УДК 519.6

В.І. Межуєв, О.М. Литвин

# Метамодель для візуального моделювання багатовимірних предметних областей та її практичні застосування

Предложен оригинальный метод визуального моделирования свойств многомерных предметных областей, в основу которого положено объединение геометрической информации о пространственной структуре объектов предметной области и специфическая для нее информация, заданная на геометрических множествах. Такие геометрические множества формируются на основе базовых объектов, образующих метамодель *G* для порождения моделей предметных областей.

An original approach to the visual modeling of the properties of multidimensional subject domains is suggested. The integration of the geometrical information about the spatial structure of objects and the specific to a subject domain information, set on the geometrical sets, is the basis of the original method. Such geometrical sets are formed on the basis of objects which form the metamodel *G* for producing the model of subject domains.

Запропоновано оригінальний метод візуального моделювання властивостей багатовимірних предметних областей, в основу якого покладено поєднання геометричної інформації про просторову структуру об'єктів предметної області та специфічна для неї інформація, задана на вказаних геометричних множинах. Такі геометричні множини формуються на основі базових об'єктів, що утворюють метамодель *G* для породження моделей предметних областей.

**Вступ**. Мовою науки є математика, і саме це зумовлює використання її конструкцій для побудови моделей різноманітних предметних областей (ПрО), зокрема фізичних процесів та явищ. Зазначимо, що складність сучасних математичних методів приводить до необхідності пошуку новітніх методологій та технологій моделювання, що можуть бути використані фахівцями, які не мають відповідної математичної підготовки.

Зараз у системній інженерії широке застосування отримала методологія предметно-орієнтованого моделювання (*Domain Specific Modeling – DSM*) [1]. Сутність її полягає у створенні мов моделювання, орієнтованих на розв'язання задач певної ПрО. Такі мови називають предметно-орієнтованими (*Domain Specific Language – DSL*) [2], на відміну від мов програмування або моделювання загального призначення (мова *C* або ж *UML*). Необхідними етапами розробки *DSL* є визначення її синтаксису та семантики, що здійснюється в поняттях певної *метамоделі* [3].

Проте зазначимо, що метамоделі, які отримали розвиток у *DSM* [4] спрямовані на переважну побудову концептуальних моделей ПрО, тобто власне моделей знання про неї [5]. У даній статті обґрунтовано підхід до побудови метамоделі ПрО на підставі математичних абстракцій, що відбивають їх сутність. Поняття *метамодель* використовується як множина математичних абстракцій та методів, що дозволяють побудувати моделі ПрО шляхом використання певним чином спроектованих комп'ютерних інструментів.

Зазначимо, що побудові мов моделювання ПрО присвячено значну кількість наукових публікацій [6]. Особливість методу авторів полягає у поєднанні підходу системної інженерії до побудови моделей ПрО - *Model Driven Engineering* [7] та математичних методів моделювання ПрО [8–11].

У даній статті вводиться та досліджується геометрична метамодель *G* для побудови математичних моделей багатовимірних ПрО. Але запропонований підхід можна використовувати в інших ПрО, зокрема для моделювання програмних систем [12, 13].

**Принципи побудови метамоделі ПрО**

Необхідність моделювання широкого кола ПрО потребує визначення *системи загальних понять* як основи метамоделі ПрО. У той же час ця вимога веде до підвищення рівня абстрактності понять метамоделі. Саме тому разом із математичними абстракціями та методами, що використовують символьно-операторну математичну мову, в основу пропонованої метамоделі *G* покладено систему геометричних об'єктів.

**Ключові слова**: метамодель, модель, предметна область.

Побудована на основі $G$ візуальна система моделювання поєднує предметно-образний та абстрактно-логічний впливи на користувача. Знаково-символьний та образно-наочний плани діяльності сприяють інтеграції понятійно-знакової та чуттєво-наочної форм психічного відображення дійсності. Крім того, фіксація у предметах діяльності (у даному випадку – у геометричних об'єктах) суттєвих властивостей ПрО дозволяє поєднати матеріальні та розумові дії, що відбуваються у процесі наукового дослідження.

У цьому випадку якісної зміни зазнає діяльність із побудови моделі ПрО, що здійснюється як система візуальних дій (маніпуляцій) з відтвореними на екрані ЕОМ комп'ютерними об'єктами. Саме тому побудований на таких принципах комп'ютерний інструмент можна віднести до систем візуального моделювання ПрО.

Розробка метамоделі потребує вивчення та узагальнення структури та інших властивостей моделей ПрО. У даній статі розглядатимемо фізичні моделі, структурування яких пропонуємо здійснити, взявши за основу *спосіб просторового розподілу* властивостей (у самому загальному випадку дискретний або неперервний). Конкретизуємо цю думку на прикладі.

Як і будь яка інша система, метамодель моделей ПрО складається з елементів. Базовий елемент метамоделі у нашому підході є елементарним носієм фізичної властивості об'єкта ПрО. Такий базовий елемент одержав назву *точка*. Елемент *точка* є узагальненою моделлю (або ж метамоделлю), яка у залежності від наданих властивостей (наприклад, фізичних величин) дозволяє відтворювати різні *за сутністю* фізичні абстракції та моделі. Наведемо приклади фізичних моделей, що дозволяє відтворити цей елемент метамоделі: матеріальна точка (кінематичні параметри руху $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ та маса $m$), точковий заряд (заряд $q$ та кінематичні параметри), джерело коливань (гармонічний осцилятор) або математичний та фізичний маятник (амплітуда $a$, період $T$, частота $\nu$, просторові координати) та ін.

У наведених прикладах розглядається *точка* як носій фізичних властивостей у реальному просторі, але ця абстракція може характеризувати й інші фізичні ПрО (наприклад, у просторі $P$, $V$, $T$ *точка* вже буде визначати стан ідеального газу). Звичайно, може бути доведена застосовність такої абстракції до моделювання інших ПрО.

Головною метою виділення елементарного носія властивості ПрО як елемента метамоделі є необхідність побудови більш складних моделей ПрО шляхом встановлення зв'язків між елементарними складовимими метамоделі (тобто методу композиції, що також є складовим елементом $G$).

Якщо за критерій взяти *спосіб* просторового розподілу та взаємозв'язку фізичних властивостей, то використання такої абстракції як *точка* дозволяє побудувати та візуалізувати наступні фізичні абстракції та моделі: система матеріальних точок; диполь (квадруполь, октуполь); модель полярної та неполярної молекули; модель речовини (ідеальний газ, ідеальна рідина, модель абсолютно твердого та пружного тіла) і т.ін.

Із наведених прикладів випливає, що оперування абстрактними поняттями метамоделі надає можливість створення моделей, які мають різну фізичну сутність (інтерпретацію). Побудова моделей реальних фізичних об'єктів у цьому випадку полягає у конкретизації абстрактних геометричних понять шляхом наділення їх змістовими властивостями, міра яких фіксується фізичними величинами (наприклад, модель дроту із струмом можна розглядати як розподіл величини $I$ вздовж такого модельного об'єкта як *лінія*; пластину конденсатора можна уявити як розподіл величини $q$ на *площині* і т.ін.).

Отже, різні за сутністю фізичні моделі будуються за допомогою елементів метамоделі, що відбивають цілий клас об'єктів схожої математичної природи. Як ще один елемент пропонованої метамоделі визначимо *поверхню*, під яким розуміють носій деякого розподілу скалярної або векторної величини. Скалярним полем, наприклад, можна зобразити інтенсивність світлової хвилі в явищах дифракції та інтерференції, потенціал електростатичного поля точкових зарядів, залежність густини речовини від просторових координат та ін.

Отже, для побудови моделей ПрО пропонуємо використовувати метамодель, що складається з *базових* геометричних об'єктів. Під базовими розуміємо об'єкти, що відповідають вимірностям простору, а саме: точку, лінію, поверхню та область тощо. Така метамодель ПрО зумовлена тим, що ці об'єкти дуже часто є результатами абстрагування від структури реальних процесів та явищ (наприклад, модель матеріальної точки, тонкої струни, модель мембрани та ін.).

Покладені в основу метамоделі $G$ геометричні поняття на програмному рівні є *типами базових структур даних* (окрема фізична величина, лінійний, поверхневий та просторовий розподіл фізичних величин є масивами різної вимірності). Тож для програмування з метою відтворення моделей з різних ПрО використовуються змінні, відповідні цим базовим типам. Але найбільш важливою складовою метамоделі є множина математичних методів, застосовна до цих базових типів (наприклад, інтегрування вздовж контуру). Це можливо завдяки універсальності інформаційних процесів, що дозволяють здійснити єдиний підхід до вивчення широкого кола ПрО.

Зазначимо, що при традиційному підході до розгляду проблеми застосування ЕОМ у процесі наукового пізнання, саме на останньому етапі – етапі дослідження виражених у знаково-символьній формі математичних рівнянь, стає необхідним використання обчислювальної техніки (етап обчислювального експерименту). Сутність нашого підходу полягає у розгляді ЕОМ не лише як інструмента чисельного чи символьного розв'язування математичних рівнянь, але і як засобу побудови та інтерпретації моделі, що дозволяє замкнути та прискорити цикл наукового пізнання (вхідні факти $\rightarrow$ комп'ютерна модель $\rightarrow$ обчислювальний експеримент $\rightarrow$ нові факти) [14]. Запропонований підхід дозволяє здійснити інтерпретацію результату розв'язку у поняттях вхідної задачі, тому що умова та результат розв'язування задачі формулюються у поняттях єдиної метамоделі $G$ :

$$G \triangleq \{\{T\},\{R\},\{C\}\}\text{, де}$$

$\{T\}$ - множина типів для породження геометричних об'єктів $\Gamma$ моделі ПрО,

$\{R\}$ - сукупність правил побудови моделей,

$\{C\}$ - множина математичних методів, застосовних до модельних об'єктів.

$$\Gamma \triangleq \{\{P_1, P_2 ... P_M\}, \{L_1, L_2 ... L_N\},$$
$$\{S_1, S_2 ... S_O\}, \{D_1, D_2 ... D_P\}\},$$

де

$\{P_1, P_2, \ldots, P_M\}$ - множина точок,

$\{L_1, L_2, \ldots, L_N\}$ - множина ліній,

$\{S_1, S_2, \ldots, S_O\}$ - множина поверхонь,

$\{D_1, D_2, \ldots, D_P\}$ - множина областей,

$M + N + O + P = K$ - загальна кількість геометричних об'єктів моделі Про.

Породження моделі ПрО з метамоделі $G$ здійснюється шляхом застосування правил $\{R\}$, а саме - створення множини екземплярів об'єктів $\{\Gamma\}$ з типів $\{T\}$, композиції $\{\Gamma\}$, накладання обмежень на елементи $\{\Gamma\}$ (наприклад із лінії отримується відрізок, просторові області обмежуються площинами та ін.), задання функцій розподілу $\{F\}$ на $\{\Gamma\}$, врахування заданих на $\{\Gamma\}$ вимірностей фізичних та інших величин, а також застосування математичних методів $\{C\}$, загальних для великого класу ПрО (зокрема, інтегрування та диференціювання).

Зазначимо, що функції розподілу $\{F\}$ та закони буття ПрО (зокрема, взаємодії між об'єктами ПрО) не є частиною метамоделі $G$ та входять до складу конкретної моделі ПрО.

Можна зазначити, що з точки зору системної інженерії як метамодель $G$, так і породжена з неї модель ПрО, знаходяться у межах загальновідомого *Entity-Relationship* підходу [15] до моделювання.

**Моделювання законів фізичних ПрО**

Будь-яка властивість об'єкта моделі визначає *спосіб* прояву тих чи інших його сторін стосовно інших об'єктів, з якими він вступає у *взаємодію*. Так, наділення об'єкта *точка* фізичною величиною заряду $q$ детермінує можливість електромагнітної взаємодії, маси $m$ – гравітаційної взаємодії з іншими об'єктами, що мають аналогічну характеристику.

Модель ПрО породжується із $G$ шляхом надання елементам метамоделі властивостей, істотних для ПрО. У той же час саме встановлення закономірних (функціональних та генетичних) зв'язків між елементами моделі є сутністю побудови математичної моделі ПрО. Наприклад, заряд породжує електричне поле (зв'язок між моделями точкового заряду та поля має форму $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{q}{r}$ або $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$); у свою чергу це поле діє силою на наявні у ньому електричні заряди ($\vec{F} = q\cdot\vec{E}$); відтворення законів зіткнення ідеальних гладких кульок дає можливість створення моделі ідеального газу і т.ін.

Відзначимо, що саме вид зв'язків між елементами моделі зумовлює сутність модельованого об'єкта. Наприклад, така фізична абстракція як *траєкторія* є просторовим розподілом векторної величини $\vec{r}$. У той же час розгляд розподілу величини $\vec{r}$ як послідовності дискретних компонентів (власне, об'єктів *точка*) дозволяє шляхом встановлення зв'язків між окремими елементами системи побудувати модель матеріального тіла. Наприклад, визначивши силу, що діє між сусідніми елементами $\vec{r}_n$ та $\vec{r}_{n+1}$ у формі $\vec{F}_n = k\cdot\left(r_0 - |\,\vec{r}_{n+1}-\vec{r}_n\,|\right)\cdot\frac{\vec{r}_{n+1}-\vec{r}_n}{|\,\vec{r}_{n+1}-\vec{r}_n\,|}$, тобто пропорційною модулю відносного зміщення елементів ($r_0$ – початкова відстань між елементами), одержимо модель пружної нитки (ланцюжка). Надання значення початкової швидкості одному з елементів ланцюжка дозволяє дослідити закономірності виникнення та поширення поздовжніх і поперечних коливань.

Як зазначено раніше, закони буття предметної області є частиною моделі ПрО. Метамодель надає множину математичних методів та алгоритмів, застосовних до цілого класу ПрО.

Так, дослідження математичної моделі у числовій формі потребує переведення рівнянь у вигляд, який можна реалізувати за допомогою ЕОМ, так званий *моделюючий алгоритм*, тобто послідовність елементарних операцій, що відбивають структуру та динаміку зміни стану системи. Наприклад, машинне розв'язання диференціальних рівнянь, необхідних для створення динамічної моделі (та імітації) механічного руху, потребує застосування моделюючого алгоритму у вигляді певної різницевої схеми, яка зводить розв'язування до послідовного обчислення параметрів руху через деякі малі проміжки часу $\Delta t$.

Існування комп'ютерної моделі *матеріальна точка* у часі знаходить своє відображення у зміні її характеристик (кінематичних величин, маси та ін.) відповідно до зміни значення фізичної величини $t$ (часу). Комп'ютер, власне, перераховує характеристики матеріальної точки через певні малі проміжки $\Delta t$, що й дає можливість співвідносити стан моделі у моменти $t_1$ та $t_2$ і, таким чином, здійснювати операції диференціювання та інтегрування за параметром часу. Якщо ці операції здійснюються у реальному масштабі часу, завдяки зв'язку комп'ютерних моделей із таймером ЕОМ, це дозволяє реалізувати імітацію руху.

Отже, множина математичних методів $\{C\}$ є застосовною до типів (модельних об'єктів) $\{T\}$. Побудова математичної моделі ПрО здійснюється шляхом застосування $\{C\}$ для конкретних примірників $\{T\}$, тобто множини $\{\Gamma\}$.

До множини $\{R\}$, що також є важливим елементом метамоделі $G$, входять методи, що шляхом виконання певних предметних дій (маніпуляцій) дозволяють зафіксувати основні властивості форм буття матерії (просторові масштаби, вимірність, часовий інтервал), визначити форму, розміри та структуру $\{\Gamma\}$. Етап визначення просторово-часових властивостей моделі у загальній структурі діяльності з моделювання дозволяє виділити інформацію, необхідну для застосування відповідного математичного апарату $\{C\}$, здійснюючи зв'язок між формальними математичними операціями та їх фізичним змістом. Наприклад, у разі застосування диференціального числення, використання *точки* (комп'ютерного об'єкта як носія елементарної фізичної властивості) дозволяє здійснювати аналіз нескінченно малих змін величин, що характеризують суттєві властивості моделі.

**Функції розподілу властивостей $\{F_k\}$**

Вхідною інформацією для застосування математичних методів $\{C\}$ є набір геометричних об'єктів: $\Gamma_k^n,\ k = 1,...K,\ n = 0,1,2,3$, у точках кожного з яких задано інформацію про деяку характеристику $F(x,y,z,t)$ досліджуваного об'єкта, яка описується функціями $F_k(x,y,z,t)$ у вигляді звужень функції $F$ на відповідних геометричних об'єктах $\Gamma_k^n$: $F\big|_{\Gamma_k^n} = F_k\big|_{\Gamma_k^n}, k=\overline{1,K}$, де

$n$ - параметр, що визначає розмірність геометричного об'єкта $\Gamma_k^n$,

якщо $n=0$, то $\{\Gamma_k^n\}$ – це нуль-вимірний об'єкт, або точка;

якщо $n=1$, то $\{\Gamma_k^n\}$ – це одновимірний об'єкт, або лінія;

якщо $n=2$, то $\{\Gamma_k^n\}$ – це двовимірний об'єкт, або поверхня;

якщо $n=3$, то $\{\Gamma_k^n\}$ - є деякою областю $D$ у тривимірному просторі $R^3$.

У випадку $n=1$ та $n=2$ такі звуження $F_k$ у математиці називають слідами функції $F(x,y,z,t)$ на відповідних лініях $\Gamma_k^1$ або поверхнях $\Gamma_k^2$.

Взагалі кажучи, задана у точках геометричного об'єкта $\Gamma_k^n$ характеристика $F$ може залежати від $m$ параметрів $s_0, s_1, \ldots, s_m$:

$$F_k(s_0, s_1, \ldots, s_m).$$

Зокрема якими можуть бути геометричні координати даної точки простору, параметр часу, деякі оператори чи функціонали від $F$ (наприклад, швидкість, прискорення та ін.), або деякі інтегральні характеристики (площа, об'єм, сукупний заряд).

Якщо до просторових змінних додається час, то переходимо до розгляду динамічної математичної моделі. Якщо процес стаціонарний, то змінна часу відсутня.

У даній статті розглядається задача відновлення за допомогою $F_k(s_0, s_1, \ldots, s_m)$ додаткової інформації про характеристику $F$ на деякій іншій геометричній множині $P$, яка є підмножиною деякої області $D$, або на декількох множинах $P_q \in D$, $q = 1, \ldots, Q$.

Наприклад, інформація про внутрішню структуру тіла людини може бути отримана на кількох томограмах, розміщених на відповідних площинах. За цією інформацією може виникнути необхідність отримання відповідних зрізів тіла в інших площинах, що не збігаються з отриманими з томографа (докладніше у [16, 17]).

Класи задач, що можна розв'язати у межах запропонованого підходу:

- автоматична побудова структури наближеного розв'язку неоднорідної $3D$ крайової задачі;
- відновлення поверхні $3D$ тіла за допомогою даних радіолокації;
- відновлення внутрішньої структури $3D$ тіла за допомогою томограм;
- відновлення внутрішньої структури кори Землі за допомогою сейсмічної томографії;
- моделювання метаматеріалів та ін.

**Візуальні середовища, побудовані на основі застосування запропонованої мета моделі**

Визначена метамодель була використана для побудови візуальних середовищ для моделювання різних предметних областей.

Рис. 1 та 2 ілюструють застосування підходу для розв'язування задач томографії, а саме відновлення структури тривимірного тіла та пошуку недозволених предметів при митному контролі. В обох випадках базовим поняттям метамоделі, що використовується для побудови моделі предметної області, є поняття поверхні.

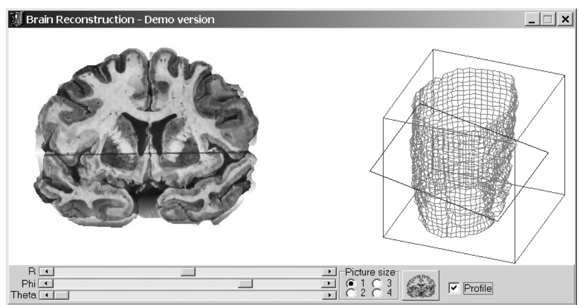


Рис. 1. Використання метамоделі з метою розв'язування задач томографії (відновлення структури тривимірного тіла)

Ця поверхня є носієм фізичних властивостей (а саме отриманої з томографа картини розподілу щільності об'єкта), що слугує вхідною множиною для застосування математичних методів [16, 17].

Рис. 3 відображає розроблену автрами комп'ютерну систему, призначену для моделювання матеріалів із заданими властивостями (так званих метаматеріалів). Як приклад побудована геометрична структура, що є візуальною моделлю кубічної магнітної металічної решітки.

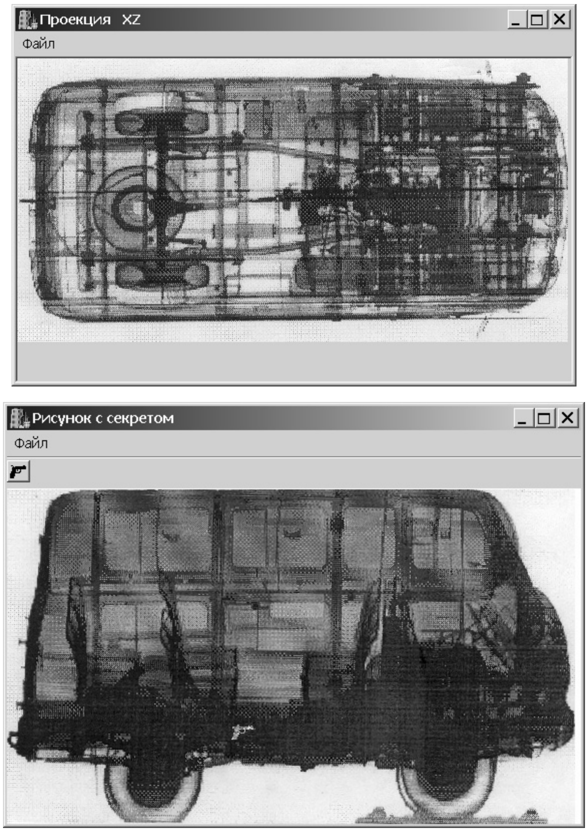


Рис. 2. Використання метамоделі з метою розв'язування задач томографії (пошук недозволених предметів при митному контролі)

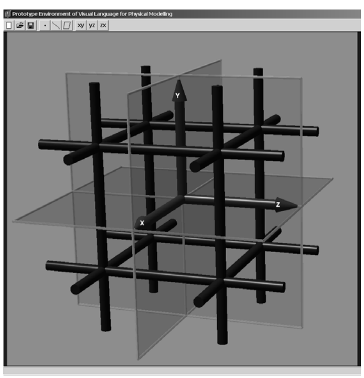

Рис. 3. Використання метамоделі з метою побудови матеріалів із заданими властивостями

Задавши функції розподілу діелектричної проникності та електричної провідності вздовж координат, тобто $\varepsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r})$, шляхом застосування відповідного алгоритму, досліджуємо специфічні оптичні властивості даного метаматеріалу. Зазначимо, що для побудови візуального середовища для моделювання метаматеріалів, розширено метамодель $G$ і додано до неї такі $3D$ об'єкти, як циліндр, піраміда, сфера, конус.

Отже, доцільність введення метамоделі $G$ полягає перш за все у побудові системи комп'ютерних інструментів (візуальних середовищ моделювання), що прискорюють процес наукового чи інженерного дослідження завдяки використанню $\{C\}$ над $\{\Gamma\}$.

У той же час дуже важливими є методи оптимізації побудови математичної моделі. Як приклад розглянемо функцію $F_k(x, y, z, t)$, яка залежить лише від просторових координат та часу $t$ і відновлюється набором звужень $F_k(s_0, s_1, \ldots, s_m)$, $(s_0, s_1, \ldots, s_m) \in \Gamma_k^n$.

При цьому виникає задача оптимального вибору (щодо якості відновлення властивості) множини $P_q \in D$, $q = 1, \ldots, Q$. В даній статті пропонуємо один із можливих підходів вибору множин $P_q$ з метою підвищення точності відновлення характеристики $F$ для випадку, коли функція $F_k(x, y, z, t)$ входить у рівняння $F_k(x, y, z, t) = 0$, що описує форму зміни поверхні з часом.

**Приклад**. Задано наступний закон зміни площі кола радіуса $R$ з центром у початку координат (0,0).

Вважаємо, що лінія кола деформується так, що її площа залишається незмінною з часом, а форма змінюється так, що в результаті отримуємо еліпс: $\dfrac{x^2}{a(t)^2} + \dfrac{y^2}{b(t)^2} = 1$ із заданою площею $S = \pi R^2$, де $a(t) = A\sin(t) + R$, $b(t) = \dfrac{R^2}{a(t)}$, що випливає з незмінності площі кола.

Або у параметричній формі:

$$\begin{cases} x(t) = a(t)\cos(\varphi) \\ y(t) = b(t)\sin(\varphi) \end{cases}$$

$$0 \le \varphi < 2\pi .$$

Початок відліку часу вважаємо $t = 0$.

Оскільки при $t = 0$, $a(0) = R$, $b(0) = R$, то площа отриманої у результаті деформації області буде незмінною і дорівнюватиме $S = \pi R^2$, бо згідно з формулою площа еліпсу дорівнює $S = \pi a(t) b(t)$.

Розглядатимемо інформацію про форму деформованої лінії у моменти часу $t = T_p$, $p = 1, \ldots, P$ у вигляді двох наборів точок, які отримуються у результаті перетину відповідної області прямими (рис. 4):

$$x = x_i, i = 1 \ldots I$$

$$y = y_i, y = 1 \ldots J$$

$$M_1 : (x_i, Y_i(p)), \quad i = 1 \ldots I, \quad p = 1 \ldots P .$$

$$M_2 : (X_j(p), y_j), \quad j = 1 \ldots J, \quad p = 1 \ldots P .$$

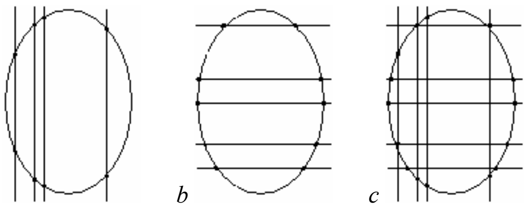

Рис. 4. Перетини еліпсу наборами прямих: $a - M_1$; $b - M_2$; $c - M_1 \cup M_2$

Задача полягає у відновленні форми лінії аналітичного вигляду на основі кожного з наборів $M_1$ та $M_2$ точок, а також у дослідженні умов, за яких одночасне використання обох наборів точок може підвищити точність відновлення форми лінії.

Для того, щоб обґрунтувати актуальність такої задачі, достатньо відзначити, що якщо обидва набори точок збігаються (рис. 5), то ніяким алгоритмом, що використовує інформацію кожного з них, неможливо покращити наближення.

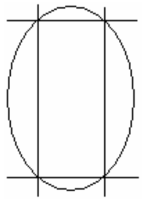
Рис. 5. Збіг точок перетинів еліпсу, які належать наборам прямих $M_1$ та $M_2$

У цій статті пропонується наступний алгоритм побудови множини $M_2$, який істотно спирається на заданий набір точок $M_1$ і дозволяє покращити точність відновлення лінії в кожний момент часу $t$.

Опишемо пропонований алгоритм покроково.

К р о к 1. За даними точками множини $M_1$ будуємо сплайн $S(x)$ степеня $r = 1,2,3,\ldots$, що наближено описує форму лінії у момент часу $t = T_p$.

К р о к 2. Між двома сусідніми точками $(x_i, Y_i(p))$ та $(x_{i+1}, Y_{i+1}(p))$ знаходимо точку $M(x_{i+1/2}(p), Y_{i+1/2}(p)$, яка знаходиться на однаковій відстані (у певному розумінні) від вказаних точок і належить кривій, що визначається даним сплайном.

Цей вибір точки $M$ у даній статті пропонуємо виконувати так: знаходимо координати точки $M$ з умови:

$$\int_{x_i, Y_i(p)}^{M} \sqrt{1 + S'^2}\, dx = \int_{M}^{x_{i+1}, Y_{i+1}(p)} \sqrt{1 + S'^2}\, dx .$$

Зокрема, якщо лінію, яка з'єднує сусідні точки наближуємо сплайном першого порядку, то середня точка $M(x, y)$ визначатиметься так:

$$M(x, y) = M\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) .$$

Отже, запропонований алгоритм дозволяє ставити і розв'язувати задачу про оптимальний вибір сімейства точок на лінії або навіть множині геометричних об'єктів з метою найкращого наближення до функції $F_k(x, y, z, t)$.

У результаті для довільного $t, T_p \le t \le T_{p+1}$ можна знайти координати точки лінії за допомогою відповідного сплайну степеня $r\,(r = 1, 2, 3\ldots)$.

Наприклад, при $r = 1$ отримуємо

$$x_{i,i+1}(t) = \frac{t - T_{p+1}}{T_p - T_{p-1}} x_i + \frac{t - T_p}{T_{p+1} - T_p} x_{i+1}, T_p \le t \le T_{p+1} .$$

**Висновки**. В основу запропонованого методу покладено поєднання геометричної інформації про просторову структуру об'єктів $\{\Gamma_k\}$ ПрО та специфічну для неї інформацію $\{F_k\}$, задану на вказаних геометричних множинах.

Доцільність застосування метамоделі $G$ полягає перш за все у побудові системи комп'ютерних інструментів (візуальних середовищ моделювання), що прискорюють процес наукового або інженерного дослідження завдяки використанню множини математичних методів $\{C\}$ над $\{\Gamma\}$.

Розглянута метамодель застосовується для моделювання фізичних процесів та явищ, розв'язання задач томографії та з метою побудови матеріалів із заданими властивостями (метаматеріалів).

Один із можливих підходів вибору множин Γ запропоновано з метою підвищення точності відновлення характеристики $F$ для випадку, коли функція $F_k(x,y,z,t)$ входить у рівняння $F_k(x,y,z,t)=0$.


1. *http://en.wikipedia.org/wiki/Domain_Specific_Modelling*
2. *http://en.wikipedia.org/wiki/Domain-specific_language*
3. *http://en.wikipedia.org/wiki/Metamodeling*
4. *http://www.metacase.com/dsm.html*
5. *http://en.wikipedia.org/wiki/Ontology_(information_science)*
6. *Киндлер Е.* Языки моделирования. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 288 с.
7. *Jean-Marie Favre*. Towards a Basic Theory to Model Driven Engineering // 3rd Workshop in Software Model Engin., WiSME, 2004.
8. *Рвачёв В.Л.* Геометрические приложения алгебры логики. – К.: Техніка, 1967. – 212 с.
9. *Литвин О.М.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л. Рвачова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2007. – **50**, № 4. – С. 61–82.
10. *Цвицинский И.В.* Математическое моделирование поверхностей сложной формы. – Кишинев: Штиинца, 1984. – 109 с.
11. *Jack Chessa*. Programing the Finite Element Method with Matlab. – http://www.math.mcmaster.ca/~bprotas/ MATH745b/matlab_fem.pdf
12. *Mezhuyev V.*, *Verhulst E.*, *Gjalt de Jong*. An Industrial Case: Pitfalls and Benefits of Applying Formal Methods to the Development of a Network-Centric RTOS. – FM 2008: Formal Methods. – Heidelberg: Springer Berlin, 2008.
13. *Mezhuyev V.*, *Verhulst E.* OpenComRTOS Visual Modelling Environment: the Tool for Distributed Parallel Applications Development // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. – Вип. 423: Фізика. Електроніка.: Темат. вип. «Комп'ютерні системи та компоненти». Ч. І. – Чернівці: ЧНУ, 2008. – С. 88–94.
14. *Бургин М.С.*, *Кузнецов В.И.* Введение в современную точную методологию науки: Структуры систем знания. – М.: Аспект Пресс, 1994. – 304 с.
15. *http://en.wikipedia.org/wiki/Entity-relationship_model*
16. *Lytvyn O.M.*, *Mezhuyev V.I.* Operators of the interlineations of functions of 2 and 3 variables in the 2D and 3D computer tomography // Proc. of the 5th World Congr. on Industrial Process Tomography, Bergen, Norway, 2007. – P. 242–249.
17. *Пат.* на винахід №78568. Спосіб відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта / І.В. Сергієнко, О.М. Литвин, В.І. Межуєв. – 2007. – 8 с.



Поступила 02.03.2010


Тел. для справок: (093) 854-4594, (099) 780-8039 (Бердянск, Харьков)
*E-mail*: *mejuev@ukr.net, academ_mail@ukr.net*



●


В.И. Межуев, О.Н. Литвин


## Метамодель для визуального моделирования многомерных предметных областей и ее практические применения

**Введение**. Язык науки – математика, и именно это обуславливает применение ее конструкций для построения моделей различных предметных областей (ПрО), в частности физических явлений и процессов. Заметим, что сложность современных математических методов приводит к необходимости поиска новых методологий и технологий моделирования, которые могут быть применены специалистами, не имеющими соответствующей математической подготовки.

В настоящее время в системной инженерии широкое распространение получила методология предметно-ориентированного моделирования ( *Domain Specific Modeling – DSM*) [1]. Сущность ее состоит в создании языков моделирования, специально ориентированных на решение задач определенной ПрО. Такие языки называют предметно-ориентированными (*Domain Specific Language – DSL*) [2], в отличие от языков программирования или моделирования общего назначения (язык *C* или *UML*). Необходимый этап разработки *DSL* – определение его синтаксиса и семантики, что осуществляется в понятиях определенной *метамодели* [3].

Однако заметим, что метамодели, получившее широкое распространение в *DSM* [4], основаны на построении концептуальных моделей ПрО, т.е. собственно моделей знания о ПрО (характерный пример которых – онтологии [5]). В данной статье обоснован подход к построению метамоделей ПрО на основании математических абстракций, отражающих их закономерности. Понятие *метамодель* используем как множество математических абстракций и методов, позволяющих строить модели ПрО путем применения определенным образом спроектированных компьютерных инструментов.

Заметим, что вопросу построения языков моделирования ПрО посвящено значительное количество научных публикаций [6]. Отличительная особенность подхода авторов состоит в объединении методов системной инженерии к построению моделей ПрО, т.е. *Model Driven Engineering* [7] и математических методов моделирования ПрО [8–11].

В статье предложена геометрическая метамодель *G* для построения математических моделей многомерных ПрО. Однако предложенный подход может использоваться и в других ПрО, в частности, для моделирования программных систем [12, 13].

**Принципы построения метамодели *G***

Необходимость моделирования широкого круга ПрО требует определения системы общих понятий, как основы метамодели ПрО. В то же время это требование приводит к росту уровня абстрактности понятий метамодели. Именно поэтому вместе с использующими символьно-операторный язык математическими абстракциями и методами в основу предлагаемой метамодели *G* положена система геометрических объектов.

Построенная на основе *G* визуальная система моделирования объединяет предметно-образное и абстрактно-логическое воздействие на пользователя. Знаково-символьный и образный планы деятельности пользователя способствуют интеграции понятийной и чувственной форм психического отражения действительности. Кроме того, фиксация в предметах деятельности (в данном случае – геометрических объектах) существенных свойств ПрО позволяет объединить материальные и умственные действия, которые осуществляются в процессе научного исследования.

В этом случае качественно меняется деятельность по построению модели ПрО, которая осуществляется как система визуальных действий (манипуляций) с воссозданными на экране ЭВМ компьютерными объектами. Именно поэтому спроектированный на таких принципах компьютерный инструмент можно отнести к системам визуального моделирования ПрО.

Разработка метамодели требует изучения и обобщения структуры и других свойств моделей ПрО. В данной статье рассмотрим физические модели, структурирование которых предлагается осуществить, взяв за основу *способ пространственного распределения* свойств (в самом общем случае дискретный или непрерывный). Конкретизируем наш подход на примере.

Как и любая другая система, метамодель моделей ПрО состоит из элементов. Базовый элемент метамодели в данном подходе является элементарным носителем физического свойства объекта ПрО. Такой базовый элемент получил название *точка*. Элемент *точка* – обобщенная модель (или метамодель), которая в зависимости от отражаемых свойств позволяет воссоздавать разные по сущности физические абстракции и модели. В данном контексте свойства ПрО фиксируются при помощи физических величин. Приведем примеры физических моделей, позволяющих отразить этот элемент метамодели: материальная точка (кинематические параметры движения $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ и масса $m$); точечный заряд (заряд $q$ и кинематические параметры); источник колебаний (гармонический осциллятор), математический и физический маятник (амплитуда $a$, период $T$, частота $\nu$, пространственные координаты) и др.

В приведенных примерах *точка* рассматривалась как носитель физических свойств в реальном пространстве, однако эта абстракция может отражать и другие физические ПрО (например, в пространстве $P$, $V$, $T$ *точка* уже будет определять состояние идеального газа). Можно доказать применимость этой абстракции к моделированию других (нефизических) видов ПрО.

Главная цель выделения элементарного носителя свойства ПрО как элемента метамодели – необходимость построения более сложных моделей ПрО путем установления связей между элементарными составными метамодели (используя метод композиции, который также является составным элементом *G*).

Если за критерий взять *способ* пространственного распределения и взаимосвязи физических свойств, то использование такой абстракции как *точка* позволяет построить и визуализировать следующие физические модели: система материальных точек; диполь (квадруполь, октуполь); модель полярной и неполярной молекулы; модель вещества (идеальный газ, идеальная жидкость, модель абсолютно твердого и упругого тела) и т.д.

Из приведенных примеров следует, что оперирование абстрактными понятиями метамодели дает возможность создания моделей с разной физической сущностью (интерпретацию). Процесс построения моделей физических ПрО в этом случае состоит в конкретизации абстрактных геометрических понятий путем наделения их содержательными свойствами, мера которых фиксируется физическими величинами. Например, модель контура с током можно рассмотреть как распределение величины $I$ вдоль такого модельного объекта как *линия*; пластину конденсатора можно представить как распределение величины $q$ на *плоскости* и т.д.

Таким образом, разные по сущности физические модели строятся при помощи элементов метамодели, отражающих целый класс объектов схожей математической природы. Как еще один элемент предлагаемой метамодели определим *поверхность*, под которым понимаем носитель некоторого распределения скалярной или векторной величины. Скалярным полем, например, можно представить интенсивность световой волны в явлениях дифракции и интерференции, потенциал электростатического поля системы точечных зарядов, зависимость плотности вещества от пространственных координат и др.

Итак, для построения моделей ПрО предлагается использовать метамодель, состоящую из *базовых* геометрических объектов. Под *базовыми* понимаем объекты, соответствующие размерности пространства, а именно, точку, линию, поверхность и область. Такая метамодель ПрО обусловлена тем, что эти объекты часто представляют собой результат абстрагирования от структуры реальных процессов и явлений (например, модель материальной точки, тонкой струны, модель мембраны и др.).

Положенные в основу метамодели *G* геометрические понятия на программном уровне есть *типами базовых структур данных* (отдельная физическая величина, линейное, поверхностное и пространственное распределение физических величин – массивы разной измеримости). С точки зрения программирования, с целью построения модели ПрО объявляются переменные, соответствующие этим базовым типам. Но наиболее важная составляющая метамодели – множество математических методов, применимых к базовым типам (например, интегрирование вдоль *линии* контура). Заметим, что предлагаемая технология моделирования – возможна только благодаря *универсальности* информационных процессов, позволяющей осуществить единый подход к изучению широкого круга ПрО.

Отметим, что при традиционном подходе к рассмотрению проблемы применения ЭВМ в процессе научного познания, именно на последнем этапе – этапе исследования выраженных в знаково-символьной форме математических уравнений, и становится необходимым использование вычислительной техники (этап вычислительного эксперимента). Сущность нашего подхода состоит в рассмотрении ЭВМ не только как инструмента численного или символьного решения математических уравнений, но и как средства построения и интерпретации модели, что позволяет замкнуть и ускорить цикл научного познания (начальные факты $\rightarrow$ компьютерная модель $\rightarrow$ вычислительный эксперимент $\rightarrow$ новые факты) [14]. Предложенный подход позволяет осуществить интерпретацию результата решения в понятиях входной задачи, так как условие и результат решения задачи формулируется в понятиях единой метамодели $G$:

$$G \triangleq \{\{T\},\{R\},\{C\}\},$$

где

$\{T\}$ - множество типов для порождения геометрических объектов $\Gamma$ модели ПрО,

$\{R\}$ - совокупность правил построения моделей,

$\{C\}$ - множество математических методов, применимых к модельным объектам ПрО.

$$\Gamma \triangleq \{\{P_1, P_2 ... P_M\},\{L_1, L_2 ... L_N\},\{S_1, S_2 ... S_O\},\{D_1, D_2 ... D_P\}\},$$

где

$\{P_1, P_2 ... P_M\}$ - множество точек,

$\{L_1, L_2 ... L_N\}$ - множество линий,

$\{S_1, S_2 ... S_O\}$ - множество поверхностей,

$\{D_1, D_2 ... D_P\}$ - множество областей,

$M + N + O + P = K$ - общее количество геометрических объектов модели ПрО.

Порождение модели ПрО из метамодели $G$ осуществляется путем применения правил $\{R\}$, а именно - создание множества экземпляров объектов $\{\Gamma\}$ из типов $\{T\}$; композиция $\{\Gamma\}$; наложение ограничений на элементы $\{\Gamma\}$ (например, из линии получается отрезок, пространственные области ограничиваются плоскостями и др.); задание функций распределения $\{F\}$ на $\{\Gamma\}$; учет заданных на $\{\Gamma\}$ размерностей физических величин, а также применения математических методов $\{C\}$, общих для объектов метамодели $G$ (в частности, интегрирование и дифференцирование).

Заметим, что конкретные функции распределения $\{F\}$ и законы существования ПрО (в частности, взаимодействия между объектами ПрО) не являются частью метамодели $G$ и входят в состав конкретной модели ПрО.

**Моделирование законов существования физических ПрО**

Любое свойство объекта модели определяет *способ* проявления тех или иных его сторон относительно других объектов, с которыми он вступает во *взаимодействие*. Так, наделение объекта *точка* физическим свойством электрического заряда определяет возможность электромагнитного взаимодействия, массы – гравитационного взаимодействия с другими объектами, имеющими аналогичное свойство.

Таким образом, конкретная модель ПрО порождается из $G$ путем придания элементам метамодели существенных для ПрО свойств, меры которых фиксируются физическими величинами. Для построения математической модели ПрО необходимо установить закономерные (функциональные и генетические) связи между элементами модели. Например, заряд порождает электрическое поле (связь между свойствами моделей точечного заряда и поля имеет форму $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{q}{r}$ или $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$); в свою очередь, это поле действует силой на помещенные в него электрические заряды ($\vec{F} = q\cdot\vec{E}$) и т.д.

Отметим, что именно математическая форма связей между элементами модели и определяет сущность моделируемого объекта. Например, такая физическая абстракция как *траектория* является пространственным распределением векторной величины $\vec{r}$. В то же время рассмотрение распределения величины $\vec{r}$ как последовательности дискретных элементов (собственно, объектов *точка*) позволяет путем установления связей между отдельными элементами системы построить модель материального тела. Например, определив силу, действующую между соседними элементами $\vec{r}_n$ и $\vec{r}_{n+1}$ в виде $\vec{F}_n = k\cdot(r_0 - |\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n|)\cdot\frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n}{|\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n|}$, т.е. пропорциональной модулю относительного смещения элементов ($r_0$ – начальное расстояние между элементами), получим модель упругой нити (цепочки). Присвоение значения начальной скорости одному из элементов цепочки позволяет исследовать закономерности возникновения и распространения продольных и поперечных колебаний.

Как отмечено ранее, законы существования предметной области есть часть модели ПрО. Метамодель же предоставляет множество математических методов и алгоритмов, применимых к целому классу ПрО. Так, исследование математической модели в численной форме требует преобразования уравнений в вид, который можно реализовать с помощью ЭВМ, так называемый *моделирующий алгоритм*, т.е. последовательность элементарных операций, отражающих структуру и динамику изменения состояния системы. Например, машинное решение дифференциальных уравнений, необходимых для создания имитационной модели механического движения, требует применения моделирующего алгоритма в виде определенной разностной схемы, сводящей решение к последовательному вычислению параметров движения через некоторые малые промежутки времени $\Delta t$.

Существование компьютерной имитационной модели *материальная точка* во времени находит свое отражение в изменении ее характеристик (кинематических величин, массы и др.) соответственно изменению значения физической величины $t$ (времени). Компьютер, собственно, пересчитывает значения характеристик материальной точки через определенные малые промежутки времени $\Delta t$, что и дает возможность соотносить состояние модели в моменты $t_1$ и $t_2$ и, таким образом, осуществлять операции дифференцирования и интегрирования по параметру времени. Имитация движения осуществляется выполнением этих операции в реальном масштабе времени.

Таким образом, множество математических методов $\{C\}$ применимо к типам модельных объектов $\{T\}$. Построение конкретной модели ПрО осуществляется путем применения $\{C\}$ для конкретных экземпляров $\{T\}$, т.е. множества $\{\Gamma\}$.

Во множество $\{R\}$, которое также является важным элементом метамодели $G$, входят соответствующие определенным предметным действиям (манипуляциям) методы. Они позволяют зафиксировать основные свойства форм бытия материи (пространственные масштабы, размерность, временной интервал), определить форму, размеры и структуру $\{\Gamma\}$. Этап определения пространственно-временных свойств модели в общей структуре процесса моделирования позволяет выделить информацию, необходимую для применения соответствующего математического аппарата $\{C\}$, осуществляя связь между формальными математическими операциями и их физическим смыслом. Например, в случае применения дифференциального исчисления, использование носителя элементарного физического свойства (компьютерного объекта *точка*), позволяет осуществлять анализ бесконечно малых изменений величин, характеризующих существенные свойства модели.

**Функции распределения свойств $\{F_k\}$**

Входной информацией для применения математических методов $\{C\}$ является набор геометрических объектов: $\Gamma_k^n, k=1,...K, n=0,1,2,3$, в точках каждого из которых задана информация о некоторой характеристике $F(x,y,z,t)$ исследуемого объекта, описываемая $F_k(x,y,z,t)$ в виде сужений функции $F$ на соответствующих геометрических объектах $\Gamma_k^n$:

$$F\big|_{\Gamma_k^n} = F_k\big|_{\Gamma_k^n},\ k=\overline{1,K},$$

где $n$ - параметр, определяющий размерность геометрического объекта $\Gamma_k^n$.

Если $n=0$, то $\{\Gamma_k^n\}$ – это ноль-мерный объект, или точка;

если $n=1$, то $\{\Gamma_k^n\}$ – это одномерный объект, или линия;

если $n=2$, то $\{\Gamma_k^n\}$ – это двумерный объект, или поверхность;

если $n=3$, то $\{\Gamma_k^n\}$ - некоторая область $D$ в трехмерном пространстве $R^3$.

В случае $n=1$ и $n=2$ такие сужения $F_k$ в математике принято называть следами функции $F(x,y,z,t)$ на соответствующих линиях $\Gamma_k^1$ или поверхностях $\Gamma_k^2$.

Вообще говоря, заданная в точках геометрического объекта $\Gamma_k^n$ характеристика $F$ может зависеть от $m$ параметров $s_0,s_1,\dots,s_m : F_k(s_0,s_1,\dots,s_m)$, которыми, в частности, могут быть геометрические координаты данной точки пространства, параметр времени, некоторые операторы или функционалы от $F$ (например, скорость, ускорение и др.) или некоторые интегральные характеристики (площадь, объем, совокупный заряд и др.).

Если к пространственным переменным добавляется время, то переходим к рассмотрению динамической математической модели. Если процесс стационарный, то параметр времени отсутствует.

В статье рассматривается задача восстановления с помощью $F_k(s_0,s_1,\dots,s_m)$ дополнительной информации о характеристике $F$ на некотором другом геометрическом множестве $P$, являющемся подмножеством некоторой области $D$, или на нескольких множествах $P_q \in D$, $q=1,\dots,Q$.

Например, информация о внутренней структуре тела человека может быть получена на нескольких томограммах, размещенных на некоторых плоскостях. По этой информации возникает необходимость получения срезов тела в других плоскостях, которые не совпадают с полученными с томографа [15, 16].

Приведем классы задач, которые можно решить в рамках предложенного подхода:

- автоматическое построение структуры приближенного решения неоднородной 3$D$ краевой задачи;
- восстановление поверхности 3$D$ тела с помощью данных радиолокации;
- восстановление внутренней структуры 3$D$ тела с помощью томограмм;
- восстановление внутренней структуры коры Земли с помощью сейсмической томографии;
- моделирование метаматериалов и др.

**Визуальные среды, построенные на основе предложенной метамодели**

Определенная авторами метамодель была использована для построения визуальных инструментов моделирования различных предметных областей.

Применение подхода для решения задач томографии, а именно, восстановления структуры трехмерного тела и поиска неразрешенных предметов при таможенном контроле показаны на рис. 1, 2. В обоих случаях базовым понятием метамодели, которое используется для построения модели предметной области, являются понятия поверхности.

Эта поверхность есть носителем физических свойств (а именно, полученной с томографа двумерной картины распределения плотности или снимка плоского среза трехмерного объекта) и служит входным множеством для применения математических методов [15, 16].

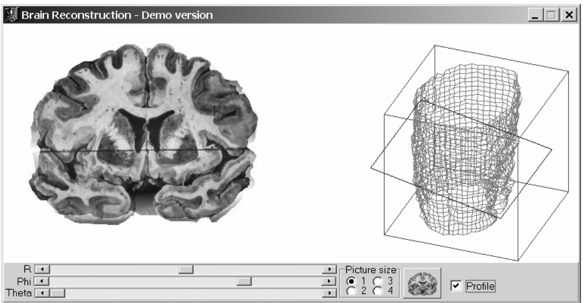


Рис. 1. Использование метамодели с целью решения задач томографии (восстановление структуры трехмерного тела по серии плоских срезов)

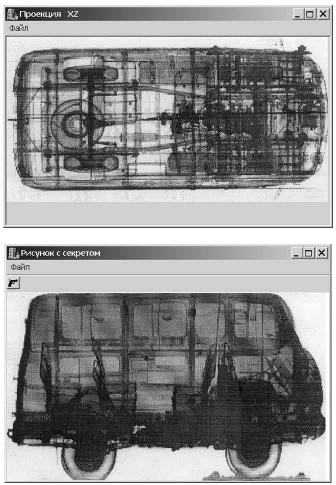


Рис. 2. Использование метамодели с целью решения задач томографии (поиск неразрешенных предметов при таможенном контроле)

Рис. 3 отражает разработанную авторами компьютерную систему, предназначенную для моделирования материалов с заданными свойствами (метаматериалов). В качестве примера приведена геометрическая структура – визуальная модель кубической магнитной металлической решетки.

Задав функции распределения магнитной проницаемости $\mu(\vec{r})$ и электрической проводимости $\varepsilon(\vec{r})$ вдоль координат, путем применения соответствующего алгоритма исследуем специфические оптические свойства данного метаматериала. Заметим, что для моделирования метаматериалов используем такие конкретные виды являющейся элементом метамодели области $D$, как цилиндр, пирамида, сфера, конус [17].

Таким образом, целесообразность определения метамодели $G$ состоит прежде всего в практическом построении системы компьютерных инструментов (визуальных сред моделирования), применение которых ускоряет процесс научного или инженерного исследования благодаря использованию $\{C\}$ над $\{\Gamma\}$.

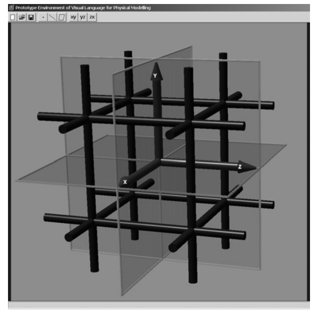

Рис. 3. Использование метамодели с целью построения моделей материалов с заданными свойствами

В то же время важен аспект оптимизации математических методов моделирования ПрО. В качестве примера рассмотрим зависящую только от пространственных координат и времени $t$ функцию $F_k(x,y,z,t)$, которая восстанавливается с помощью набора сужений $F_k(s_0,s_1,...,s_m)$, $(s_0,s_1,...,s_m)\in\Gamma_k^n$.

При этом возникает задача оптимального выбора (с учетом качества восстановления свойства) множества $P_q \in D$, $q=1,\ldots,Q$. В данной статье предложен один из возможных методов выбора множества $P_q$ с целью повышения точности восстановления характеристики $F$ для случая, когда функция $F_k(x,y,z,t)$ входит в уравнение $F(x,y,z,t)=0$, описывающее форму изменения поверхности со временем.

**Пример**. Задан следующий закон изменения площади круга радиуса $R$ с центром в начале координат (0,0).

Считаем, что линия круга изменяется так, что ее площадь остается неизменной со временем, а форма представляет эллипс:

$\dfrac{x^2}{a(t)^2}+\dfrac{y^2}{b(t)^2}=1$ с заданной площадью $S=\pi R^2$, где

$a(t)=A\sin(t)+R,\ b(t)=\dfrac{R^2}{a(t)},$ что следует из постоянства площади круга.

Или в параметрической форме:

$$\begin{cases} x(t)=a(t)\cos(\varphi)\\ y(t)=b(t)\sin(\varphi)\end{cases}$$
$$0\le\varphi<2\pi.$$

Начало отсчета времени считаем $t=0$.

Поскольку при $t=0$, $a(0)=R$, $b(0)=R$, , то площадь полученной в результате деформации области будет неизменной и равняться $S=\pi R^2$, так как площадь эллипса равна $S=\pi a(t)a(t)$.

Будем рассматривать информацию о форме деформированной линии в моменты времени $t = T_p$, $p = 1, \ldots, P$ в виде двух наборов точек, получаемых в результате сечения соответствующей области прямыми (рис. 4):

$$x = x_i,\ i = 1\ldots I$$

$$y = y_i,\ y = 1\ldots J$$

$$M_1 : (x_i, Y_i(p)),\ i = 1...I,\ p = 1...P\ .$$

$$M_2 : (X_j(p), y_j),\ j = 1...J,\ p = 1...P\ .$$

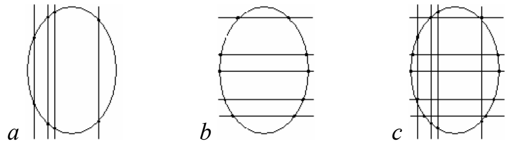


Рис. 4. Сечения эллипса наборами прямых: $a - M_1$; $b - M_2$; $c - M_1 \cup M_2$

Задача состоит в восстановлении формы линии аналитического вида на основании каждого из наборов $M_1$ и $M_2$ точек, а также в исследовании условий, при которых одновременное использование обоих этих наборов точек может повысить точность восстановления формы линии.

Для того, чтобы обосновать актуальность такой задачи, достаточно отметить, что, если оба набора точек совпадают (рис. 5), то никаким алгоритмом, который использует информацию каждого из них, улучшить приближение невозможно.

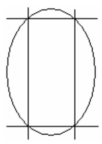

Рис. 5. Совпадение точек сечений эллипса, которые принадлежат наборам прямых $M_1$ и $M_2$

В статье предложен алгоритм построения множества $M_2$, который существенно опирается на заданный набор точек $M_1$ и позволяет улучшить точность восстановления линии в каждый момент времени $t$.

Опишем предлагаемый алгоритм по шагам.

Шаг 1. По данным точкам множества $M_1$ строим сплайн $S(x)$ степени $r = 1,2,3,\ldots$, приближенно описывающий форму линии в моменты времени $t = T_p$.

Шаг 2. Между двумя соседними точками $(x_i,\ Y_i(p))$ и $(x_{i+1},\ Y_{i+1}(p))$ вычисляем точку $M(x_{i+1/2}(p),\ Y_{i+1/2}(p)$, которая находится на одинаковом расстоянии от указанных точек и принадлежит кривой, определяемой сплайном $S(x)$.

Выбор точки $M$ следует осуществить следующим образом: находим координаты точки $M$ из условия:

$$\int\limits_{x_i, Y_i(p)}^{M} \sqrt{1 + S'^2}\, dx = \int\limits_{M}^{x_{i+1}, Y_{i+1}(p)} \sqrt{1 + S'^2}\, dx$$

В частности, если соединяющую соседние точки линию приблизить сплайном первого порядка, то средняя точка $M(x, y)$ определится так:

$$M(x, y) = M\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right).$$

Итак, предложенный алгоритм позволяет ставить и решать задачу об оптимальном выборе семейства точек на линии или даже множестве геометрических объектов с целью самого лучшего приближения к функции $F_k(x, y, z, t)$.

В результате для произвольного $t$, $T_p \le t \le T_{p+1}$ можно найти координаты точки линии с помощью соответствующего сплайна степени $r(r = 1,2,3,\ldots)$.

Например, при $r = 1$ получим

$$x_{i,i+1}(t) = \frac{t - T_{p+1}}{T_p - T_{p-1}} x_i + \frac{t - T_p}{T_{p+1} - T_p} x_{i+1}, T_p \le t \le T_{p+1}\ .$$

**Заключение**. В основу предложенного метода положено объединение геометрической информации о пространственной структуре объектов $\{\Gamma_k\}$ ПрО и специфическая для нее информация $\{F_k\}$, заданная на указанных геометрических множествах.

Целесообразность применения метамодели $G$ состоит прежде всего в построении систем компьютерных инструментов (визуальных сред моделирования), ускоряющих процесс научного или инженерного исследования благодаря использованию множества математических методов $\{C\}$ над $\{\Gamma\}$.

Рассмотренная метамодель применяется для моделирования физических процессов и явлений, решения задач томографии с целью построения материалов с заданными свойствами (метаматериалов).

Один из возможных подходов к выбору множества $\Gamma$ предложен с целью повышения точности восстановления характеристики $F$ для случая, когда функция $F_k(x, y, z, t)$ входит в уравнение $F_k(x, y, z, t) = 0$.

●