

И.А. Чуб, М.В. Новожилова

Метод решения линеаризованной задачи размещения неориентированных геометрических объектов

Исследована оптимизационная задача размещения многоугольных неориентированных объектов в полосе, рассматриваемой в линеаризованной постановке. Описаны дополнительные свойства области допустимых решений и схема метода поиска локального минимума функции цели. Рассмотрена методика определения допустимого шага вдоль направления движения по границе компоненты связности линеаризованной области допустимых решений.

The non-oriented polygonal placement optimization problem is considered in the linearized formulation. The additional properties of the problem linearized feasible region have been studied. The method of searching for a problem local minimum based on the active set idea is proposed. The scheme for determining step value along the descent direction via to the frontier of the connected component of the linearized problem feasible region has been developed.

Досліджено оптимізаційну задачу розміщення багатокутних неорієнтованих об'єктів у смугі, розглядуваної в лінеаризованій постановці. Описано додаткові властивості області припустимих рішень та схему методу пошуку локального мінімуму функції мети. Розглянуто схему визначення припустимого кроку за напрямом руху по межі компоненти зв'язності лінеаризованої області припустимих рішень.

Введение. Задача нерегулярного размещения набора неориентированных многоугольных геометрических объектов в некоторой многоугольной области принадлежит к классу задач оптимизационного геометрического проектирования [1] и представляет как теоретический, так и практический интерес. К таким задачам относятся, например, задачи раскроя изотропного материала (металлопрокат, ткань, стекло и др.) на многоугольные заготовки. При этом, если над геометрическим объектом допустимо аффинное преобразование поворота, то такой объект называют *неориентированным*.

Обзор предыдущих исследований

Рассматриваемый класс задач наименее изучен среди задач размещения [2, 3]. В работе [4] проведено исследование рассматриваемой задачи размещения в полосе, выделены дополнительные свойства области допустимых решений, на основе которых предложена линеаризация функций основных ограничений задачи, позволяющая с заданной точностью свести исходную нелинейную задачу размещения к набору задач линейного программирования. В работе [5] рассмотрена схема определения направления движения по границе компоненты связности линеаризованной области допустимых решений, основанная на использовании идеи активного набора [6]. В схеме активного набора $(h + 1)$ -я итерация имеет вид [9] $u^{h+1} =$

$= u^h + \bar{\alpha}^h \cdot p^h$, где u^h – значения независимых переменных на предыдущей итерации; $\bar{\alpha}^h$ – шаг, p^h – направление спуска.

Цель настоящей статьи – обоснование метода определения длины шага при поиске локального минимума функции цели задачи размещения неориентированных многоугольников в линеаризованной постановке.

Постановка задачи

Имеется набор $R = \{R_i\}_{i=1, \overline{N}}$ выпуклых неориентированных многоугольников и область размещения $R_0 = \{(x, y) \in E^2 \mid x \in [0, z], y \in [0, W]\}$, $W = \text{const}$, $z = \text{var}$ (рис. 1). Объект R_i задается набором $\{(x_i^n, y_i^n)\}$, $n = \overline{1, n_i}$ координат его вершин в собственной системе координат $X_i O_i Y_i$, $i = \overline{1, N}$. Положение R_i определяется параметрами размещения $u_i = (v_i, \varphi_i) = (x_i, y_i, \varphi_i)$, задающим начало O_i системы координат $X_i O_i Y_i$, $O_i \in \text{int} R_i$.

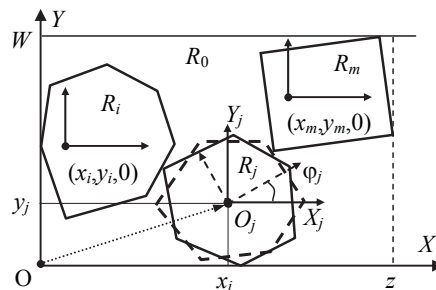


Рис. 1. Область R_0 и объекты размещения R_i, R_j, R_m

Необходимо разместить набор $R_i, i = \overline{1, N}$ объектов без взаимных наложений в области R_0 так, чтобы длина занятой части полосы z была минимальной:

$$\text{найти: } u^* = \arg \min_{u \in D \subset E^{3N+1}} cu, \quad (1)$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_N, z)$; $c = (0, 0, \dots, 0, 1)$; $D = D_1 \cap D_2$ – область допустимых решений; под-область $D_1 \subset E^{3N+1}$ определяется ограничениями на размещение объектов R_i в полосе R_0 :

$$R_i \subset R_0, \quad i = \overline{1, N}; \quad (2)$$

$D_2 \subset E^{3N+1}$ задается условиями взаимного попарного непересечения объектов (R_i, R_j) :

$$\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset, \quad i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \quad (3)$$

Аналитическое описание условия (2) определяется системой $F_1(u) \geq 0 := \{f_i^{hn}(u_i) \geq 0, n = \overline{1, n_i}; h = \overline{1, 4}; i = \overline{1, N}$ нелинейных неравенств, причем функции $f_i^{hn}(u_i)$ имеют вид

$$f_i^{hn}(u_i) \in \{x_i - \xi_i^n; y_i - \psi_i^n; -y_i + W - \psi_i^n; z - x_i - \xi_i^n\}, \quad (4)$$

$$\xi_i^n = |x_i^n \cos \varphi_i + y_i^n \sin \varphi_i|; \quad (5)$$

$$\psi_i^n = |y_i^n \cos \varphi_i - x_i^n \sin \varphi_i|.$$

Условие (3) задается системой $F_2(u) \geq 0$ наборов $F_{ij}^h(u_i, u_j) \geq 0$ нелинейных неравенств:

$$F_{ij}^h(u_i, u_j) \geq 0 := \langle f_{ij}^{hl}(u_i, u_j) \geq 0, h = \overline{1, n_i}, l = \overline{1, n_j}, i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \quad (6)$$

При этом функции f_{ij}^{hl} в зависимости от типа касания [3] пары (R_i, R_j) имеют вид

$$\begin{aligned} & (A \cos \varphi_i + B \sin \varphi_i)(x_j - x_i) + \\ & + (B \cos \varphi_i - A \sin \varphi_i)(y_j - y_i) + \\ & + (Ax_j^k + By_j^k) \cos(\varphi_i - \varphi_j) - \\ & - (Bx_j^k - Ay_j^k) \sin(\varphi_i - \varphi_j) - (By_i^l + Ax_i^l) \end{aligned} \quad (6)$$

или

$$\begin{aligned} & (A \cos \varphi_j + B \sin \varphi_j)(x_j - x_i) + \\ & + (B \cos \varphi_j - A \sin \varphi_j)(y_j - y_i) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - (Ax_i^l + By_i^l) \cos(\varphi_j - \varphi_i) + \\ & + (Bx_i^l - Ay_i^l) \sin(\varphi_j - \varphi_i) + (By_j^k + Ax_j^k), \end{aligned} \quad (7)$$

где $x_i^l, y_i^l, x_j^k, y_j^k$ – координаты вершин объектов R_i, R_j ; A, B – функции координат их вершин.

Линеаризованная постановка задачи

Для построения многогранного множества D^L , аппроксимирующего область D (2), (3) в диапазоне изменения углового параметра $\varphi_i \in [-0,36; 0,36]$ с заданной погрешностью ε в [4] обосновано представление: $\sin \varphi_i \approx \varphi_i, \cos \varphi_i \approx g_k^L(\varphi_i) = (a_k \varphi_i + b_k), k = \overline{1, K(\varepsilon)}$. При этом величины ξ_i^n, ψ_i^n из (5) принимают вид

$$\begin{aligned} \xi_i^{Ln} & = |x_i^n(a_k \varphi_i + b_k) + y_i^n \varphi_i|; \quad \psi_i^{Ln} = \\ & = |y_i^n(a_k \varphi_i + b_k) - x_i^n \varphi_i|, \quad k = \overline{1, K(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Тогда многогранное множество D_1^L , аппроксимирующее область D_1 , задается системой

$$\begin{aligned} F_1^L(u) \geq 0 & := \{\mathfrak{Z}_i^{hn}(u_i) \geq 0, \\ n = \overline{1, n_i}; h = \overline{1, 4}; i = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (8)$$

наборов $\mathfrak{Z}_i^{hn}(u_i) \geq 0$ линейных неравенств, функции которых имеют вид [4]

$$\begin{aligned} & \{x_i + (x_i^n a_k + y_i^n) \varphi_i + x_i^n b_k, \\ & y_i + (y_i^n a_k - x_i^n) \varphi_i + y_i^n b_k, \\ & -y_i - (y_i^n a_k - x_i^n) \varphi_i + (W - y_i^n b_k), \\ & z - x_i - (x_i^n a_k + y_i^n) \varphi_i - x_i^n b_k, \quad k = \overline{1, K(\varepsilon)}\}. \end{aligned}$$

Многогранное множество D_2^L задается системой $F_2^L(u) \geq 0$ наборов $F_{ij}^L(u_i, u_j) \geq 0$ линейных неравенств:

$$\begin{aligned} F_{ij}^L(u_i, u_j) \geq 0 & := \langle \mathfrak{Z}_{ij}^{hl}(u_i, u_j) \geq 0, h = \overline{1, n_i}, l = \overline{1, n_j}, \\ i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом набор $\mathfrak{Z}_{ij}^{hl}(u_i, u_j) \geq 0 = \langle \xi_{ij}^{hl}(u_i, u_j) \geq 0$ есть линейная аппроксимация функций f_{ij}^{hl} (6), (7). Процесс построения линейной аппроксимации функций f_{ij}^{hl} предусматривает переход с учетом применения функции $g_k^L(\varphi_i)$ к виду

$$C_{1k}^i \varphi_i x_j - C_{1k}^i \varphi_i x_i + C_{2k}^i \varphi_i y_j - C_{2k}^i \varphi_i y_i + C_1^j \varphi_i \varphi_j +$$

$$+ b_k^i(Ax_j - Ax_i + By_j - By_i) + \varphi_i(C_1^j a_k^i + C_2^j) + \varphi_j(C_1^j a_h^j - C_2^j) + C_1^j(b_k^i + b_h^j - 1) - C_i^k, \quad (10)$$

где

$$C_{1k}^i = B + Aa_k^i; \quad C_{2k}^i = Ba_k^i - A; \quad C_1^j = Ax_j^l + By_j^l; \quad C_2^j = (Bx_j^l - Ay_j^l); \quad C_i^k = (By_i^k + Ax_i^k).$$

Кусочно-линейная аппроксимация Γ_v^L функций $\Gamma_v = \varphi_i \omega_v$, $\omega_v \in \{x_j, x_i, y_j, y_i, \varphi_j\}$, $v = \overline{1, 5}$ в заданных диапазонах изменения параметров осуществляется с помощью набора T линейных функций $A_{vt} \omega_v + B_{vt} \varphi_i + D_{vt}$, $t = \overline{1, T}$. Тогда функция f_{ij}^{hl} имеет следующий вид:

$$(C_{1k}^i A_{1t} + b_k^i A) x_j - (C_{1k}^i A_{2t} + b_k^i A) x_i + (C_{2k}^i A_{3t} + b_k^i B) y_j - (C_{2k}^i A_{4t} + b_k^i B) y_i + (C_1^j B_{5t} + C_1^j a_h^j - C_2^j) \varphi_j + (C_{1k}^i B_{1t} - C_{1k}^i B_{2t} + C_{2k}^i B_{3t} - C_{2k}^i B_{4t} + C_1^j A_{5t} + C_1^j a_k^i + C_2^j) \varphi_i + D, \quad (11)$$

где

$$D = C_{1k}^i D_{1t} - C_{1k}^i D_{2t} + C_{2k}^i D_{3t} - C_{2k}^i D_{4t} + C_1^j D_{5t} + C_1^j (b_k^i + b_h^j - 1) - C_i^k.$$

Утверждение 1. Кусочно-линейная аппроксимация $A_{vt} \omega_v + B_{vt} \varphi_i + D_{vt}$ поверхности $\omega_v \varphi_i$ при $\omega_v \in \{x_i, x_j, y_i, y_j\}$ не зависит от знака приращения параметров $\{x_i, x_j, y_i, y_j\}$.

Доказательство. Утверждение 1 означает, что одноименные по t уравнения набора аппроксимирующих плоскостей поверхностей $\omega_v \varphi_i$ и $(-\omega_v) \varphi_i$ имеют идентичный набор коэффициентов A_{vt}, B_{vt}, D_{vt} , $t = \overline{1, T}$. Этот факт следует из симметричности поверхности $\omega_v \varphi_i$ относительно координатной оси $O\omega_v$.

Замечание 1. Возможны различные варианты аппроксимации поверхностей $\Gamma_v = \varphi_i \omega_v$, $v = \overline{1, 5}$. В данной статье используется триангуляция, фрагмент которой представлен в табл. 1.

Таблица 1

Плоскость	ω_v	φ	$\omega_v \varphi$	A	B	D
1	0,01	0,12	0,0012	0,00991	0,00915	0
	1,01	0,01	0,0101			
	0	0,00	0			
2	0	0,12	0	0,12	1,01	-0,1212
	1,01	0,12	0,1212			
	1,01	0,00	0			
...

Таким образом, линейризованная постановка исходной задачи размещения такова:

$$u^* = \arg \min_{u \in D^L \subset E^{3N+1}} cu, \quad (12)$$

где область D^L определяется ограничениями (8), (9).

Конструктивные свойства задачи (10)

Для упорядочения схемы определения направления движения отметим следующий факт.

Утверждение 2. При выборе направления движения функция f_{ij}^{hl} выглядит так:

$$A^L(x_j - x_i) + B^L(y_j - y_i) + (C_1^j B_{5t} + C_1^j a_h^j - C_2^j) \varphi_j + (C_1^j A_{5t} + C_1^j a_k^i + C_2^j) \varphi_i + C_1^j D_{5t} - C_i^k. \quad (13)$$

Доказательство. Положим $\varphi_i \in [0, \pi]$. Без потери общности можно считать, что вектор значений независимых переменных u^h на $(h+1)$ -й итерации имеет вид $u^h = (x_1, y_1, 0, x_2, y_2, 0, \dots, x_N, y_N, 0)$. Тогда аппроксимирующие плоскости (13) поверхностей $\omega_v \varphi_i$ на основе Утверждения 1 имеют одинаковые одноименные коэффициенты, т.е.

$$A_{1t} = A_{2t} = A_{3t} = A_{4t}, \quad B_{1t} = B_{2t} = B_{3t} = B_{4t}, \\ D_{1t} = D_{2t} = D_{3t} = D_{4t}.$$

Следовательно,

$$C_{1k}^i A_{1t} + b_k^i A = C_{1k}^i A_{2t} + b_k^i A, \\ C_{2k}^i A_{3t} + b_k^i B = C_{2k}^i A_{4t} + b_k^i B. \\ (C_{1k}^i A_{1t} + b_k^i A) x_j - (C_{1k}^i A_{2t} + b_k^i A) x_i + (C_{2k}^i A_{3t} + b_k^i B) y_j - (C_{2k}^i A_{4t} + b_k^i B) y_i + (C_1^j B_{5t} + C_1^j a_h^j - C_2^j) \varphi_j + (C_1^j A_{5t} + C_1^j a_k^i + C_2^j) \varphi_i + D, \\ \text{где } D = C_1^j D_{5t} + C_1^j (b_k^i + b_h^j - 1) - C_i^k.$$

Более того, полагая $b_k^i = 1, b_h^j = 1$, получаем, что коэффициент при переменной φ_i $C_{1k}^i B_{1t} - C_{1k}^i B_{2t} + C_{2k}^i B_{3t} - C_{2k}^i B_{4t} + C_1^j A_{5t} + C_1^j a_k^i + C_2^j$ становится равным $C_1^j A_{5t} + C_1^j a_k^i + C_2^j$.

Отметим, что по постановке задачи $x_i \geq 0, y_i \geq 0, i = \overline{1, N}$, тогда как угол поворота $\varphi_i \in [-\pi, \pi]$. Таким образом, на φ_i не наложены ограничения по знаку (отрицательный угол означает поворот против часовой стрелки). По-

этому постановку задачи необходимо несколько изменить в рамках стратегии активного набора. Модификация заключается в замене переменных φ_i разностью двух переменных: $\varphi_i = (\vartheta_i - w_i)$, где $\vartheta_i \geq 0$ и $w_i \geq 0$.

При этом оптимальное решение будет иметь значения $\vartheta_i = 0$ (тогда $\varphi_i = -w_i$) или $w_i = 0$ (тогда $\varphi_i = \vartheta_i$).

В общем случае направление спуска p^h – столбец матрицы \bar{A}^{-1} активных (обращающихся в ноль на h -й итерации) ограничений задачи, номер столбца соответствует отрицательной компоненте вектора λ множителей Лагранжа.

Утверждение 3. Для задачи (12) вектор λ множителей Лагранжа – g -я строка матрицы \bar{A}^{-1} , где g – номер столбца матрицы коэффициентов A при переменной z .

Доказательство. Вектор λ множителей Лагранжа есть решение системы уравнений $\bar{A}^T \lambda = c$. При этом вектор c содержит только одну ненулевую компоненту – в строке, номер которой совпадает с номером столбца матрицы A при переменной z . Следовательно, вектор λ представляет собой g -й столбец матрицы $(A^T)^{-1}$, очевидно, это также g -я строка матрицы A^{-1} .

Пример 1. Пусть задана полоса $W=7$ и объект $R: \{(-4,1), (1,-3), (3,2)\}$. Координаты полюса $(x, y, \varphi) = (4,3,0)$ (рис. 2) определяются системой:

$$\begin{cases} x + a_{13}(x^1, y^1)\varphi = 4 \\ +y + a_{23}(x^2, y^2)\varphi = 3 \\ -x + a_{33}(x^3, y^3)\varphi + z = 3 \\ +\varphi = 0 \end{cases} \quad (14)$$

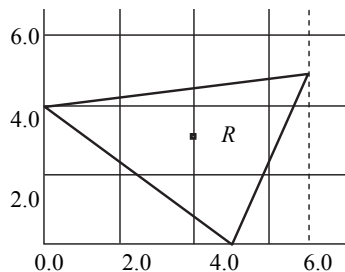


Рис. 2. Начальное положение объекта R

Введем в рассмотрение угол $\varphi = (\vartheta - w)$. Тогда матрица A активного набора имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} x & y & u & w & z \\ 1 & 0 & 0,24 & 0,76 & 0 \\ 0 & 1 & -0,82 & 1,18 & 0 \\ -1 & 0 & -1,82 & 2,18 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1,24 & 0,76 \\ 0 & 1 & 0 & 0,82 & -1,18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 & 1 & 0,58 & -1,42 \end{bmatrix}.$$

Вектор λ – пятая строка матрицы A^{-1} – содержит только одну отрицательную компоненту λ_5 . Следовательно, уравнение 5 системы (14) выводится из рабочего списка, параметр φ получает отрицательное приращение. Вектор спуска p – пятый столбец матрицы A^{-1} : $p^T = (0,76; -1,18; 0; -1)$.

Пример 2. Рассмотрим размещение объектов $\{R_1, R_2, R_3\}$. Ширина полосы $W=10$ (рис. 3). Начальное размещение $u^0 = (5; 3; 0; 6,5; 8; 0; 7,34; 6,62; 0)$ задается системой уравнений $Au = B$ (рабочий список в терминах [7]). Матрица A с учетом ввода в рассмотрение параметров φ_i объектов размещения (но без учета отрицательной составляющей w_1, w_2, w_3) имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \varphi_1 & x_2 & y_2 & \varphi_2 & x_3 & y_3 & \varphi_3 & z \\ -2,1 & -7 & -13,7 & 2,1 & 7 & 16,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4,9 & 6,1 & -12,5 & 4,9 & -6,1 & 13,5 & 0 \\ -2,1 & 7 & -12,5 & 0 & 0 & 0 & 2,1 & 7 & 14,5 & 0 \\ 1 & 0 & 3,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3,18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1,8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1,63 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вектор множителей Лагранжа – девятая строка A^{-1} содержит два отрицательных элемента:

$$\boxed{0,483 \mid 0 \mid -0 \mid 1 \mid 3,373 \mid -7,436 \mid 1 \mid 3,373 \mid -20,259 \mid 0,3E-16}$$

Другими словами, можно исключить из рабочего списка шестое ограничение: $\varphi_1 = 0$, причем $\varphi_1 = u_1$, т.е. угол φ_1 может увеличиваться.

ваться (соответственно объект R_1 – поворачиваться по часовой стрелке), вектор p направления движения имеет вид:

$$(-3,3; -3,18; 1; -7,436; -3E-16; -1,5E-16; -7,5251; -0,0726; 0; -7,4363).$$

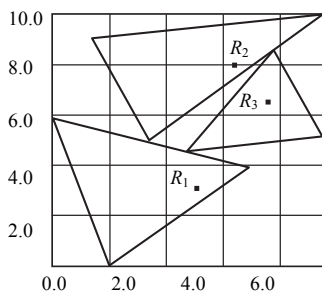


Рис. 3. Начальное положение объектов размещения (Пример 2)

Если принять исключаемым девятое ограничение $\varphi_3 = 0$, и снова $\varphi_3 = u_3$, т.е. угол φ_3 может увеличиваться, и вектор p направления движения становится равным

$$(1,7E-15; 1,05E-15; -2,01E-16; -18,43; 3,12; 1; -16,4095; 2,707; 0; -20,259).$$

Определение длины шага

В соответствии с идеологией активного набора (линейного программирования) процедура определения длины шага осуществляется на выпуклой области допустимых решений. В общем случае область $D^L \subset E^{3N+1}$ – несвязная невыпуклая многогранная область. Поэтому в дальнейшем понадобятся следующие свойства области D^L .

Свойство 1. $D^L = \bigcup_{q=1}^Q D_q^L$, где D_q^L – компонента связности области D^L .

Свойство 2. Неравенства систем (8) и (9), становясь активными ограничениями, определяют условия касания объекта границы R_0 или касания пары размещаемых объектов.

Свойство 3. Каждая компонента связности D_q^L области D^L может быть представлена в виде объединения конечного числа G_q выпуклых многогранных подобластей $D_{q_g}^L : D_q^L = \bigcup_{g=1}^{G_q} D_{q_g}^L$.

При этом границу области $D_{q_g}^L$ задает набор уравнений, содержащий, по крайней мере, по одному из ограничений каждого набора вида (8), (9).

Свойство 4. Для точки u^h , включая u^* , справедливо соотношение $u^h \in \bigcap_{r>1} D_{q_r}^L$, где $D_{q_r}^L$ – выпуклая подобласть области D^L .

Общая схема метода поиска локального минимума на компоненте связности имеет вид:

1. Определение начального размещения u^0 .
2. Определение некоторой выпуклой подобласти $D_{q_r}^L, u^0 \in D_{q_r}^L$.

3. Решение задачи $u_{q_r}^* = \arg \min_{u \in D_{q_r}^L} cu$. Опреде-

ление некоторой выпуклой подобласти $D_{q_{r+1}}^L$ такой, что $u_{q_r}^* \in D_{q_{r+1}}^L, u_{q_r}^* \neq \arg \min_{u \in D_{q_{r+1}}^L} cu$. Если та-

ковая найдется, положить $r = r + 1$ и перейти к Шагу 3. Если нет – точка есть локальный минимум задачи.

Замечание 3. В качестве начального размещения может быть использовано решение задачи размещения ориентированных многоугольных объектов в полосе [7].

Рассмотрим Задачу Этапа 3. Текущее приближение u^h , как и оптимальная точка $u_{q_r}^*$ задачи, описывается системой $F^* u = 0, I = 3N + 1$ активных в точке u ограничений из систем $\{F_1^L(u) \geq 0, F_2^L(u) \geq 0\}$ наборов линейных неравенств.

3.1. Определение направления движения (алгоритм решения рассмотрен ранее).

3.2. Определение величины шага $\bar{\alpha}$ [6] по формуле

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \min_i \gamma_i, & \text{если } a_i^T p^h < 0 \text{ для некоторого } i \notin I, \\ +\infty, & \text{если } a_i^T p^h \geq 0 \text{ для всех } i \notin I, \end{cases}$$

$$\text{где } \gamma = \left\{ \frac{b_i - a_i^T u^h}{a_i^T p^h} \mid i \notin I \text{ и } a_i^T p^h < 0 \right\}. \quad (15)$$

Замечание 4. Список неактивных ограничений, которые необходимо проверять на возможность включения в рабочий список на следующей итерации, можно существенно ограничить, принимая во внимание свойство выпуклости объектов размещения.

Продолжим Пример 2. В табл. 2 даны результаты вычисления длины шага до неактив-

ных ограничений линейризованной задачи (12) с использованием подхода (15) (представлены только те ограничения, для которых $a_i^T p^h < 0$). Анализ данных (см. табл. 2) показывает, что минимальный неотрицательный допустимый шаг $\bar{\alpha}$ равен 0,12 (ограничение по φ). Следовательно, активным на следующем шаге алгоритма становится ограничение $\varphi = 0,12$.

Таблица 2

Сторона полосы	Вершина i объекта R	x^i	y^i	Функция ограничения a_i^T				$a_i^T p^h$	b_i	$a_i^T u^h$	$\frac{b_i - a_i^T u^h}{a_i^T p^h}$
				x_1	y_1	φ_1	z				
левая	2	1	-3	1	0	-3,06	0	-4,3	-1	4	1,16289
нижняя	3	3	2	0	1	-3,12	0	-2,3	-2	3	2,17391
верхняя	1	-4	1	0	-1	-3,94	0	-4,76	-6	-3	0,63025
Ограничение по φ				0	-1	0	-1	-0,12	0	-0,12	0,12
				$\bar{\alpha}$							
								0,12			

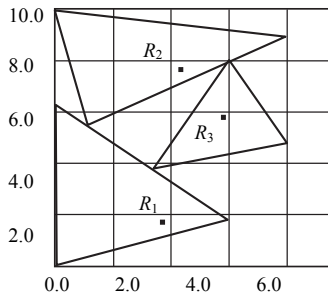


Рис. 4. Приближение к локальному минимуму задачи Примера 2

Отметим, что на направление движения такая замена не повлияет, так как матрица ограничений A , и соответственно обратная матрица A^{-1} не изменится. Другими словами, пересчитывать при такой замене матрицу A^{-1} нет необходимости.

Введем следующие правила априорного выбора подмножества неактивных ограничений, возможных для включения в рабочий список на следующей итерации решения.

Правило 1. Среди неактивных ограничений, описывающих условия (3), для проверки выбираются «смежные» по диапазону изменения углов поворота.

Легко показать, что такая редукция множества неактивных ограничений возможна благодаря выпуклости объектов размещения.

Правило 2. Если компонента вектора направления p^h , соответствующая параметру φ_i , равна

нулю (или «почти» ноль), то объект R_i считается ориентированным на этой итерации алгоритма.

Заключение. На базе исследования оптимизационной задачи размещения многоугольных неориентированных объектов в полосе, рассматриваемой в линейризованной постановке, и выделенных дополнительных свойствах линейризованной области допустимых решений задачи разработан метод поиска локального минимума функции цели, основанный на использовании идеи активного набора. Предложенный подход легко адаптируется для решения задач размещения неориентированных невыпуклых геометрических объектов в полосе и представляет собой теоретический базис при разработке программного обеспечения решения практических задач оптимизации размещения неориентированных многоугольных объектов.

1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.
2. Гиренко К.А. Математична модель та метод розв'язання задачі розміщення неорієнтованих складених геометричних об'єктів: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Харків, 2009. – 18 с.
3. Новожилова М.В. Методологія розв'язання оптимізаційних нелінійних задач геометричного проектування // Вісн. ЗДУ. – 1999. – № 1. – С. 65–69.
4. Чуб І.А., Новожилова М.В. Построение линейной аппроксимации области допустимых решений задачи размещения неориентированных геометрических объектов // Математичні машини і системи. – 2010. – № 2. – С. 99–107.
5. Чуб І.А., Новожилова М.В. Определение направления спуска в линейризованной задаче размещения неориентированных геометрических объектов // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2010. – № 2 (23). – С. 94–100.
6. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 509 с.
7. Stoyan Yu.G., Novozhilova M.V., Kartashov A.V. Mathematical model and method of searching for a local extremum for the non convex oriented polygons allocation problem // Europ. J. of Operational Res. – 1996. – № 92. – P. 193–210.

Поступила 16.03.2011
Тел. для справок: (057) 707-3490; 706-2049 (Харьков)
E-mail: chubia@nuczu.edu.ua
© И.А. Чуб, М.В. Новожилова, 2011