

РАСЧЕТ СОЛЕНОИДОВ С ПРОГРАММИРУЕМЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ДЛЯ ФОКУСИРОВКИ И УСКОРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В.И. Бутенко, Б.И. Иванов
ННЦ ХФТИ, Харьков, 61108, Украина
(E-mail: butenko@kipt.kharkov.ua)

Создание внешних неоднородных магнитных полей заданной конфигурации относится к классу некорректно поставленных задач в том смысле, что в пределах заданной точности они не имеют однозначного решения. В данной работе задача решается, с применением метода регуляризации А.Н. Тихонова, для соленоидов, состоящих из секций прямоугольного сечения, а искомыми параметрами являются толщина намотки, длина секции, координаты секций. Критерием оптимизации является минимум нормы решения. Приведены примеры расчета соленоидов для создания неоднородных магнитных полей в модели двухпучкового электронно-ионного ускорителя и в адиабатической плазменной линзе Морозова для фокусировки ионных пучков.

1. Введение

Для многих задач формирования, ускорения и фокусировки заряженных частиц требуется создание неоднородных аксиально-симметричных параксиальных магнитных полей с заданной зависимостью от продольной координаты в пределах заданной точности. Такие задачи относятся к классу некорректно поставленных [1], в том смысле, что в пределах заданной точности они не имеют однозначного решения. Как правило, указанные поля создаются при помощи секционированных соленоидов, состоящих из коаксиально расположенных секций (катушек). Напряженность магнитного поля в общем случае нелинейным образом зависит от таких параметров, как геометрические размеры секций, их взаимное расположение, плотность тока.

В существующих работах, связанных с этим вопросом, в качестве искоемых параметров выбирались плотности токов в секциях. Это наиболее простой вариант задачи, так как плотность тока входит в уравнение для напряженности магнитного поля соленоида линейно. В частности, в работе [2] (где приведена библиография по данному вопросу) описан метод, основанный на минимизации функционала, который позволяет найти оптимальное (в смысле минимального среднеквадратичного отклонения создаваемого поля от требуемого) распределение плотностей токов по секциям соленоида. Однако при достаточно большом количестве секций (больше 20) система линейных уравнений, к решению которой сводится задача, оказывается плохо обусловленной, что приводит к потере точности вычислений при ее решении. Вследствие этого далеко не оптимальным оказывается распределение нагрузки по секциям. Нагрузка на концевые секции оказывается во много раз большей, чем на все остальные, что приводит к неэкономному расходу обмоточного провода и к необходимости принудительного охлаждения концевых секций. Усложняется также запитка соленоида, так как, чтобы установить требуемое распределение плотностей токов по секциям, нужно либо иметь для каждой секции отдельный

источник питания, либо последовательно с каждой секцией включать реостат.

В данной работе методом регуляризации Тихонова решается более общая задача – отыскиваются параметры секций соленоида определенного вида. Это могут быть, например, толщина намотки, длина секции, внутренний радиус и т.д., то-есть параметры, от которых напряженность поля зависит, вообще говоря, нелинейно. Описанный здесь метод проиллюстрирован на примере решения данной задачи относительно толщины намотки для случая секций прямоугольного сечения.

Работа состоит из следующих частей. В разделе 2 коротко рассмотрена теория данного метода. В разделе 3 производится расчет оптимизированного соленоида для создания однородного магнитного поля. В разделе 4 приведены примеры расчета соленоидов для создания программированных неоднородных магнитных полей в модели двухпучкового электронно-ионного ускорителя [3-5] и в адиабатической плазменной линзе Морозова для фокусировки ионных пучков с энергией 1 МэВ [6].

2. Теория

Рассмотрим секционированный соленоид, состоящий из n коаксиальных секций произвольного сечения. Пусть на оси этого соленоида на интервале $[a, b]$ требуется создать с заданной точностью δ магнитное поле, напряженность которого описывается функцией $f(z)$. Пусть напряженность поля, создаваемого i -й секцией в точке z , описывается функцией $H_i(N_i, z)$, которая зависит от геометрической формы сечения катушки, ее размеров и расположения относительно точки наблюдения (здесь N_i - параметр). Тогда магнитное поле, создаваемое на оси соленоидом, может быть выражено в виде:

$$B(z) = \sum_{i=1}^n H_i(N_i, z).$$

Уклонение $B(z)$ от $f(z)$ будем оценивать в квадратичной метрике, т.е. по формуле:

$$\rho(B, f) = \left\{ \int_a^b [B(z) - f(z)]^2 dz \right\}^{1/2}.$$

Данная задача относится к классу некорректно поставленных в том смысле, что в пределах заданной точности она не имеет однозначного решения, причем при достаточно большом количестве секций ее решение становится неустойчивым к малым изменениям исходных данных. Поэтому необходимо из множества всех решений, удовлетворяющих условию: $\rho(B, f) \leq \delta$, где δ – заданное число, выбрать решение, оптимизированное по определенному критерию (таким критерием может быть, например, объем проводника, которым намотан соленоид, или потребляемая соленоидом мощность). Поставленная задача формулируется следующим образом: найти такой оптимальный набор параметров (N_1, N_2, \dots, N_n) , при котором функционал:

$$F(N_1, \dots, N_n, \beta) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n H_i(N_i, z) - f(z) \right]^2 dz + \beta \Omega(N_1, \dots, N_n) \quad (1)$$

достигает своей точной нижней грани [1]. Здесь $\Omega(N_1, \dots, N_n)$ – стабилизирующий функционал, определяемый критерием оптимизации, β – параметр регуляризации. Условия минимума функционала (1): $\frac{\partial F(N_1, \dots, N_n, \beta)}{\partial N_k} = 0$ дают систему нелинейных уравнений:

$$\int_a^b \left[\sum_{i=1}^n H_i(N_i, z) - f(z) \right] \frac{\partial H_k}{\partial N_k} dz + \beta \frac{\partial \Omega}{\partial N_k} = 0, \quad (2)$$

которую можно решить одним из градиентных методов (см., например, [7]).

3. Расчет

Решение задачи по расчету соленоида включает в себя следующие этапы: выбор величин, определяемых параметрами физической установки, условиями теплоотвода и другими факторами; выбор начального приближения N_i^0 и параметра регуляризации β таким образом, чтобы итерационный процесс сходил; решение системы уравнений (2) с заданной точностью; корректировка начального приближения (за начальное приближение принимается текущее значение искомого параметра) и параметра регуляризации β (если итерационный процесс сходится слишком медленно, то β уменьшается); повторное решение системы (2) и т.д. до получения удовлетворительного результата.

В этом разделе проиллюстрирован описанный выше метод на примере задачи синтеза однородного магнитного поля при помощи соленоида, состоящего из секций прямоугольного сечения. В качестве искомого параметра N_i принята толщина намотки $d_i = R_i - r_i$. В этом случае аппроксимирующие функции $H_i(d_i, z)$ и их первые производные имеют вид [8]:

$$H_i(z) = \frac{2\pi J_i}{c} \left[(z - \zeta_i) \ln \frac{R_i + \sqrt{R_i^2 + (z - \zeta_i)^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + (z - \zeta_i)^2}} - (z - a_i - \zeta_i) \ln \frac{R_i + \sqrt{R_i^2 + (z - a_i - \zeta_i)^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + (z - a_i - \zeta_i)^2}} \right], \quad \text{Э}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial d_i} = \frac{2\pi J_i}{c} \left[\frac{z - \zeta_i}{\sqrt{R_i^2 + (z - \zeta_i)^2}} - \frac{z - a_i - \zeta_i}{\sqrt{R_i^2 + (z - a_i - \zeta_i)^2}} \right]$$

где J_i – плотность тока, ед. ГС; ζ_i – координата начала секции, см; r_i – внутренний радиус секции, см; R_i – внешний радиус секции, см; a_i – длина секции, см; c – скорость света, см/с.

В качестве стабилизирующего функционала использовался квадрат евклидовой нормы решения:

$$\Omega(d_1, \dots, d_n) = \sum_{j=1}^n (d_j - d_j^0)^2, \quad \text{где } N_i^0 \text{ – начальное значение искомого параметра } i\text{-й секции. Такой выбор фактически соответствует критерию минимума объема проводника, которым намотан соленоид.}$$

В качестве примера был взят соленоид, описанный в [2], где данная задача решена относительно плотности тока при $\beta = 0$. Его длина составляет 727 мм, внутренний радиус – 85 мм. Плотность тока во всех секциях была принята одинаковой и равной 2 А/мм². Однородное магнитное поле напряженностью $f(z) = 1$ кЭ создавалось на длине 436 мм (60 % длины соленоида). Система уравнений (2) решалась методом Ньютона при следующих начальных значениях: толщина намотки для всех секций задавалась одинаковой и составляла $d_i^0 = 0$, параметр регуляризации β изменялся от 10^5 до 0, абсолютная точность вычисления толщины намотки $\epsilon = 10^{-4}$ см (т.е. итерационный процесс обрывался когда $\beta = 0$ и очередная поправка к d_i для всех секций не превышала ϵ). Параметр регуляризации модифицировался посредством деления на постоянный коэффициент $k = 2$ при достижении заданной точности вычислений, а при достижении значения $\beta = 10^{-10}$ он занулялся.

В таблице 1 приведены значения среднеквадратичного уклонения $\rho(B, f)$, максимального относительного уклонения $\Delta = \max(B(z) - f(z))/f(z)$ и объема проводника, которым намотан соленоид при разбиении соленоида на различное количество секций m . В ней также приведены значения величины, обратной числу обусловленности $\text{cond} \mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$, матрицы \mathbf{A} с компонентами $a_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial d_i \partial d_j}$, где $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$, на последней итерации. Как видно из таблицы, с улучшением аппроксимации поля растет объем (а значит и масса) соленоида.

Таблица 1

m	$\rho, \text{Э}\cdot\text{см}^{1/2}$	Δ	$V, \text{см}^3$	$1/\text{cond A}$
4	18.1	$1.09\cdot 10^{-2}$	$2.12\cdot 10^4$	$8.22\cdot 10^{-2}$
6	3.13	$2.16\cdot 10^{-3}$	$2.19\cdot 10^4$	$4.74\cdot 10^{-3}$
8	0.549	$4.31\cdot 10^{-4}$	$2.26\cdot 10^4$	$1.67\cdot 10^{-4}$
10	$8.56\cdot 10^{-2}$	$7.50\cdot 10^{-5}$	$2.35\cdot 10^4$	$3.95\cdot 10^{-6}$
12	$1.16\cdot 10^{-2}$	$1.10\cdot 10^{-5}$	$2.50\cdot 10^4$	$6.64\cdot 10^{-8}$
14	$1.24\cdot 10^{-3}$	$1.29\cdot 10^{-6}$	$2.80\cdot 10^4$	$9.57\cdot 10^{-10}$
16	$1.19\cdot 10^{-4}$	$1.32\cdot 10^{-7}$	$3.34\cdot 10^4$	$1.40\cdot 10^{-11}$
18	$1.38\cdot 10^{-5}$	$1.47\cdot 10^{-8}$	$4.20\cdot 10^4$	$2.00\cdot 10^{-13}$
18	$4.13\cdot 10^{-3}$	$5.63\cdot 10^{-6}$	$2.41\cdot 10^4$	$1.56\cdot 10^{-8}$

Заметим, что если конечное значение параметра регуляризации равно нулю, то эти результаты соответствуют наилучшему в смысле наименьшего среднеквадратичного отклонения приближению магнитного поля. Однако удовлетворительными такие результаты могут быть далеко не всегда. Для примера на рис. 1 приведена конфигурация соленоида для $m = 18$ (поскольку соленоид симметричен, то показана только половина соленоида). Как видно из рисунка, изготовление концевых секций может вызвать затруднение, да и аппроксимация магнитного поля с точностью 10^{-8} является чрезмерной.

Чтобы оптимизировать решение не только по точности приближения поля, но и по объему соленоида, итерационный процесс в наших расчетах обрывался,

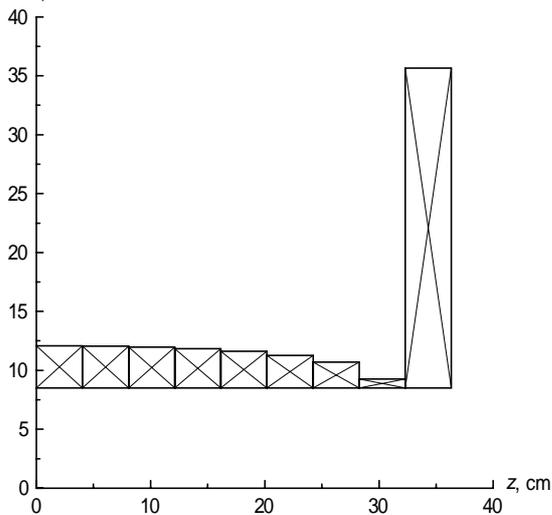


Рис. 1

ся при достижении среднеквадратичной невязки $\rho(B, f)$ значения $\delta = 4\cdot 10^{-3}$. Относительная погрешность аппроксимации поля при этом составила $\Delta = 5.63\cdot 10^{-6}$, а объем соленоида $V = 2.41\cdot 10^4$. Эти результаты приведены в последней строке таблицы 1, а конфигурация соленоида, соответствующего данному решению, приведена на рис. 2.

Найденное таким образом решение позволило уменьшить размеры концевых секций и в итоге почти в два раза уменьшить объем соленоида.

Заметим, что плотность тока во всех секциях задавалась одинаковой, что исключает перегрузку концевых секций. Благодаря этому более рационально

расходуется обмоточный провод и снижается потребляемая мощность по сравнению с соленоидами, у которых требуемое магнитное поле обеспечивается рас-

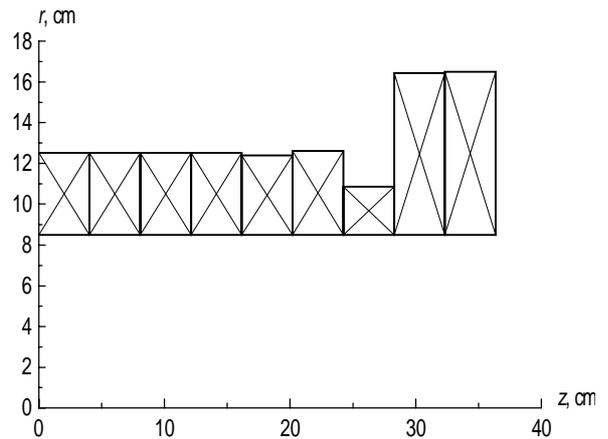


Рис. 2

пределением плотностей токов по секциям. Упрощается также запитка соленоида, так как при общем для всех секций токе их можно соединить последовательно и подключить к общему источнику питания. Все это в конечном итоге сказывается на габаритах, массе и стоимости соленоида.

4. Применение

Приведем результаты практических расчетов соленоидов для создания требуемого распределения магнитного поля по длине. Эти расчеты были проведены в рамках задач по разработке двухпучкового электронно-ионного ускорителя [3-5] и проектированию адиабатической плазменной линзы Морозова для фокусировки ионного пучка с энергией 1 МэВ [6].

Двухпучковый электронно-ионный ускоритель.

В разрабатываемом нами двухпучковом электронно-ионном линейном ускорителе [3-5] зависимость энергии иона от координаты z имеет вид:

$$\frac{1}{2} M v_i^2 = qU + qE_z z,$$

где q , M и v_i - заряд, масса и скорость иона, U - ускоряющий потенциал инжектора, E_z - темп ускорения.

Условием резонансного ускорения является равенство фазовой скорости волны v_{ph} и скорости ионов, отсюда

$$v_{ph}(z) = \sqrt{\frac{2q}{M} (U + E_z z)}.$$

В двухпучковом электронно-ионном ускорителе, в котором волна возбуждается на аномальном эффекте Доплера, фазовая скорость волны и напряженность внешнего магнитного поля связаны соотношением:

$$\frac{e}{\gamma m c} H_z(z) = \omega \left(\frac{v_e}{v_{ph}} - 1 \right).$$

Здесь e и m - заряд и масса электрона, v_e - скорость электронного пучка, ω - частота волны, γ - релятивистский фактор, c - скорость света.

Таким образом, нам следует рассчитать соленоид, который обеспечивает следующую зависимость напряженности магнитного поля от координаты:

$$H_z(z) = \frac{\gamma mc \omega}{e} \left(\frac{v_e \sqrt{M}}{\sqrt{2q(U + E_z z)}} - 1 \right).$$

Для конкретной экспериментальной модели такого ускорителя [3, 4] эта зависимость представлена на рис. 3. При этом относительная точность аппроксимации поля Δ должна быть не ниже 1%.

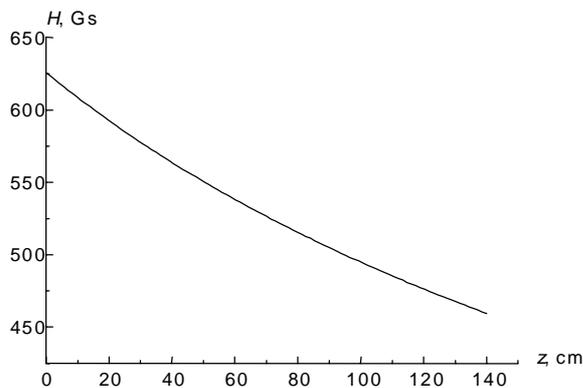


Рис. 3

Конфигурация соленоида, создающего такое поле, приведена на рис. 4. Его основные параметры следующие: длина 200 см, внутренний радиус 39 см, длина секций 10 см, количество секций 15, средняя плотность тока по сечению катушки 2 А/мм². Расчетным параметром была толщина катушки. Относительная погрешность аппроксимации поля не превысила $\Delta = 10^{-3}$ на длине 140 см, т.е. 70% длины соленоида.

Адиабатическая плазменная линза Морозова [6]. В этом устройстве радиус фокусирующего канала определяется топографией внешнего магнитного поля. Для большей эффективности линзы Морозова фокусируемый ионный пучок должен равномерно заполнять сечение фокусирующего токового канала. Для этого необходимо создать такое внешнее магнитное поле по длине устройства, чтобы траектории фокусируемых **r, cm**

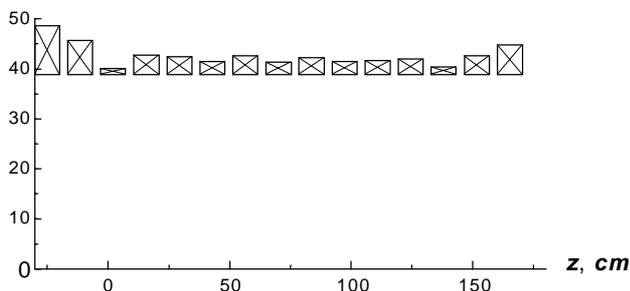


Рис. 4.

ионов совпадали с его силовыми линиями. Теория и конкретный пример расчета такой линзы приведены в разделе 4 работы [6]. В этом примере требуется сфокусировать пучок ионов с энергией 1 МэВ, радиусом $R_0=3$ см при электрическом потенциале, приданном граничной магнитной поверхности, равном 5 кВ.

Предполагается, что в результате фокусировки пучка и одновременного сжатия граничной магнитной поверхности достигается отношение входного и выходного радиусов ионного пучка $R_0/R_g = e = 2.72$. По выходе из линзы происходит инерциальная фокусировка ионов. Из формул (35) и (36) работы [6] были найдены длина линзы $z_g=45$ см и длина фокусировки (включая длину линзы) $z_f=56$ см. Искомая магнитная поверхность находится из условия, что ее радиус a совпадает с радиусом фокусируемого пучка R , который определяется из уравнения (31) в [6] (при параметре $\kappa = 0.005$), с учетом начальных условий: при $z=0$ $R = R_0, R' = R'_0 = 0, B_z(0)=1$ кЭ, где $B_z(z)$ - продольное магнитное поле на оси соленоида.

Как известно, в паракиальном приближении уравнение магнитной поверхности имеет вид:

$$a^2(z) = \frac{a_0^2 B_z(0)}{B_z(z)},$$

где $a(z)$ - изменяющийся радиус магнитной поверхности, $a_0 = R_0$ при $z=0$.

В итоге можно найти распределение продольного магнитного поля на оси соленоида. Для рассматриваемого случая график такого поля приведен на рис. 5.

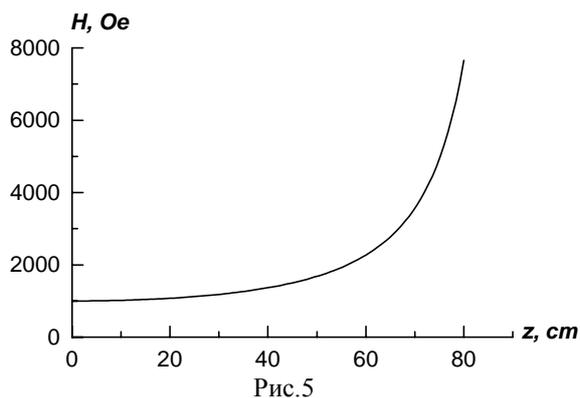


Рис.5

Далее, пользуясь изложенным выше методом, находим конфигурацию соленоида, создающего требуемое распределение $B_z(z)$, см. рис. 6.

Его основные параметры следующие: длина около 65 см, количество секций 10, внутренний радиус первых девяти секций равен 10 см, внутренний ради-

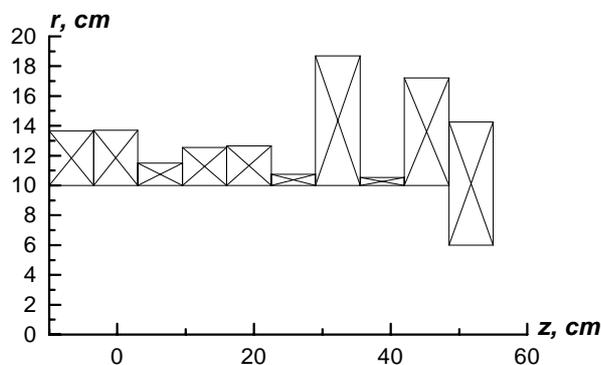


Рис. 6

ус десятой секции – 6 см, длина секций 6.5 см, средняя плотность тока по сечению катушки у первых девяти секций равна 3 А/мм², у десятой – 40 А/мм², (при импульсном питании), девятая секция включена навстречу. Расчетным параметром была толщина катушки. Относительная погрешность аппроксимации поля не превысила $\Delta = 3.72 \cdot 10^{-2}$ на длине 45 см, т.е. около 80 % длины соленоида.

На рис.7 представлены траектории ионов в линзе Морозова с оптимизированным магнитным полем. В соответствии с [6], ионы фокусируются в одну точку, поскольку в любом сечении линзы фокусирующая

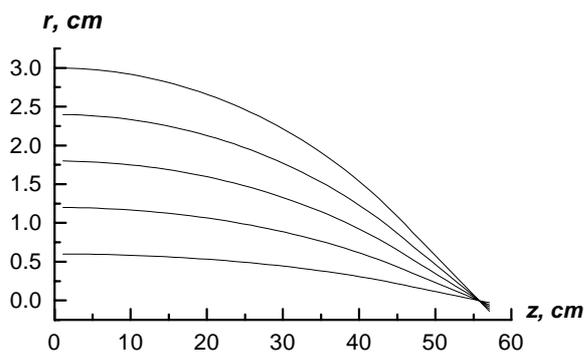


Рис. 7.

сила пропорциональна расстоянию иона от оси. В заключение следует отметить точное совпадение длины фокусировки ($L_f=56$ см), найденной аналитически в [6] и путем построения траекторий ионов в данной работе.

Литература

1. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. Л.Б.Луганский // ЖТФ, 1985, т. 55, вып.7, с.1263–1271.
3. V.I.Ivanov, V.I.Butenko, A.M.Egorov e.a., // AIP Conf. Proc., Vol. 335 (Advanced Accelerator Concepts, 1994), p.429-450.
4. В.И.Бутенко, А.М.Егоров, Б.И.Иванов и др., // Физика плазмы, 1997, т. 23, № 4, с. 359–367.
5. В.И.Бутенко, Д.В.Горожанин, А.М.Егоров, Б.И.Иванов и др. // Физика плазмы, 2000, т. 26, № 4.
6. В.И.Бутенко, Б.И.Иванов. // Расчет некоторых вариантов электростатических плазменных линз, см. наст. выпуск.
7. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984, 831 с.
8. В.И.Бутенко. // ЖТФ, 1992, т. 62, вып.7, с.157–165.

Summary. V.I. Butenko, B.I. Ivanov, “Calculations of solenoids with programmed magnetic fields for focusing of charged particles” (NSC KIPT, Kharkov, 61108, Ukraine).

For many problems of forming, acceleration and focusing of the charged particles it is necessary to create external non-uniform magnetic fields with specific configuration and within the framework of given accuracy. In accordance with the work of Tikhonov A.N. and Arsenin V.Ya. (Methods of the Incorrect Problems Solving, M.: Nauka, 1986. 288 p.), this problem is incorrect inverse one (i.e., ill-posed) because it have no single-valued solution within the framework of given accuracy. Accordingly to the regularization method of A.N. Tikhonov, from the set of possible solutions the wanted one is chosen that optimized on specific criterion. In this work the magnetic fields is created with the help of the section solenoids consisting of coaxial placed sections. Magnetic field intensity created by the each section depends non-linearly on sections parameters. Such parameters are, for example, geometrical sizes of the sections, their mutual placement (sections coordinates), current density. The problem is solved for the case of rectangular cross-section and parameters being found are winding thickness, section length, sections coordinates. Optimization criterion is the minimum of the solution norm. Specific examples of solenoid calculation is presented for creation of non-uniform magnetic fields for some variants of adiabatic plasma devices for focusing of ion beams, and for a model of the two-beam electron-ion accelerator.