

УДК 681.324

В.Г. Хорошевский, В.А. Павский, К.В. Павский

Институт физики полупроводников СО РАН, г. Новосибирск, Россия

khor@isp.nsc.ru, pavvm@kemtipp.ru, pkv@isp.nsc.ru

Анализ эффективности функционирования вычислительных систем в режиме обработки пакета задач^{*}

Найдены аналитические выражения для распределения вероятностей состояний вычислительных систем (ВС) в переходном режиме функционирования. Произведен анализ эффективности функционирования распределенных ВС (живучих и со структурной избыточностью) и осуществимости параллельного решения задач потока с отказами.

Введение

По своей природе ВС – это стохастический объект, обслуживающий вероятностные потоки задач со случайными параметрами. Естественно при изучении функционирования ВС применять аппарат теории массового обслуживания (ТМО) [1]. Однако в этом случае рассмотрение переходного режима работы ВС, как правило, не обходится без использования трудоемких численных методов [2-5].

В данной работе рассматривается марковская модель ТМО с отказами (в обозначениях Кендалла $M/M/1/n$ [6], [7]), представляемая в виде системы дифференциальных уравнений. Найдены аналитические выражения для распределения вероятностей состояний ВС в переходном режиме. Произведены расчеты показателей эффективности функционирования распределенных живучих ВС и систем со структурной избыточностью [2], [3]. Выделены две группы показателей: надежности (живучести) ВС и осуществимости параллельного решения задач [2], [3], [8].

Формулировка модели

На вычислительную систему [3] поступает пуассоновский поток простых (последовательных) задач с интенсивностью α , из которых формируется пакет. Количество задач в пакете ограничивается числом n элементарных машин ВС, выделяемых для решения поступающих задач. Если пакет сформирован, то очередная задача получает отказ и считается потерянной. Как только ВС освобождается, она приступает к обслуживанию пакета (пусть даже и не до конца сформированного) и начинается формирование очередного пакета. Время решения каждой задачи в системе является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с интенсивностью решения β . По окончании решения всех задач ВС переходит к решению задач из очередного пакета. Требуется проанализировать эффективность работы системы.

^{*} Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 07-07-00142, № 09-07-00185, № 08-08-00300), Совета по грантам Президента РФ (грант № НШ-2121.2008.9).

Пусть $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени $t \in [0, \infty)$ пакет состоит из k нерешенных задач, причем $P_0(0) = 1$ (т.е. в начальный момент времени пакет был пустым); $k \in E_0^n = \{0, 1, \dots, n\}$.

Используя методы ТМО [6], получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P_0(t) = -\alpha \cdot P_0(t) + \beta \cdot \sum_{k=1}^n P_k(t), \\ \frac{d}{dt} P_k(t) = -(\alpha + \beta) \cdot P_k(t) + \alpha \cdot P_{k-1}(t), \quad k \in E_1^{n-1}, \\ \frac{d}{dt} P_n(t) = -\beta \cdot P_n(t) + \alpha \cdot P_{n-1}(t), \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$P_0(0) = 1, \quad P_k(0) = 0. \quad (2)$$

Условие нормировки, являющееся следствием системы уравнений (1), имеет вид:

$$\sum_{k=0}^n P_k(t) = 1, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (3)$$

Преобразуем первое уравнение системы (1) с учетом условия (3):

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = -(\alpha + \beta) \cdot P_0(t) + \beta.$$

Решение этого уравнения при начальных условиях (2) записывается в виде

$$P_0(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot e^{-(\alpha + \beta)t}.$$

Аналогично, при $k = 1$, получаем

$$P_1(t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{\alpha^2 t}{(\alpha + \beta)} \cdot e^{-(\alpha + \beta)t} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \cdot e^{-(\alpha + \beta)t}.$$

Для применения метода математической индукции решим уравнение (1) при $k = 2$,

$$P_2(t) = \frac{\alpha^2 \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^3} - \frac{\alpha^2 \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^3} \cdot e^{-(\alpha + \beta)t} - \frac{\alpha^2 \beta t}{(\alpha + \beta)^2} \cdot e^{-(\alpha + \beta)t} + \frac{\alpha^3 \cdot t^2}{2!(\alpha + \beta)} \cdot e^{-(\alpha + \beta)t}.$$

Предположим, что для некоторого $k < n - 1$ справедлива формула

$$P_k(t) = \frac{\alpha^k \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^{k+1}} - \frac{\alpha^k \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^{k+1}} \cdot e^{-(\alpha + \beta)t} + e^{-(\alpha + \beta)t} \cdot \left(\frac{\alpha^{k+1} \cdot t^k}{k!(\alpha + \beta)} - \alpha^k \cdot \beta \cdot \sum_{r=1}^{k-1} \frac{t^r}{r!(\alpha + \beta)^{k-r+1}} \right). \quad (4)$$

Докажем ее справедливость для $k + 1$, имеем

$$P_{k+1}(t) = e^{-(\alpha + \beta)t} \cdot \left(C + \alpha \cdot \int e^{(\alpha + \beta)t} \cdot \left(\frac{\alpha^k \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^{k+1}} - e^{-(\alpha + \beta)t} \left(\frac{\alpha^k \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^{k+1}} - \frac{\alpha^{k+1} \cdot t^k}{k!(\alpha + \beta)} + \alpha^k \cdot \beta \cdot \sum_{r=1}^{k-1} \frac{t^r}{r!(\alpha + \beta)^{k-r+1}} \right) dt \right) \right).$$

Раскрывая скобки и интегрируя последнее, получим

$$P_{k+1}(t) = e^{-(\alpha+\beta)t} \cdot \left(C + \frac{\alpha^{k+1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^{k+2}} \cdot e^{(\alpha+\beta)t} - \frac{\alpha^{k+1} \cdot \beta \cdot t}{(\alpha + \beta)^{k+1}} + \frac{\alpha^{k+2} \cdot t^{k+1}}{(k+1)! (\alpha + \beta)} - \alpha^{k+1} \cdot \beta \cdot \sum_{r=1}^{k-1} \frac{t^{r+1}}{(r+1)! (\alpha + \beta)^{k-r+2}} \right).$$

Полагая $t = 0$, находим $C = -\frac{\alpha^{k+1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^{k+2}}$.

Подставляя найденное значение константы интегрирования C в последнее равенство, определяющее вероятность $P_{k+1}(t)$, получим

$$P_{k+1}(t) = e^{-(\alpha+\beta)t} \cdot \left(-\frac{\alpha^{k+1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^{k+2}} + \frac{\alpha^{k+1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^{k+2}} \cdot e^{(\alpha+\beta)t} - \frac{\alpha^{k+1} \cdot \beta \cdot t}{(\alpha + \beta)^{k+1}} + \frac{\alpha^{k+2} \cdot t^{k+1}}{(k+1)! (\alpha + \beta)} - \alpha^{k+1} \cdot \beta \cdot \sum_{r=1}^{k-1} \frac{t^{r+1}}{(r+1)! (\alpha + \beta)^{k-r+2}} \right)$$

или

$$P_{k+1}(t) = \frac{\alpha^{k+1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^{k+2}} - \frac{\alpha^{k+1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^{k+2}} \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} + e^{-(\alpha+\beta)t} \cdot \left(\frac{\alpha^{k+2} \cdot t^{k+1}}{(k+1)! (\alpha + \beta)} - \alpha^{k+1} \cdot \beta \cdot \sum_{r=1}^k \frac{t^r}{r! (\alpha + \beta)^{(k+1)-r+1}} \right)$$

Таким образом, формула (4) доказана.

Легко заметить, что (см. (1))

$$P_n(t) = e^{-\beta t} (C + \alpha \int e^{\beta t} \cdot P_{n-1}(t) dt). \quad (5)$$

Подставляя $P_{n-1}(t)$ (формулу (4) при $k = n-1$) в (5), получаем

$$P_n(t) = e^{-\beta t} \cdot \left(C + \alpha \cdot \int e^{\beta t} \left(\frac{\alpha^{n-1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^n} - e^{-(\alpha+\beta)t} \cdot \frac{\alpha^{n-1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^n} + e^{-(\alpha+\beta)t} \cdot \left(\frac{\alpha^n \cdot t^{n-1}}{(n-1)! (\alpha + \beta)} - \alpha^{n-1} \cdot \beta \cdot \sum_{r=1}^{n-2} \frac{t^r}{r! (\alpha + \beta)^{n-r}} \right) dt \right) \right).$$

Представим правую часть последнего равенства в виде суммы интегралов

$$P_n(t) = e^{-\beta t} \cdot \left(C + \frac{\alpha^n}{(\alpha + \beta)^n} \cdot e^{\beta t} + \frac{\alpha^{n-1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^n} \cdot e^{-\alpha t} + \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)! (\alpha + \beta)} \cdot \int t^{n-1} \cdot e^{-\alpha t} dt - \alpha^n \cdot \beta \cdot \sum_{r=1}^{n-2} \frac{1}{r! (\alpha + \beta)^{n-r}} \cdot \int t^r \cdot e^{-\alpha t} dt \right).$$

Далее замечаем, что

$$P_n(t) = e^{-\beta t} \cdot \left(C + \frac{\alpha^n}{(\alpha + \beta)^n} \cdot e^{\beta t} + \frac{\alpha^{n-1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^n} \cdot e^{-\alpha t} - \frac{\alpha^n}{(n-1)! (\alpha + \beta)} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left(t^{n-1} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{n-k-1}}{\alpha^k \cdot (n-k-1)!} \right) \alpha^{n-1} \cdot \beta \cdot \sum_{r=1}^{n-2} \frac{1}{r! (\alpha + \beta)^{n-r}} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left(t^r + r! \cdot \sum_{k=1}^r \frac{t^{r-k}}{\alpha^k \cdot (r-k)!} \right) \right). \quad (6)$$

Найдем значение произвольной постоянной в (6). При $t = 0$ имеем:

$$0 = C + \frac{\alpha^n}{(\alpha + \beta)^n} + \frac{\alpha^{n-1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^n} - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha^{n-1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^n} \cdot \sum_{r=1}^{n-2} \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} \right)^r.$$

Члены, стоящие под знаком суммы, образуют геометрическую прогрессию. Следовательно,

$$\sum_{r=1}^{n-2} \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} \right)^r = \frac{(\alpha + \beta)^{n-1}}{\beta \cdot \alpha^{n-2}} - \frac{\alpha + \beta}{\beta},$$

и находим, что $C = 0$.

Окончательно получаем, что

$$P_n(t) = \frac{\alpha^n}{(\alpha + \beta)^n} + \frac{\alpha^{n-1} \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^n} \cdot e^{-(\alpha + \beta)t} - \frac{\alpha^n}{(n-1)! (\alpha + \beta)} \cdot e^{-(\alpha + \beta)t} \cdot \left(t^{n-1} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{n-k-1}}{\alpha^k \cdot (n-k-1)!} \right) + \alpha^{n-1} \cdot \beta \cdot e^{-(\alpha + \beta)t} \cdot \sum_{r=1}^{n-2} \frac{t^r}{r! (\alpha + \beta)^{n-r}} + \alpha^{n-1} \cdot \beta \cdot e^{-(\alpha + \beta)t} \cdot \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{k=1}^r \frac{t^{r-k}}{\alpha^k \cdot (\alpha + \beta)^{n-r} \cdot (r-k)!}. \quad (7)$$

Иллюстрация к характеру изменения значений вероятностей $P_k(t)$ от времени t представлена на рис. 1.

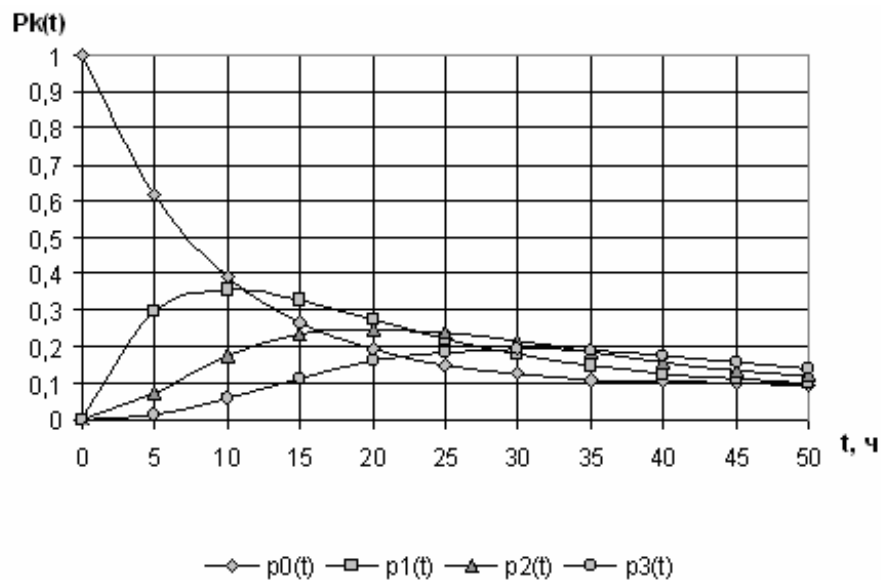


Рисунок 1 – Зависимость вероятностей $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2, 3$, от времени t при $\alpha = 0,1$ 1/ч., $\beta = 0,01$ 1/ч.

Из рис. 1 видно, что стационарный режим функционирования ВС при решении задач наступает через достаточно длительный промежуток времени, $t > 45$ ч. Следовательно, для вычислительных систем, функционирующих в реальных условиях, пренебрежение зависимостью показателей эффективности от времени недопустимо.

Система M/M/1/n всегда эргодична, следовательно, стационарный режим ($\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} P_k'(t) = 0$) всегда существует, так что

$$P_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, P_k = \frac{\alpha^k \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^{k+1}}, k \in E_1^{n-1}, P_n = \frac{\alpha^n}{(\alpha + \beta)^n}. \quad (8)$$

Как следует из (3), вероятности $P_k, k \in E_0^n$ составляют ряд распределения и, следовательно, представляют базис, через который выражаются показатели, характеризующие эффективность процесса решения (осуществимость решения [3], [8]) задач на ВС в момент времени $t, t \in [0, \infty)$. Рассмотрим те из них, которые можно использовать при экспресс-анализе функционирования ВС:

1) вероятность того, что пакет не пуст

$$P_{\geq 1} = 1 - P_0;$$

2) вероятность отказа в обслуживании задачи

$$P_{\text{отк}} = P_n;$$

3) средний объем пакета

$$n = \left[\frac{\ln P_{\text{отк}}}{\ln \alpha - \ln(\alpha + \beta)} \right], \quad (9)$$

где $[x]$ – целая часть числа x ;

4) среднее число задач в пакете

$$M = \frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{\alpha^{k-1}}{(\alpha + \beta)^{k-1}} + n \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^n; \quad (10)$$

5) дисперсию числа задач в пакете

$$D = \frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{k-1} + n^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^n - M^2. \quad (11)$$

Вычисление показателей надежности распределенных ВС

Считаем, что восстановительные операции в ВС осуществляет восстанавливающая система, состоящая из m однородных устройств (ВУ), $m \in E_1^n$. Это либо специальные аппараты, либо микропрограммные устройства, либо программы, либо композиции из отмеченных средств. Производительность восстанавливающей системы определяется и числом m , и интенсивностью μ восстановления отказавших ЭМ одним ВУ [3].

Показатели надежности распределенных ВС рассчитаем при следующих условиях: а) ВС является высокопроизводительной, т.е. общее число N элементарных машин (ЭМ) достаточно большое [3]; б) режим функционирования ВС установившийся; в) в случае выхода ЭМ из строя, она сразу поступает на восстановление.

Обозначим через λ интенсивность отказов одной ЭМ, а через μ – интенсивность восстановления отказавших ЭМ одним ВУ.

1. Вычислительные системы **со структурной избыточностью** представляют программно настроенную конфигурацию [3], в которой:

а) выделена основная подсистема из n ЭМ и подсистема из $(N - n)$ ЭМ, подчиненная основной и составляющая структурную избыточность;

б) основная подсистема предназначена для решения сложных задач, представленных параллельными программами из n ветвей, а подчиненная система – для решения фоновых задач;

в) функции отказавшей ЭМ основной подсистемы берет на себя любая исправная ЭМ структурной избыточности.

Очевидно, что для решения сложных задач требуются ВС с массовым параллелизмом (параллельные программы с большим числом ветвей). Можно считать, что $n \gg (N - n)$, то есть производительность основной подсистемы близка к суммарной.

Если в основной подсистеме ВС со структурной избыточностью элементарная машина выходит из строя, то она локализуется, ее функции передаются свободной ЭМ структурной избыточности, и с помощью реконфигуратора порождается новая конфигурация из n ЭМ. Требуется определить величину $(N - n)$ структурной избыточности и вероятность R безотказной работы основной подсистемы ВС.

Поскольку режим работы ВС установившийся, то случайный процесс отказов ЭМ ВС (как следует из асимптотических свойств процессов восстановления [5], [9]) является пуассоновским. Следовательно, вероятность $V_k(\tau)$ того, что за время τ произойдет k отказов, равна

$$V_k(\tau) = \frac{(a_\tau)^k}{k!} e^{-a_\tau}, \quad k \in E_0^N,$$

где $a_\tau = N(1 - \exp(-\lambda\tau))$ – среднее число ЭМ, отказавших за время τ , $\tau \in [0, T)$, $T < \infty$. Принимая во внимание параметры модели ВС, полагаем, что интенсивность входящего потока $\alpha = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{a_\tau}{\tau} = N\lambda$, а интенсивность обслуживания $\beta = \mu$, тогда для вероятности отказа ВС получаем

$$P_{отк} = \left(\frac{N\lambda}{\mu + N\lambda} \right)^{(N-n)},$$

отсюда вероятность безотказной работы основной подсистемы

$$R = 1 - (N\lambda / (\mu + N\lambda))^{(N-n)}. \tag{12}$$

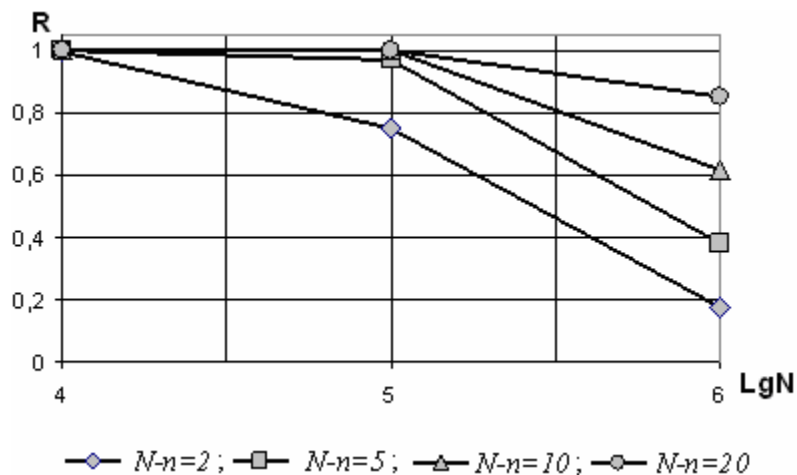


Рисунок 2 – Зависимость вероятности R безотказной работы ВС от числа ЭМ структурной избыточности, $(N - n) = 2; 5; 10; 20$, $\mu = 10$ 1/ч.

Зависимость $R = R(N)$ от числа $N = 10^4 \div 10^6$ ЭМ системы при $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч., $\mu = 10$ 1/ч. и числа ЭМ структурной избыточности $(N - n) = 2; 5; 10; 20$, иллюстрируется рис. 2.

Из рисунка видно, что при $(N - n) \geq 10$ вероятность $R \geq 0,63$.

Расчеты показывают, что при $N \leq 2 \cdot 10^5$, $1/\lambda \geq 10^4$ ч., $\mu \geq 10$ 1/ч., вероятность $R \geq 0,98$. Следовательно, можно считать, что для большемасштабных ВС число $(N - n)$ ЭМ структурной избыточности не превосходит 0,02%.

2. Под **живучей** ВС понимается программно настроенная конфигурация из N ЭМ [2], в которой

а) указано минимально допустимое число n работоспособных ЭМ, обеспечивающих производительность системы не менее требуемой;

б) реализована возможность решения сложных задач, представленных адаптируемыми параллельными программами;

в) отказы любых ЭМ и восстановления отказавших приводят только к увеличению или уменьшению времени реализации параллельной программы.

Вычислительное ядро в живучей ВС составляют все n исправных ЭМ, а число избыточных – переменное от 0 до $(N - n)$.

Если во время решения сложной задачи ЭМ выходит из строя, то она покидает вычислительное ядро и берется на учет реконфигуратором, который в свою очередь передает ее в восстанавливающую систему (где ЭМ ремонтируется одним из свободных ВУ). При функционировании большемасштабных реконфигурируемых ВС используются виртуальные ВУ, и ремонт отказавших ЭМ сводится к их замене на машины из резерва [4]. В этом случае интенсивность μ воспринимается как среднее число ЭМ резерва, включаемых в единицу времени одним ВУ в состав ВС.

Следовательно, для живучих систем влияние числа m ВУ на интенсивность восстановления ЭМ может оказаться существенным. Найдем число m ВУ, при котором время ожидания ЭМ в очереди на восстановление будет пренебрежимо малым по сравнению с временем восстановления.

Пусть $P_{отк}$ – вероятность отказа одной ЭМ в стационарном режиме работы. Если восстанавливающая система состоит из m ВУ, то среднее время ремонта одной ЭМ равно $1/(m\mu)$ [9]. Из (12) получаем

$$m \cdot \mu = N \cdot \lambda \cdot (P^{-(N-n)}_{отк} - 1). \quad (13)$$

Формула (13) подтверждает, что чем меньше времени тратится на ремонт ЭМ, тем меньше требуется восстанавливающих устройств для вычислительной системы. В табл. 1, 2 представлены количества ВУ, рассчитанные по формуле (13) при $(N - n) = 10$, $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч. соответственно для $R = 0,95; 0,99$.

Таблица 1

μ \ N\lambda	1	10	100
5	1	1	7
10	1	1	4

Таблица 2

μ \ N\lambda	1	10	100
5	1	2	12
10	1	1	6

Из таблиц следует, что с вероятностью, близкой к единице ($\geq 0,95$) для больших масштабных живучих ВС (при надежности ЭМ не ниже двух порядков относительно числа N ЭМ в ВС), число ВУ не превосходит 0,012% от N .

Заключение

Построена модель ВС со структурной избыточностью, функционирование которой осуществляется в режиме обработки пакета задач. Получены аналитические выражения для расчета функции надежности ВС (вероятности безотказной работы системы на временном промежутке).

Модель дает возможность не только анализировать качество функционирования ВС, но и вычислять значения ее параметров для достижения заданного уровня надежности.

Литература

1. Вишневецкий В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / Вишневецкий В.М. – Москва : Техносфера, 2003. – 512 с.
2. Евреинов Э.В. Однородные вычислительные системы / Э.В. Евреинов, В.Г. Хорошевский. – Новосибирск : Наука, 1978. – 319 с.
3. Хорошевский В.Г. Архитектура вычислительных систем / Хорошевский В.Г. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 520 с.
4. Игнатьев М.Б. Надежность однородных вычислительных систем / М.Б. Игнатьев, Б.С. Флейшман, В.Г. Хорошевский [и др.] // Вычислительные системы. – Вып. 48. – Новосибирск : Наука, 1972. – С. 16-47.
5. Гнеденко Б.В. Математические методы в теории надежности / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. – М. : Наука, 1965. – 524 с.
6. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями / Клейнрок Л. – М. : Мир, 1979. – 600 с.
7. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Клейнрок Л. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.
8. Павский В.А. Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач / В.А. Павский, К.В. Павский, В.Г. Хорошевский // Искусственный интеллект. – 2006. – № 4. – С. 28-34.
9. Кокс Д.Р. Теория восстановления / Д.Р. Кокс, В.Л. Смит. – М. : Сов. радио, 1967. – 312 с.

В.Г. Хорошевський, В.О. Павський, К.В. Павський

Аналіз ефективності функціонування обчислювальних систем у режимі обробки пакета задач
Знайдені аналітичні вирази для розподілу імовірностей станів обчислювальних систем (ОС) у перехідному режимі функціонування. Здійснено аналіз ефективності функціонування розподілених ОС (живучих та зі структурною надлишковістю) і здійсненості паралельного розв'язання задач течії з відмовами.

Статья поступила в редакцию 10.06.2009.