus}$, а в случае обратного перехода выполнить замены в обратном порядке. Следовательно, если совершенная ДНФ функции $f=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee$ $\vee x_1x_2\bar{x}_3$, то ее совершенная ТМФ $Y^1=\{(000),(011),$ $(110)\}^1=\{0,3,6\}^1$ и совершенная ПТМФ $Y^{\oplus}=\{(000),(011),$ $(110)\}^{\oplus}=\{0,3,6\}^{\oplus}$.

Вырожденную функцию $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\mathbf{1}$ эти формы представляет конъюнктерм нулевого ранга, а именно: в двоичном формате $Y^1=\{(--\cdots-)\}^1=\mathbf{1}$ и $Y^{\oplus}=\{(--\cdots-)\}^{\oplus}=$ $=\mathbf{1}$, а в десятичном – $Y^1=\{(0,1,\ldots,2^n-1)\}^1=\mathbf{E}_2^n$ и $Y^{\oplus}=$ $=\{(0,1,\ldots,2^n-1)\}^{\oplus}=\mathbf{E}_2^n$. Соответственно, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\mathbf{0}$ представляет совершенная ТМФ $Y^1=\varnothing$ и совершенная ПТМФ $Y^{\oplus}=\varnothing$.

Теоретико-множественным методом взаимное преобразование ПНФ $f \Leftrightarrow$ ПТМФ $Y^{\oplus}$ выполняется по правилу, аналогичному правилу взаимного преобразования ДНФ $f \Leftrightarrow$ ТМФ Y^1 [8]:

$$x_i \leftrightarrow (1)_i,\ \bar{x}_i \leftrightarrow (0)_i,\ \text{отсутствующая } x_i \leftrightarrow (-)_i,$$
$$\text{знак } \oplus \leftrightarrow (,). \qquad (2)$$

Например, ПНФ $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3\oplus x_3$, а ее ПТМФ $Y^{\oplus}=\{(10-),(1-1),(--1)\}^{\oplus}$.

В случае необходимости получить из ПНФ f совершенную ПНФ f, а оттуда – совершенную ДНФ f, необходимо в конъюнктермы ПНФ f, имеющие ранг $r<n$, внести выражение $(x_i\oplus\bar{x}_i)$, где x_i – отсутствующая переменная. Тогда совершенная ПНФ f получается после раскрытия скобок и удаления пар одинаковых минтермов. На примере рассмотренной функции такая процедура выполняется следующим образом:

$$\begin{gathered}
f=x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3\oplus x_3=x_1\bar{x}_2(x_3\oplus\bar{x}_3)\oplus\\
\oplus x_1(x_2\oplus\bar{x}_2)x_3\oplus(x_1\oplus\bar{x}_1)(x_2\oplus\bar{x}_2)x_3=\\
=x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2x_3\oplus\\
\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2x_3\oplus\bar{x}_1x_2x_3\oplus\bar{x}_1\bar{x}_2x_3=\\
=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\oplus x_1\bar{x}_2x_3\oplus\bar{x}_1x_2x_3\oplus\bar{x}_1\bar{x}_2x_3=\\
=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3.
\end{gathered}$$

Числовым теоретико-множественным методом переход «ПТМФ $Y^{\oplus}$ $\Rightarrow$ совершенная ПТМФ $Y^{\oplus}$ $\Rightarrow$ совершенная ТМФ Y^1» реализовать проще, что видим на примере (для наглядности применим десятичные числа):

$$Y^{\oplus}=\{(10-),(1-1),(--1)\}^{\oplus}=\{(4,5),(5,7),(1,3,5,7)\}^{\oplus}=\{1,3,4,5\}^{\oplus}.$$

В статье рассмотрена числовая теоретико-множественная интерпретация полинома Жегалкина и метод взаимного преобразования из одного формата представления функции f в другой.

В общем случае полином Жегалкина функции $f(x_n,$ $x_{n-1},\ldots,x_1)$, – это логическое выражение, представленное суммой по mod2 конечного числа конъюнктермов рангов $r\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, переменные которых не имеют знака инверсии:

$$\begin{gathered}
f(x_n,x_{n-1},\ldots,x_1)=c_0\oplus c_1x_1\oplus c_2x_2\oplus\ldots\\
\ldots\oplus c_nx_n\oplus c_{12}x_1x_2\oplus\ldots\oplus c_{13}x_1x_3\oplus\ldots\\
\ldots\oplus c_{1,2,\ldots,k}x_1x_2\cdots x_k\oplus\ldots\oplus c_{1,2,\ldots,n}x_1x_2\cdots x_n=\bigoplus_{I=0}^{2^n-1}c_I\theta_I, \qquad (3)
\end{gathered}$$

где $c_I\in\{0,1\}$ – коэффициенты конъюнктермов θ_I, $I=$ $=0,1,\ldots,2^n-1$; $\theta_0=1$.

Покажем, что между значениями коэффициентов c_I (3) и значениями коэффициентов $f_I\in\{0,1\}$, $I=0,1,\ldots,2^n-1$, минтермов m_I (на I-м наборе) совершенной ДНФ или ПНФ функции f (поскольку $\bigvee_{I=0}^{2^n-1}f_Im_I\equiv\bigoplus_{I=0}^{2^n-1}f_Im_I$) существует определенное соответствие. На примере произвольной функции от двух переменных полином Жегалкина можно получить следующим образом:

$$\begin{gathered}
f(x_1,x_2)=f_0m_0\vee f_1m_1\vee f_2m_2\vee f_3m_3=\\
=f_0\bar{x}_1\bar{x}_2\vee f_1\bar{x}_1x_2\vee f_2x_1\bar{x}_2\vee f_3x_1x_2=\\
=f_0\bar{x}_1\bar{x}_2\oplus f_1\bar{x}_1x_2\oplus f_2x_1\bar{x}_2\oplus f_3x_1x_2=f_0(x_1\oplus\\
\oplus1)(x_2\oplus1)\oplus f_1(x_1\oplus1)x_2\oplus f_2x_1(x_2\oplus1)\oplus f_3x_1x_2=\\
=f_0\oplus(f_0\oplus f_1)x_2\oplus(f_0\oplus f_2)x_1\oplus(f_0\oplus f_1\oplus f_2\oplus f_3)x_1x_2\\
\overset{Zh}{\Rightarrow}c_0\oplus c_1x_2\oplus c_2x_1\oplus c_3x_1x_2, \qquad (4)
\end{gathered}$$

где оператор $\overset{Zh}{\Rightarrow}$ символизирует процедуру перехода из совершенной ДНФ/ПНФ к полиному Жегалкина, коэффициенты c_i которого связаны с коэффициентами f_i, $i=0,1,2,3$ соотношениями

$$\begin{gathered}
c_0=f_0,\ c_1=f_0\oplus f_1,\ c_2=f_0\oplus f_2,\\
c_3=f_0\oplus f_1\oplus f_2\oplus f_3. \qquad (5)
\end{gathered}$$

Соотношения (5) между значениями коэффициентов f_i совершенной ДНФ или ПНФ и значениями коэффициентов c_i, $i=0,1,2,3$ полинома Жегалкина функции $f(x_1,x_2)$ иллюстрирует табл. 1.

Теперь рассмотрим обратный переход от полинома Жегалкина к совершенной ПНФ (ДНФ) для функции от двух переменных:

$$\begin{gathered}
f(x_1,x_2)=c_0\oplus c_1x_2\oplus c_2x_1\oplus c_3x_1x_2=\\
=f_0\oplus(f_0\oplus f_1)x_2\oplus(f_0\oplus f_2)x_1\oplus(f_0\oplus f_1\oplus f_2\oplus f_3)x_1x_2=\\
=f_0(1\oplus x_2\oplus x_1\oplus x_1x_2)\oplus f_1(x_2\oplus x_1x_2)\oplus f_2(x_1\oplus
\end{gathered}$$

$$\oplus x_1 x_2) \oplus f_3 x_1 x_2 = f_0 m_0 \oplus f_1 m_1 \oplus f_2 m_2 \oplus f_3 m_3,$$

где
$$m_0 = 1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2$$
$$m_1 = x_2 \oplus x_1 x_2 = \bar{x}_1 x_2$$
$$m_2 = x_1 \oplus x_1 x_2 = x_1 \bar{x}_2$$
$$m_3 = x_1 x_2 .$$

Т а б л и ц а 1

N	f_0	f_1	f_2	f_3	c_0	c_1	c_2	c_3	N	f_0	f_1	f_2	f_3	c_0	c_1	c_2	c_3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	9	1	0	0	1	1	1	1	0
2	0	0	1	0	0	0	1	1	10	1	0	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	0	0	1	0	11	1	0	1	1	1	1	0	1
4	0	1	0	0	0	1	0	1	12	1	1	0	0	1	0	1	0
5	0	1	0	1	0	1	0	0	13	1	1	0	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0	1	1	0	14	1	1	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	0	1	1	1	15	1	1	1	1	1	0	0	0

Следовательно, $f(x_1, x_2) = f_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \oplus f_1 \bar{x}_1 x_2 \oplus f_2 x_1 \bar{x}_2 \oplus f_3 x_1 x_2$.

От полученной совершенной ПНФ возвратиться к полиному Жегалкина можно следующим путем:

$$f_0 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \oplus f_1 \bar{x}_2 x_1 \oplus f_2 x_2 \bar{x}_1 \oplus f_3 x_2 x_1 = f_0 m_0 \oplus f_1 m_1 \oplus f_2 m_2 \oplus f_3 m_3 =$$
$$= c_0 m_0 \oplus (c_0 \oplus c_1) m_1 \oplus (c_0 \oplus c_2) m_2 \oplus (c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3) m_3 =$$
$$= c_0 (m_0 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_3) \oplus c_1 (m_1 \oplus m_3) \oplus c_2 (m_2 \oplus m_3) \oplus$$
$$\oplus c_3 m_3 = c_0 p_0 \oplus c_1 p_1 \oplus c_2 p_2 \oplus c_3 p_3 ,$$

где $p_0 = m_0 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 x_2 \oplus x_1 \bar{x}_2 \oplus x_1 x_2 = 1$
$$p_1 = m_1 \oplus m_3 = \bar{x}_1 x_2 \oplus x_1 x_2 = x_2$$
$$p_2 = m_2 \oplus m_3 = x_1 \bar{x}_2 \oplus x_1 x_2 = x_1$$
$$p_3 = m_3 = x_1 x_2 .$$

Следовательно, $f(x_1, x_2) = c_0 \oplus c_1 x_2 \oplus c_2 x_1 \oplus c_3 x_1 x_2$, что соответствует (3).

В случае функции $f(x_1, x_2, x_3)$ полином Жегалкина будет иметь такой вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = c_0 \oplus c_1 x_3 \oplus c_2 x_2 \oplus c_3 x_2 x_3 \oplus$$
$$\oplus c_4 x_1 \oplus c_5 x_1 x_3 \oplus c_6 x_1 x_2 \oplus c_7 x_1 x_2 x_3 , \qquad (6)$$

где $c_0 = f_0$, $c_1 = f_0 \oplus f_1$, $c_2 = f_0 \oplus f_2$, $c_3 = f_0 \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus f_3$, $c_4 = f_0 \oplus f_4$, $c_5 = f_0 \oplus f_1 \oplus f_4 \oplus f_5$, $c_6 = f_0 \oplus f_2 \oplus f_4 \oplus f_6$,

$c_7 = f_0 \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus f_3 \oplus f_4 \oplus f_5 \oplus f_6 \oplus f_7$.

Обратный переход от полинома Жегалкина к совершенной ПНФ (ДНФ) через замену $c_i \to f_i$ в этом случае также будет свидетельствовать о полном соответствии и взаимозаменяемости коэффициентов f_i и c_i.

Чтобы доказать справедливость утверждения о взаимозаменяемости коэффициентов f_i и c_i для произвольной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, соотношения между этими коэффициентами упорядочим в виде матричных уравнений для $n = 1, 2$.

В частности, если для $f(x)$ имеем $f_0 = c_0$, $f_1 = c_0 \oplus c_1$, то в матричном представлении эту систему можно записать в виде уравнения или в более компактной форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 1\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} \text{ или } F^1 = A_1 C^1 . \qquad (7)$$

Действительно, взаимозаменяемость коэффициентов $f_i \leftrightarrow c_i$ здесь будет иметь место, поскольку в полиномиальном формате произведение матрицы A_1 самой на себя, которое обозначим как $A_1^2 = A_1 A_1$, равно единичной матрице E_2 второго порядка:

$$A_1^2 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 \oplus 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 \cdot$$

Тогда, перемножив левую и правую части равенства (7) на A_1, получим $C^1 = A_1 F^1$.

Для $n = 2$, взяв за основу (5), получим (пунктирными линиями выделены блоки для $n = 1$):

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix} C^2 \text{ или } F^2 = A_2 C^2 , \quad (8)$$

где $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{bmatrix}$ – нулевая матрица второго порядка.

По аналогичной процедуре получим

$$A_2^2 \equiv \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^2 \oplus \mathbf{0} \cdot A_1 & A_1 \cdot \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \cdot A_1 \\ A_1^2 \oplus A_1^2 & A_1 \cdot \mathbf{0} \oplus A_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_2^2 \end{bmatrix} = E_4 ,$$

где $E_4 = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix}$ – единичная матрица порядка 2^2. Следовательно, на основании этого и (8) для $n = 2$ справедливо равенство $C^2 = A_2 F^2$.

Для доказательства справедливости утверждения о взаимозаменяемости коэффициентов f_i и c_i для произвольного n применим метод математической индукции.

Для $n = 1, 2$, как видим, это утверждение справедливо.

Пусть для $n-1$ справедливо равенство $A_{n-1}^2 = E_{2^{n-1}}$.

Тогда $C^{n-1} = A_{n-1} F^{n-1}$, где $A_{n-1} = \begin{bmatrix} A_{n-2} & \mathbf{0} \\ A_{n-2} & A_{n-2} \end{bmatrix}$.

Поскольку для n

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \ldots \\ f_{2^n - 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ A_{n-1} & A_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \ldots \\ c_{2^n - 1} \end{bmatrix} \text{ или } F^n = A_n C^n , \qquad (9)$$

а $$A_n^2 = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ A_{n-1} & A_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ A_{n-1} & A_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{n-1}^2 \oplus \mathbf{0} \cdot A_{n-1} & A_{n-1} \cdot \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \cdot A_{n-1} \\ A_{n-1}^2 \oplus A_{n-1}^2 & A_{n-1} \cdot \mathbf{0} \oplus A_{n-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{2^{n-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{2^{n-1}} \end{bmatrix} = E_{2^n} ,$$

то на основании этого и (9) запишем искомое равенство

$$C^n = A_n F^n . \qquad (10)$$

Взаимозаменяемость коэффициентов f_i и c_i (10) дает основание утверждать взаимозаменяемость минтермов совершенных форм (ПНФ, ДНФ, ТМФ) и конъюнктермов полинома Жегалкина, которое можно использовать для числовой теоретико-множественной интерпретации полинома Жегалкина.

Полином Жегалкина в теоретико-множественной форме представления будем называть *теоретико-множественной формой полинома Жегалкина* – ТМФЖ $Y^{\oplus}$. Заметим, что в отличие от троичных конъюнктермов ПТМФ $Y^{\oplus}$ конъюнктермы ТМФЖ $Y^{\oplus}$ будут иметь значения разрядов $\sigma \in \{1,-\}$. При этом ТМФЖ $Y^{\oplus}$ вырожденной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{1}$ не отличается от совершенной ПТМФ $Y^{\oplus}$: в двоичном формате $Y^{\oplus} = \{[0,1,...,2^n - 1]\}^{\oplus} = \mathbf{E}_2^n$, в десятичном – $Y^{\oplus} = \{[--\cdots-]\}^{\oplus} = \mathbf{1}$. Это легко показать, если конъюнктермы полинома Жегалкина заменить на их числовые представители по правилу (2) и удалить в образовавшемся множестве пары одинаковых чисел. Следовательно, если в (4) $f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = 1$, то $f(x_1, x_2) = \mathbf{1}$, тогда в двоичном формате получим

$$x_1x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus x_1x_2 \oplus x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 \overset{Zh}{\Rightarrow}$$

$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \{(11),(-1),(1-),(--),(11),(-1),(11),(1-),(11)\}^{\oplus} = \{(--)\}^{\oplus},$$

соответственно в десятичном формате –

$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \{(3),(1,3),(2,3),(0,1,2,3),(3),(1,3),(3),(2,3),(3)\}^{\oplus} = \{(0,1,2,3)\}^{\oplus},$$

где $\overset{Zh}{\Rightarrow}$ – оператор перехода к ТМФЖ $Y^{\oplus}$ функции f.

Если $f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = 0$, то $f(x_1, x_2) = \mathbf{0}$, а поскольку $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, то ТМФЖ $Y^{\oplus} = \varnothing$.

Числовую теоретико-множественную интерпретацию полинома Жегалкина (для невырожденных случаев) рассмотрим на примере функции $f(x_1, x_2)$. Соответствие между коэффициентами f_i и c_i проиллюстрируем на картах Карно (рис. 1), где *а* и *б* – карты для f_i и их минтермов m_i ДНФ или ПНФ, а *в* и *г* – карты для c_i и их конъюнктермов полинома Жегалкина.

f_0	f_1
f_2	f_3

а

$\rightarrow$

$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$
$x_1\bar{x}_2$	$x_1 x_2$

б

$\overset{Zh}{\Rightarrow}$

c_0	c_1
c_2	c_3

в

$\rightarrow$

1	x_2
x_1	$x_1 x_2$

г

Рис. 1

Карты *а* и *б*, а также *в* и *г* взаимно связаны соответствием клеток. Объеденим их попарно и образуем числовые карты (рис. 2), отображающие соответствие $f_i \overset{Zh}{\Rightarrow} c_i$: слева – для двоичных индексов (00), (01), (10), (11) коэффициентов f_i, справа – для десятичных индексов [0], [1], [2], [3] коэффициентов c_i.

00	01
10	11

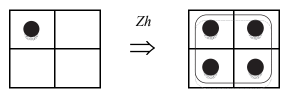
$\overset{Zh}{\Rightarrow}$

0	1
2	3

Рис. 2

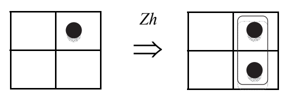
Соответствие ТМФ (ПТМФ) $\overset{Zh}{\Rightarrow}$ ТМФЖ определим следующим способом. На числовых картах (см. рис. 2) черным кружком (●) выделим клетки, номера которых соответствуют значениям индексов коэффициентов $f_i = 1$ и $c_i = 1$. Из табл. 1 для каждого заданного $f_i \in \{0,1\}$ определим значения c_i, записывая соответствующее выражение минтерма ДНФ и полинома Жегалкина. Считываемые числа с карты коэффициентов c_i (из контуров карты – множество чисел) – это искомые числовые конъюнктермы ТМФЖ $Y^{\oplus}$ функции $f(x_1, x_2)$.

Пусть $f_0 = 1$, $f_1 = f_2 = f_3 = 0$; это минтерм $m_0 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \Rightarrow \{(00)\}^1$.



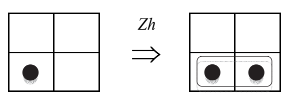
Тогда $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 1$, что соответствует полиному $\overset{Zh}{\Rightarrow} 1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2$.

Соответственно ТМФЖ $Y^{\oplus} = \{[0,1,2,3]\}^{\oplus} = \{[--]\}^{\oplus}$.



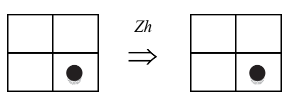
$$f_1 = 1,\ f_0 = f_2 = f_3 = 0;\ m_1 = \bar{x}_1 x_2 \Rightarrow \{(01)\}^1;\ c_1 = c_3 = 1,$$

$$c_0 = c_2 = 0, \text{ т.е. } \overset{Zh}{\Rightarrow} x_2 \oplus x_1x_2;\ Y^{\oplus} = \{[1,3]\}^{\oplus} = \{[-1]\}^{\oplus}.$$



$$f_2 = 1,\ f_0 = f_1 = f_3 = 0;\ m_2 = x_1\bar{x}_2 \Rightarrow \{(10)\}^1;\ c_2 = c_3 = 1,$$

$$c_0 = c_1 = 0, \text{ т.е. } \overset{Zh}{\Rightarrow} x_1 \oplus x_1x_2;\ Y^{\oplus} = \{[2,3]\}^{\oplus} = \{[1-]\}^{\oplus}.$$



$$f_3 = 1,\ f_0 = f_1 = f_2 = 0;\ m_3 = x_1x_2 \Rightarrow \{(11)\}^1;\ c_3 = 1,$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = 0, \text{ т.е. } \overset{Zh}{\Rightarrow} x_1x_2;\ Y^{\oplus} = \{[3]\}^{\oplus} = \{[11]\}^{\oplus}.$$

В табл. 2 отображено для $f(x_1, x_2)$ соответствие между дизъюнктивним и полиномиальным представлениями как в аналитическом, так и в теоретико-множественном форматах. В колонке *маска* размещены маски литералов ($l \in \{\bar{x}, x\}$ – для аналитического формата, $l \in \{0,1\}$ – для числового формата), формирующие конъюнктермы и их ранги r для определенных ДНФ/ПНФ и ТМФ/ПТМФ, а именно:

маска $\{ll\}$ формирует конъюнктермы второго ранга;

$\{l-\}$ и $\{-l\}$ – первого ранга; $\{--\}$ – нулевого ранга.

Т а б л и ц а 2

Маска	Аналитический формат		Теоретико-множественный формат			
	ДНФ/ПНФ	Полином Ж.	ТМФ/ПТМФ		ТМФЖ	
$\{ll\}$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$1\oplus x_2\oplus x_1\oplus x_1x_2$	(00)	(0)	(– –)	(0,1,2,3)
	$\bar{x}_1x_2$	$x_2\oplus x_1x_2$	(01)	(1)	(–1)	(1,3)
	$x_1\bar{x}_2$	$x_1\oplus x_1x_2$	(10)	(2)	(1–)	(2,3)
	x_1x_2	x_1x_2	(11)	(3)	(11)	(3)
$\{l-\}$	$\bar{x}_1$	$1\oplus x_1$	(0–)	(0,1)	(– –), (–1)	(0,2)
	x_1	x_1	(1–)	(2,3)	(1–), (11)	(2)
$\{-l\}$	$\bar{x}_2$	$1\oplus x_2$	(–0)	(0,2)	(– –), (1–)	(0,1)
	x_2	x_2	(–1)	(1,3)	(–1), (11)	(1)
$\{--\}$	**1**	1	(– –)	(0,1,2,3)	(– –), (–1), (1–), (11)	(0)

В колонках *Аналитический формат* помещены выражения конъюнктермов ДНФ/ПНФ и полинома Жегалкина, а в колонках *Теоретико-множественный формат* – их двоичные (троичные) и десятичные представления, т.е. ТМФ и ПТМФ, а также ТМФЖ.

Табл. 3 иллюстрирует аналогичное соответствие для $f(x_1,x_2,x_3)$, где маски литералов формируют конъюнктермы различных рангов r так:

$$\{lll\}\ -\ r=3\,;\ \ \{ll-\}\,,\{l-l\}\,,\{-ll\}\ -\ r=2\,;$$
$$\{l--\}\,,\{-l-\}\,,\{--l\}\ -\ r=1\,;\ \{---\}\ -\ r=0\,.$$

Взаимно однозначное соответствие между рассмотренными формами, отображаемые в табл. 2 и 3, будет сохраняться для произвольной функции от n переменных.

В табл. 2 и 3 двойной линией отделены множества элементов совершенных форм обоих форматов для масок $\{ll\}$ и $\{lll\}$. Это значит, что элементы табл. 2 и 3 в колонках ДНФ/ПНФ и ТМФ/ПТМФ для остальных масок образованы операцией склеивания (в общем случае для ДНФ – это выражение $\theta^{r-1}x_i \vee \theta^{r-1}\bar{x}_i = \theta^{r-1}$, где $\theta^{r-1}x_i = \theta_1^r$ и $\theta^{r-1}\bar{x}_i = \theta_2^r$ – соседние конъюнктермы r-ранга). Например, в табл. 2 для маски $\{l-\}=\{0-\}$, которой соответствует выражение $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 = \bar{x}_1$, получим полином Жегалкина $(1\oplus x_2\oplus x_1\oplus x_1x_2)\oplus(x_2\oplus x_1x_2) = 1\oplus x_1$.

Числовым теоретико-множественным методом преобразование типа «совершенная ДНФ (ТМФ) $\Rightarrow$ полином Жегалкина» выполняется по схеме:

$$\text{совершенная ДНФ } f \Rightarrow \text{совершенная ТМФ } Y^1 \overset{Zh}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \text{ТМФЖ } Y^{\oplus} \Rightarrow \text{полином Жегалкина.}$$

Схема обратного преобразования «полином Жегалкина $\Rightarrow$ совершенная ТМФ (ДНФ)» имеет вид:

$$\text{полином Жегалкина} \Rightarrow \text{ТМФЖ } Y^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\text{совершенная ТМФ } Y^1 \Rightarrow \text{совершенная ДНФ } f.$$

В рассмотренных схемах взаимные преобразования «совершенная ТМФ $Y^1 \Leftrightarrow$ ТМФЖ $Y^{\oplus}$» выполняются заменой значений i-х разрядов конъюнктермов по правилу, основанному на правиле (2):

$$(0)_i \leftrightarrow (-)_i\,;\ (1)_i \leftrightarrow (1)_i\,. \qquad (11)$$

Над образовавшейся ТМФЖ $Y^{\oplus}$ далее выполняется процедура упрощения, которая реализуется удалением пар одинаковых чисел. Затем, чтобы получить полином Жегалкина, необходимо i-е разряды двоичных конъюнктермов упрощенной ТМФЖ $Y^{\oplus}$ заменить на литералы полинома по правилу, справедливому и для обратного преобразования «полином Жегалкина $\Rightarrow$ ТМФЖ $Y^{\oplus}$»:

$$(0)_i \leftrightarrow \text{ отсутствующая } x_i\,;\ (1)_i \leftrightarrow x_i\,. \qquad (12)$$

Заметим, переход ТМФЖ $Y^{\oplus} \Rightarrow$ совершенной ТМФ Y^1 однозначный – двоичные конъюнктермы ТМФЖ $Y^{\oplus}$ записываются без изменений, поскольку, как упомянуто ранее, эти формы тождественны.

Следовательно, по описанной схеме переход от совершенной ДНФ f к ТМФЖ $Y^{\oplus}$ для рассмотренного примера (пятая сверху строка табл. 2) будет выполняться так:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1x_2 \Rightarrow \{(00),(01)\}^1 \overset{Zh}{\Rightarrow} \{(--),(-1)\}^{\oplus} \text{ или}$$
$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \{(0,1,2,3),(1,3)\}^{\oplus} = \{(0,2)\}^{\oplus}\,.$$

В частности, для вырожденной функции $f(x_1,x_2) = \mathbf{1}$ (последняя строка табл. 2) полином Жегалкина равен единице:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1x_2 \oplus x_1\bar{x}_2 \oplus x_1x_2 = (1\oplus x_2\oplus x_1\oplus$$
$$\oplus x_1x_2)\oplus(x_2\oplus x_1x_2)\oplus(x_1\oplus x_1x_2)\oplus x_1x_2 = 1.$$

В теоретико-множественном формате – это числовой конъюнктерм нулевого ранга, т.е. ТМФ $Y^1 = \{(--)\}^1$, которому соответствует ТМФЖ $Y^{\oplus}$:

$$Y^1 = \{00,01,10,11\}^1 \overset{Zh}{\Rightarrow} \{(--),(-1),(1-),(11)\}^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(0,1,2,3),(1,3),(2,3),(3)\}^{\oplus} = \{(0)\}^{\oplus}\,.$$

Преобразование «ДНФ/ТМФ $\Rightarrow$ полином Жегалкина» выполняется по аналогичной схеме при условии, если конъюнктермы ДНФ/ТМФ взаимно ортогональны. Последние можно получить либо процедурой ортогонализации [5, 8] либо путем преобразования заданной ДНФ/ТМФ в совершенную форму. Ортогонализацию конъюнктермов, приналежащую к сложным многовариантным процедурам, целесообразно применять тогда, когда число неортогональных элементов небольшое. Другой путь значительно проще, если в совершенную форму преобразовывать ТМФ Y^1 [8, 9]. Этот случай представим схемой:

Т а б л и ц а 3

Маска	Аналитический формат		Теоретико-множественный формат			
	ДНФ/ ПНФ	Полином Жегалкина	ТМФ/ПТМФ		ТМФЖ	
{*lll*}	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$1\oplus x_3\oplus x_2\oplus x_2x_3\oplus x_1\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3$	(000)	(0)	(– – –)	(0,1,2,3,4,5,6,7)
	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3$	(001)	(1)	(– –1)	(1,3,5,7)
	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$x_2\oplus x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3$	(010)	(2)	(–1–)	(2,3,6,7)
	$\bar{x}_1x_2x_3$	$x_2x_3\oplus x_1x_2x_3$	(011)	(3)	(–11)	(3,7)
	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3$	(100)	(4)	(1– –)	(4,5,6,7)
	$x_1\bar{x}_2x_3$	$x_1x_3\oplus x_1x_2x_3$	(101)	(5)	(1–1)	(5,7)
	$x_1x_2\bar{x}_3$	$x_1x_2\oplus x_1x_2x_3$	(110)	(6)	(11–)	(6,7)
	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	(111)	(7)	(111)	(7)
{*ll*–}	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$1\oplus x_2\oplus x_1\oplus x_1x_2$	(00–)	(0,1)	(– – –), (– –1)	(0,2,4,6)
	$\bar{x}_1x_2$	$x_2\oplus x_1x_2$	(01–)	(2,3)	(–1–), (–11)	(2,6)
	$x_1\bar{x}_2$	$x_1\oplus x_1x_2$	(10–)	(4,5)	(1– –), (1–1)	(4,6)
	x_1x_2	x_1x_2	(11–)	(6,7)	(11–), (111)	(6)
{*l*–*l*}	$\bar{x}_1\bar{x}_3$	$1\oplus x_3\oplus x_1\oplus x_1x_3$	(0–0)	(0,2)	(– – –), (– 1–)	(0,1,4,5)
	$\bar{x}_1x_3$	$x_3\oplus x_1x_3$	(0–1)	(1,3)	(– –1), (–11)	(1,5)
	$x_1\bar{x}_3$	$x_1\oplus x_1x_3$	(1–0)	(4,6)	(1– –), (11–)	(4,5)
	x_1x_3	x_1x_3	(1–1)	(5,7)	(1–1), (111)	(5)
{–*ll*}	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	$1\oplus x_3\oplus x_2\oplus x_2x_3$	(–00)	(0,4)	(– – –), (1– –)	(0,1,2,3)
	$\bar{x}_2x_3$	$x_3\oplus x_2x_3$	(–01)	(1,5)	(– –1), (1–1)	(1,3)
	$x_2\bar{x}_3$	$x_2\oplus x_2x_3$	(–10)	(2,6)	(–1–), (11–)	(2,3)
	x_2x_3	x_2x_3	(–11)	(3,7)	(–11), (111)	(3)
{*l*– –}	$\bar{x}_1$	$1\oplus x_1$	(0– –)	(0,1,2,3)	(– – –), (– –1), (–1–), (–11)	(0,4)
	x_1	x_1	(1– –)	(4,5,6,7)	(1– –), (1–1), (11–), (111)	(4)
{–*l*–}	$\bar{x}_2$	$1\oplus x_2$	(–0–)	(0,1,4,5)	(– – –), (– –1), (1– –), (1–1)	(0,2)
	x_2	x_2	(–1–)	(2,3,6,7)	(–1–), (–11), (11–), (111)	(2)
{– –*l*}	$\bar{x}_3$	$1\oplus x_3$	(– –0)	(0,2,4,6)	(– – –), (–1–), (1– –), (11–)	(0,1)
	x_3	x_3	(– –1)	(1,3,5,7)	(– –1), (–11), (1–1), (111)	(1)
{– – –}	**1**	1	(– – –)	(0,1,2,3,4,5,6,7)	(– – –), (– –1), (–1–), (–11), (1– –), (1–1), (11–), (111)	(0)

ДНФ $f \Rightarrow$ ТМФ $Y^1 \Rightarrow$ совершенная ТМФ $Y^1 \overset{Zh}{\Rightarrow}$

$\overset{Zh}{\Rightarrow}$ ТМФЖ $Y^{\oplus} \Rightarrow$ полином Жегалкина.

Преобразование «полином Жегалкина $\Rightarrow$ ДНФ *f*» выполняется по обратной схеме, которая на этапе перехода от совершенной ДНФ Y^1 к ТМФ Y^1 дополняется процедурой минимизации.

Предложенный числовой теоретико-множественный метод преобразования конъюнктермов (совершенной) ДНФ или ТМФ в полином Жегалкина, и наоборот, покажем на примерах.

Пример 1. Числовым теоретико-множественным методом преобразовать совершенную ДНФ функции $f=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1x_2x_3$ в полином Жегалкина, и наоборот.

Решение. Преобразовав совершенную ДНФ *f* в совершенную ТМФ Y^1 и применив правило (11), получим ТМФЖ $Y^{\oplus}$ заданной функции:

$$Y^1=\{(000),(001),(100),(101),(111)\}^1 \overset{Zh}{\Rightarrow}$$

$$\overset{Zh}{\Rightarrow}\{(---),(--1),(1--),(1-1),(111)\}^{\oplus}.$$

Затем, расписав образовавшиеся конъюнктермы ТМФЖ $Y^{\oplus}$ на множества десятичных чисел и упростив полученное множество путем удаления пар одинаковых чисел, запишем по правилу (12) полином Жегалкина

$$=\{(0,1,2,3,4,5,6,7),(1,3,5,7),(4,5,6,7),(5,7),(7)\}^{\oplus}=\{0,2,7\}^{\oplus}=$$

$$\{(000),(010),(111)\}^{\oplus}\Rightarrow 1\oplus x_2\oplus x_1x_2x_3\,,$$

Обратное преобразование «полином Жегалкина $\Rightarrow$ совершенная ДНФ» выполняется так:

$$1\oplus x_2\oplus x_1x_2x_3\Rightarrow\{(000),(010),(111)\}^{\oplus}\Rightarrow\{(---),$$

$$(-1-),(111)\}^{\oplus}=\{(0,1,2,3,4,5,6,7),(2,3,6,7),(7)\}^{\oplus}=$$

$$=\{0,1,4,5,7\}^{\oplus}\Rightarrow\{(000),(001),(100),(101),(111)\}^1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1x_2x_3.$$

Пример 2. Числовым теоретико-множественным методом преобразовать полином Жегалкина функции $f(a,b,c,d)=a\oplus bc\oplus ad$ в эквивалентную ДНФ, и обратно [4], с. 17.

Решение

$$a\oplus bc\oplus ad\Rightarrow\{(1000),(0110),(1001)\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{(1---),(-11-),(1--1)\}^{\oplus}=$$

$$= \{(8,9,10,11,12,13,14,15), (6,7,14,15),$$

$$(9,11,13,15)\}^{\oplus} = \{6,7,8,10,12,15\}^{\oplus} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{(0110), (0111), (1000), (1010), (1100), (1111)\}^{1}.$$

Полученную совершенную ТМФ Y^1 сминимизируем, например, методом расцепления конъюнктермов [10]:

$$Y^1 \overset{S}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} lll- \\ ll-l \\ l-ll \\ -lll \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{011-} & \underline{011-} & 100- & 101- & 110- & 111- \\ 01-0 & 01-1 & \underline{10-0} & \underline{10-0} & 11-0 & 11-1 \\ 0-10 & 0-11 & \underline{1-00} & 1-10 & \underline{1-00} & 1-11 \\ -110 & \underline{-111} & -000 & -010 & -100 & \underline{-111} \end{bmatrix} \overset{C}{\Rightarrow}$$

$$\overset{C}{\Rightarrow} \{(011-), (10-0), (1-00), (-111)\}^{1}.$$

Отсюда, эквивалентная ДНФ заданной функции $f = \overline{a}bc \vee a\overline{b}\,\overline{d} \vee a\overline{c}\overline{d} \vee bcd$.

Обратное преобразование «ДНФ $f \Rightarrow$ полином Жегалкина» выполняется так:

$$\overline{a}bc \vee a\overline{b}\,\overline{d} \vee a\overline{c}\overline{d} \vee bcd \Rightarrow \{(011-), (10-0), (1-00), (-111)\}^{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{(0110), (0111), (1000), (1010), (1100), (1111)\}^{1} \overset{Zh}{\Rightarrow}$$

$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \{(-11-), (-111), (1---), (1-1-), (11--), (1111)\}^{\oplus} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{(6,7,14,15), (7,15), (8,9,10,11,12,13,14,15),$$

$$(10,11,14,15), (12,13,14,15), (15)\}^{\oplus} = \{6,8,9\}^{\oplus} =$$

$$= \{(0110), (1000), (1001)\}^{\oplus} \Rightarrow \{(-11-),$$

$$(1---), (1--1)\}^{\oplus} = a \oplus bc \oplus ad.$$

Пример 3. Числовым теоретико-множественным методом преобразовать ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ в полином Жегалкина, и наоборот [12], с. 33.

Решение

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \Rightarrow \{(1--), (-1-), (--1)\}^{1} =$$

$$= \{(4,5,6,7), (2,3,6,7), (1,3,5,7)\}^{1} = \{1,2,3,4,5,6,7\}^{1} =$$

$$= \{(001), (010), (011), (100), (101), (110), (111)\}^{1} \overset{Zh}{\Rightarrow}$$

$$\overset{Zh}{\Rightarrow} \{(--1), (-1-), (-11), (1--), (1-1), (11-), (111)\}^{\oplus} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3.$$

Из полученного полинома Жегалкина заданная ДНФ f образуется следующим путем:

$$x_3 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{(--1), (-1-), (-11), (1--), (1-1), (11-), (111)\}^{\oplus} =$$

$$= \{(1,3,5,7), (2,3,6,7), (3,7), (4,5,6,7), (5,7), (6,7), (7)\}^{\oplus} =$$

$$= \{1,2,3,4,5,6,7\}^{\oplus} =$$

$$= \{(001), (010), (011), (100), (101), (100), (111)\}^{1} \overset{S}{\Rightarrow}$$

$$\overset{S}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} ll- \\ l-l \\ -ll \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 00- & \underline{01-} & \underline{01-} & \underline{10-} & \underline{10-} & \underline{11-} & \underline{11-} \\ \underline{0-1} & 0-0 & \underline{0-1} & \underline{1-0} & \underline{1-1} & \underline{1-0} & \underline{1-1} \\ \underline{-01} & \underline{-10} & \underline{-11} & -00 & \underline{-01} & \underline{-10} & \underline{-11} \end{bmatrix} \overset{c}{\Rightarrow}$$

$$\overset{C}{\Rightarrow} \begin{Bmatrix} ll- \\ l-l \end{Bmatrix} = \{(01-), (10-), (11-); (0-1), (1-0), (1-1)\}^{1}.$$

Из полученного множества покрытия на следующем шаге расщепления получим:

$$(01-), (10-), (11-) \overset{S}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} l-- \\ -l- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-- & \underline{1--} & \underline{1--} \\ \underline{-1-} & -0- & \underline{-1-} \end{bmatrix} \overset{C}{\Rightarrow} (1--), (-1-),$$

$$(0-1), (1-0), (1-1) \overset{S}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} l-- \\ --l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-- & \underline{1--} & \underline{1--} \\ \underline{--1} & --0 & \underline{--1} \end{bmatrix} \overset{C}{\Rightarrow} (1--), (--1).$$

Отсюда минимальная ТМФ $Y^1 = \{(1--), (-1-), (--1)\}^{1}$. Следовательно, $f = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

Заключение. Из рассмотренного материала не сложно сделать вывод о том, что предложенную числовую теоретико-множественную интерпретацию полинома Жегалкина и основанный на этом метод взаимного преобразования дизъюнктивного и полиномиального форматов представления логических функций, удобно использовать для непосредственной реализации на компьютере без каких-либо промежуточных процедур или преобразований. Описанный метод можно также применять к системе логических функций от *n* переменных.

●