3. *Дьоміна, Н. А.* Удосконалення методів розрахунку елементів штампового оснащення на основі аналізу їх напружено-деформованого стану: Автореф. дис. … канд. техн. наук / Н. А. Дьоміна – Харків, 2011. – 20 с.
4. *Заярненко, Е. И.* Разработка математических моделей и расчеты на прочность разделительных переналаживаемых штампов: Дис. … д-ра техн. наук / Е. И. Заярненко. – Харьков, 1992. – 280 с.
5. *Романовский, В. П.* Справочник по холодной штамповке / В. П. Романовский. – Л.: Машиностроение, 1979. – 520 с.
6. *Мовшович, И. Я.* Исследование сопротивления срезу при штамповке листового материала / И. Я. Мовшович, Е. И. Заярненко, В. А. Долгов // Технология и организация производства. – 1975. – № 2. – С. 28–30.
7. *Гнучий, Ю. Б.* Анализ результатов численного моделирования процесса вырубки-пробивки / Ю. Б. Гнучий, В. М. Смирнягин // Вестн. Киевск. политехн. ин-та. – К.: Машиностроение, 1986. – № 23. – С. 12–22.
8. *Артюхов, В. П.* Исследование распределения напряжений в элементах вырубных штампов методом фотоупругости / В. П. Артюхов, В. И. Савченко // Кузнеч.-штамп. пр-во. – 1970. – № 1l. – С. 24–26.
9. *Елистратов, В. И.* Исследование нормальных напряжений по торцу твердосплавных пуансонов при вырубке-пробивке / В. И. Елистратов // Кузнеч.-штамп. пр-во. – 1973. – № 8. – С. 21–24.
10. *Львов, Г. И.* Моделирование и анализ элементов технологических систем листовой штамповки / Г. И. Львов, Н. А. Ткачук // Механіка та машинобудування. – 1997.– № 1. – С. 34–39.

Поступила в редакцию 11.11.14

А. В. Панкратов, д-р. техн. наук
Т. Е. Романова, д-р. техн. наук
А. А. Коваленко

Институт проблем машиностроения им А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков,
e-mail: AnnKovalenko@email.ua

Ключові слова: *рівноважна компоновка, циліндри, обмеження поведінки, математичне моделювання, нелінійне програмування*

УДК 519.85

ЗАДАЧА РАВНОВЕСНОЙ КОМПОНОВКИ ЦИЛИНДРОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КОНТЕЙНЕРЕ МИНИМАЛЬНОГО РАДИУСА

Розглядається задача рівноважної компоновки однорідних кругових циліндрів на стелажах циліндричного контейнера з урахуванням обмежень поведінки таким чином, щоб радіус контейнера і відхилення центра мас механічної системи від заданого значення були мінімальними. Будується математична модель рівноважної компоновки циліндричних об'єктів у вигляді задачі нелінійного програмування з використанням phi-функцій. Пропонується ефективний алгоритм пошуку локально-оптимальних розв'язків. Наводяться результати чисельних експериментів.

Введение

Оптимизационные 3D-*задачи равновесной компоновки* (*balance layout problem*) цилиндрических объектов имеют широкий спектр научных и практических применений, в частности, в ракетно-космическом машиностроении [1]. Отличительной чертой этого класса задач является необходимость учета *ограничений поведения* (*behavior constraints*), включая ограничения на центр масс, осевые и центробежные моменты инерции механической системы. Под механической системой понимается упрощенная модель космического аппарата, которая представляет собой контейнер с *опорными стеллажами* (*bearing plates*) (корпус космического аппарата) и размещаемые на стеллажах объекты (оборудование). Часто контейнер и объекты имеют цилиндрическую форму. Кроме упомянутых выше ограничений поведения, обязательными являются *ограничения размещения*, учитывающие непересечение объектов и включение объектов в контейнер.

Многие публикации (например, [2–4]) посвящены исследованию задач равновесной компоновки цилиндрических объектов и разработке эффективных алгоритмов для их решения. В большинстве из них предлагаются эвристические алгоритмы. Для построения адекватных математических моделей равновесной компоновки в виде задач нелинейного программирования необходимо описание всех ограничений в аналитическом виде.

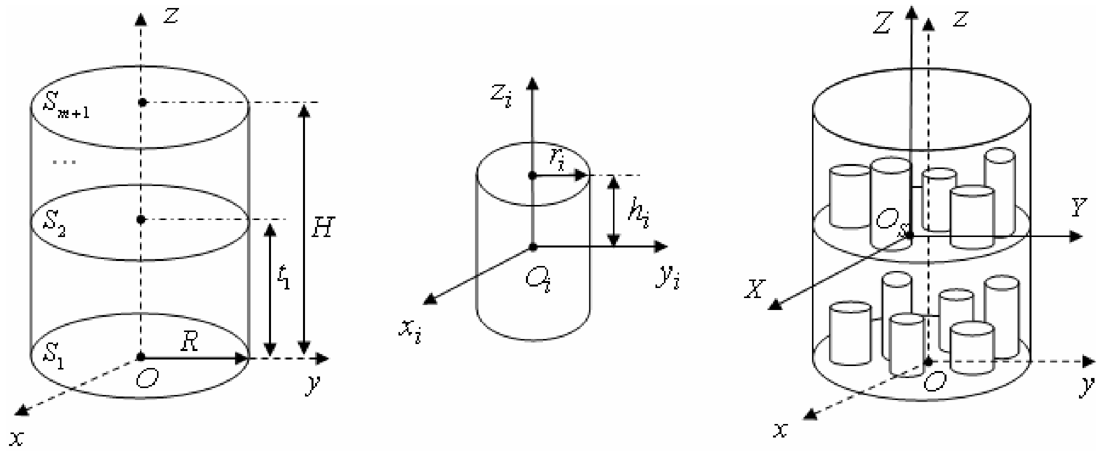


Рис. 1. Цилиндрический контейнер Ω, цилиндр C_i и система Ω_A

В данном исследовании рассматривается задача равновесной компоновки в следующей постановке: необходимо разместить набор однородных круговых цилиндров на стеллажах цилиндрического контейнера с учетом ограничений поведения так, чтобы радиус контейнера и отклонение центра масс механической системы от заданного значения были минимальными. Строится математическая модель равновесной компоновки цилиндрических объектов с использованием метода *phi*-функций [5] для моделирования ограничений размещения. Предлагается эффективный алгоритм поиска локально-оптимальных решений.

1. Постановка задачи

Пусть Ω – цилиндрический контейнер высоты H и переменного радиуса R, который разделен круговыми стеллажами S_k, $k = 1, 2, \ldots, m + 1$ на подконтейнеры Ω^k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через t_k расстояние между стеллажами S_k и S_{k+1}. Полагаем, что начало собственной системы координат $Oxyz$ контейнера Ω расположено в центре его нижнего основания, а Oz – продольная ось симметрии.

Пусть $A = \{C_i,\ i \in I_n\}$, $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, – семейство однородных цилиндров с метрическими характеристиками (r_i, h_i), где r_i – радиус основания; h_i – полувысота цилиндра C_i. Каждый цилиндр C_i задан в собственной системе координат $O_ix_iy_iz_i$, где O_i – центр симметрии цилиндра C_i; O_iz_i – продольная ось симметрии цилиндра C_i, параллельная оси Oz.

Обозначим через Ω_A систему, образованную в результате размещения цилиндров C_i семейства A в контейнере Ω, а через O_sXYZ – систему координат для Ω_A, где O_s расположено в центре масс системы Ω_A, а оси O_sX, O_sY, O_sZ параллельны осям Ox, Oy, Oz соответственно. Вид контейнера Ω, цилиндра C_i и системы Ω приведен на рис. 1.

Осуществим разбиение семейства A на группы объектов $A^k = \{C_i,\ i \in I_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, в зависимости от принадлежности цилиндра C_i подконтейнеру Ω^k. На размещение C_i, $i \in I^k$, внутри Ω^k накладываются ограничения по координате z вида $z_i = \sum_{l=1}^{k} t_{l-1} + h_i$, $i \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, полагая $t_0 = 0$.

Расположение цилиндра C_i внутри контейнера Ω определяется вектором трансляции $u_i = (v_i, z_i)$ относительно неподвижной системы координат $Oxyz$, где $v_i = (x_i, y_i)$. Обозначим вектор переменных параметров размещения цилиндров через $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^{2n}$. Таким образом, вектор переменных задачи имеет вид $u = (R, v)$.

Пусть m_i – масса цилиндра C_i, $i = 1, \ldots, n$; M – масса системы Ω_A, где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Центр масс $O_s = (x_s(v), y_s(v), z_s)$ системы Ω_A находится так:

$$x_s(v)=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{M},\qquad y_s(v)=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{M},\qquad z_s=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{M}=\mathrm{const}. \tag{1}$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) – некоторая заданная точка, отклонение центра масс O_s от которой не должно превышать допустимого значения. Тогда отклонение точки O_s от точки (x_0, y_0, z_0) имеет вид $\mu_1(v) = (x_s(v) - x_0)^2 + (y_s(v) - y_0)^2 + (z_s - z_0)^2$. Полагая, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, z_s)$, имеем

$$\mu_1(v) = (x_s(v))^2 + (y_s(v))^2. \tag{2}$$

Ограничения поведения системы Ω_A описываются системой неравенств $\{\mu_2(v) \ge 0,\ \mu_3(v) \ge 0$, где $\mu_2(v) \ge 0$ и $\mu_3(v) \ge 0$ – ограничения осевых и центробежных моментов инерции соответственно.

Функция $\mu_2(v)$ определена так:

$$\mu_2(v) = \min\{-J_X(v) + \Delta J_X, -J_Y(v) + \Delta J_Y, -J_Z(v) + \Delta J_Z, \}, \tag{3}$$

где $J_X(v)$, $J_Y(v)$, $J_Z(v)$ – моменты инерции системы Ω_A относительно осей системы координат O_sXYZ; ΔJ_X, ΔJ_Y, ΔJ_Z – заданные допустимые значения для $J_X(v)$, $J_Y(v)$, $J_Z(v)$

$$\begin{aligned}
J_X(v)&=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}m_i(3r_i^2+4h_i^2)+\sum_{i=1}^{n}(y_i^2+z_i^2)m_i-M([y_s(v)]^2+z_s^2),\\
J_Y(v)&=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}m_i(3r_i^2+4h_i^2)+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+z_i^2)m_i-M([x_s(v)]^2+z_s^2),\\
J_Z(v)&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)m_i-M([x_s(v)]^2+[y_s(v)]^2).
\end{aligned} \tag{4}$$

Функция $\mu_3(v)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mu_3(v) &= \min\{\mu_{31}(v), \mu_{32}(v), \mu_{32}(v)\},\\
\mu_{31}(v) &= \min\{-J_{XY}(v) + \Delta J_{XY}, J_{XY}(v) + \Delta J_{XY}\},\\
\mu_{32}(v) &= \min\{-J_{XZ}(v) + \Delta J_{XZ}, J_{XY}(v) + \Delta J_{XZ}\},\\
\mu_{33}(v) &= \min\{-J_{YZ}(v) + \Delta J_{YZ}, J_{YZ}(v) + \Delta J_{YZ}\},
\end{aligned} \tag{6}$$

где $J_{XY}(v)$, $J_{XZ}(v)$, $J_{YZ}(v)$ – центробежные моменты инерции системы Ω_A относительно осей системы координат O_sXYZ, а ΔJ_{XY}, ΔJ_{XZ}, ΔJ_{YZ} – заданные допустимые значения для $J_{XY}(v)$, $J_{XZ}(v)$, $J_{YZ}(v)$. Значения $J_{XY}(v)$, $J_{XZ}(v)$, $J_{YZ}(v)$ определяются так:

$$\begin{aligned}
J_{XY}(v)&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_im_i-Mx_s(v)y_s(v),\\
J_{XZ}(v)&=\sum_{i=1}^{n}x_iz_im_i-Mx_s(v)z_s,\\
J_{YZ}(v)&=\sum_{i=1}^{n}y_iz_im_i-My_s(v)z_s.
\end{aligned} \tag{7}$$

Ограничения размещения цилиндров семейства A в контейнере Ω можно описать системой неравенств $\{\Upsilon_1(v) \ge 0,\ \Upsilon_2(v) \ge 0$, где $\Upsilon_1(v) \ge 0$ – ограничение непересечения цилиндров; $\Upsilon_2(v) \ge 0$ – ограничение включения цилиндров в контейнер Ω,

$$\Upsilon_1(v)=\min\{\Phi_{ij}(v_i,v_j),(i,j)\in\Xi\},\qquad \Xi=\bigcup_{k=1}^{m}\Xi_k,\quad \Xi_k=\{(i,j): i<j\in I_k\},\quad k=1,2,\ldots,m, \tag{8}$$

$$\Upsilon_2(u) = \Upsilon_2(R, v) = \min\{\Phi_i(R, v_i),\ i \in I_n\} \tag{9}$$

где $\Phi_{ij}(v_i, v_j)$ – *phi*-функция для пары кругов C_i и C_j (основания цилиндров C_i и C_j) радиусов r_i и r_j с центрами в точках $v_i = (x_i, y_j)$ и $v_j = (x_j, y_j)$,

 ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2015, Т. 18, № 1

$$\Phi_{ij}(v_i, v_j) = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (r_i + r_j)^2, \qquad (10)$$

$\Phi_i(R, v_i)$ – *phi*-функция для круга C_i (основание цилиндра C_i) радиуса r_i с центром в точке $v_i = (x_i, y_i)$ и объекта $C^* = \mathbf{R}^2/\mathrm{int}C$ радиуса R с центром в точке (0, 0) вида

$$\Phi_i(R, v_i) = -x_i^2 + -y_i^2 + (R - r_i)^2. \qquad (11)$$

Здесь $R \geq r_i$ – радиус кругового «контейнера» C (сечение контейнера Ω плоскостью, параллельной Oxy).

2. Математическая модель

Математическую модель поставленной задачи можно представить так:

$$F(u^*) = \min F(u) \quad \text{s. t.} \quad u \in W \qquad (12)$$

$$W = \{u \in \mathbf{R}^{2n+1} : \Upsilon_1(v) \geq 0,\ \Upsilon_2(u) \geq 0,\ \mu_2(v) \geq 0,\ \mu_3(v) \geq 0,\ \zeta \geq 0\}, \qquad (13)$$

где $u = (R, u_1, \ldots, u_n)$, $F(u) = \alpha F_1(R) + \beta F_2(v)$, $F_1(R) = R$, $F_2(v) = \mu_1(v)$ – функция вида (2); $\alpha, \beta \in (0, 1)$ – весовые коэффициенты; $\alpha + \beta = 1$; функции $\Upsilon_1(v)$ и $\Upsilon_1(u)$ описываются с помощью соотношений (8)–(11), а функции $\mu_2(v)$ и $\mu_3(v)$ – с помощью соотношений (1)–(7). Таким образом, математическая модель (12)–(13) имеет вид

$$\min\left(\alpha R + \beta\left(\left[\sum_{i=1}^{n} m_i' x_i\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n} m_i' y_i\right]^2\right)\right) \quad \text{s.t.} \quad u \in W,$$

где область допустимых решений W описывается системой неравенств

$$\begin{cases}
(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_i + r_j)^2 \geq 0, (i, j) \in \Xi \\
-x_i^2 - y_i^2 + (R - r_i)^2 \geq 0, i \in I_n \\
\alpha_1 - \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2) m_i + M\left(\left[\sum_{i=1}^{n} m_i' y_i\right]^2 + z_s^2\right) + \Delta J_X \geq 0 \\
\alpha_1 - \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + z_i^2) m_i + M\left(\left[\sum_{i=1}^{n} m_i' x_i\right]^2 + z_s^2\right) + \Delta J_Y \geq 0 \\
\alpha_2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) m_i + M\left(\left[\sum_{i=1}^{n} m_i' x_i\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n} m_i' y_i\right]^2\right) + \Delta J_Z \geq 0 \\
-\sum_{i=1}^{n} x_i y_i m_i + M \sum_{i=1}^{n} m_i' x_i \sum_{i=1}^{n} m_i' y_i + \Delta J_{XY} \geq 0 \\
\sum_{i=1}^{n} x_i y_i m_i - M \sum_{i=1}^{n} m_i' x_i \sum_{i=1}^{n} m_i' y_i + \Delta J_{XY} \geq 0 \\
-\sum_{i=1}^{n} x_i z_i m_i + M z_s \sum_{i=1}^{n} m_i' x_i + \Delta J_{XZ} \geq 0 \\
\sum_{i=1}^{n} x_i z_i m_i - M z_s \sum_{i=1}^{n} m_i' x_i + \Delta J_{XZ} \geq 0 \\
-\sum_{i=1}^{n} y_i z_i m_i + M z_s \sum_{i=1}^{n} m_i' y_i + \Delta J_{YZ} \geq 0 \\
\sum_{i=1}^{n} y_i z_i m_i - M z_s \sum_{i=1}^{n} m_i' y_i + \Delta J_{YZ} \geq 0 \\
R - R_{low} \geq 0
\end{cases}$$

Заметим, что $m_i' = \dfrac{m_i}{M} = \text{const}$, $M = \sum_{i=1}^{n} m_i = \text{const}$, $z_i = \text{const}$ $z_s = \sum_{i=1}^{n} m_i' z_i = \text{const}$, $\alpha_1 = -\dfrac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(3r_i^2 + 4h_i^2\right) = \text{const}$, $\alpha_2 = -\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \text{const}$, $\Delta J_X, \Delta J_Y, \Delta J_Z = \text{const}$, $\Delta J_{XY}, \Delta J_{XZ}, \Delta J_{YZ} =$ $= \text{const}$, $R_{low} = \max_{i=1,\ldots,n} r_i = \text{const}$.

Число неравенств, описывающих область W, составляет $N = N_1 + N_2 + N_3 + 1$, где $N_1 = \text{card}(\Xi)$– число неравенств, описывающих ограничение $\Upsilon_1(v) \geq 0$; $N_2 = n$ – число неравенств, описывающих ограничение $\Upsilon_2(u) \geq 0$; $N_3 = 9$ – число неравенств, описывающих ограничения поведения $\mu_2(v) \geq 0$ и $\mu_3(v) \geq 0$. Точная верхняя оценка числа неравенств, описывающих область W, составляет $N^* = n(n+1)/2 + 10$. Ограничения размещения и ограничения поведения описываются квадратичными функциями, дополнительное ограничение $\zeta \geq 0$ в (13) представлено линейной функцией, целевая функция $F_1(R)$ – линейная, функция $F_2(v)$ – квадратичная. Таким образом, модель (12)–(13) – задача нелинейного программирования.

3. Алгоритм решения

Для решения рассмотренной задачи равновесной компоновки вида (12)–(13) предлагается эффективный алгоритм, суть которого заключается в следующем: строится множество стартовых точек u_0^s $s = 1, 2, \ldots, \eta$, из области допустимых решений W вида (13); производится поиск локального экстремума задачи (12)–(13) для каждой стартовой точки $u_0^s \in W$; лучший из полученных локальных экстремумов выбирается в качестве локально-оптимального решения.

Для упрощения нетривиальной процедуры поиска допустимой стартовой точки из области допустимых решений задачи (12)–(13) предлагается алгоритм, основанный на решении вспомогательных задач нелинейного программирования с использованием гомотетических преобразований кругов [6]. Алгоритм заключается в следующем.

Полагаем, что коэффициенты гомотетии кругов λ_i переменные, при этом $\lambda_i = \lambda$ для $i = 1, 2, \ldots, n$ и $0 \leq \lambda \leq 1$.

Шаг 1. Задаем стартовое значение радиуса контейнера R_0, равного R_{up} – верхней оценке радиуса R.

Шаг 2. Генерируем множество точек $v_i^0(x_i^0, y_i^0)$ $i = 1, 2, \ldots, n$, принадлежащих контейнеру Ω^0 радиуса R^0 случайным образом. Полагаем $\lambda^0 = 0$.

Шаг 3. Используем точку $u'^0 = (R^0, v^0, \lambda^0)$, $v^0 = (x_1^0, y_1^0, \ldots, x_n^0, y_n^0)$, в качестве допустимой стартовой точки для следующей вспомогательной задачи:

$$\lambda^* = \max\lambda \quad \text{s. t.} \quad u' \in W_\lambda \tag{14}$$

$$W_\lambda = \{u' \in \mathbf{R}^{2n+2} : \Upsilon_1(v') \geq 0, \Upsilon_2(u') \geq 0, \zeta \geq 0, 1-\lambda \geq 0, \lambda \geq 0, R_{up} - R \geq 0\}, \tag{15}$$

где $u' = (R, v')$, $v' = (v, \lambda)$, функции $\Upsilon_1(v')$, $\Upsilon_2(u')$ задаются аналогично функциям $\Upsilon_1(v)$, $\Upsilon_2(u)$ в модели (12)–(13) с учетом коэффициента гомотетии λ. Обозначим точку локального максимума $u'^* = (R^*, v'^*) = (R^*, v^*, \lambda^*)$. Заметим, что если $\lambda^* = 1$, то u'^*является точкой глобального максимума задачи (14) (15).

Следует отметить, что $u'^0 \in W_\lambda$ по способу построения.

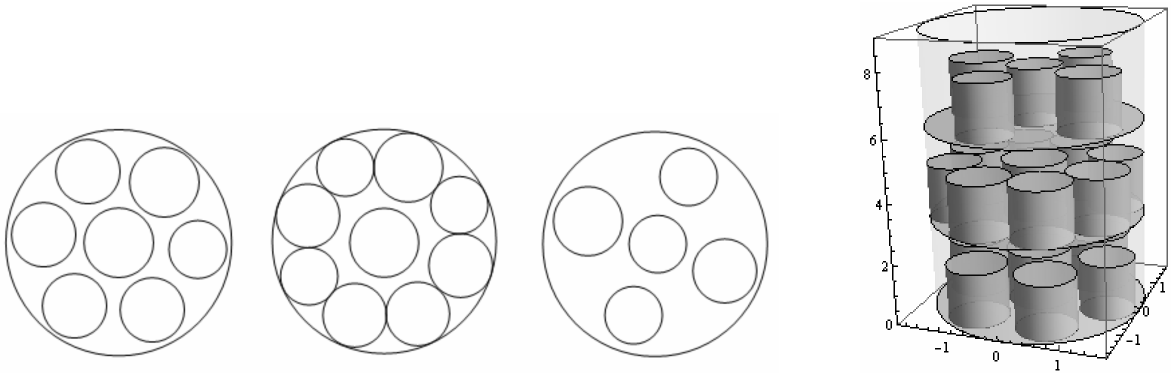
Шаг 4. Стартуя из точки $u''^0 = (R^0, v^0, \mu^0) = \left(\dfrac{R^*}{\lambda^*}, \dfrac{v^*}{\lambda^*}, -\aleph\right)$, где $\aleph > 0$ – заведомо большое число, решаем вспомогательную задачу

$$\mu^* = \max\mu \quad \text{s. t.} \quad u'' \in W_\lambda \tag{16}$$

$$W_\mu = \{u'' \in \mathbf{R}^{2n+2} : \Upsilon_1(v) \geq 0, \Upsilon_2(u) \geq 0, \mu_2(v) - \mu \geq 0, \mu_3(v) - \mu \geq 0, \zeta \geq 0, R_{up} - R \geq 0\}, \tag{17}$$

где $u'' = (u, \mu) = (R, v, \mu)$.

Следует отметить, что $u''^0 \in W_\mu$ по способу построения.



а) б) в) г)

Рис. 2. Размещение цилиндров, соответствующее точке локального минимума u^*:
а) – подмножество A^1 цилиндров на стеллаже S_1, б) – подмножество A^2 цилиндров на стеллаже S_2,
в) – подмножество A^3 цилиндров на стеллаже S_4, г) – вид системы Ω_A

Если в результате решения вспомогательной задачи (16)–(17) получено значение μ^*, меньшее нуля, это означает, что при заданной оценке R_{up} не удалось для сгенерированной стартовой точки u''^0 получить точку u''^*, принадлежащую области допустимых решений задачи (12)–(13), поскольку нарушаются условия поведения системы. В таком случае следует увеличить значение верхней оценки R_{up} и перейти к первому шагу алгоритма. Если в результате решения задачи (16)–(17) $\mu^* \ge 0$, то обозначим полученную точку локального максимума через $u''^* = (R''^*, v''^*, \mu^*)$.

Шаг 5. Формируем точку $u^0 = (R''^*, v''^*)$, полученную из точки u''^* локального максимума задачи (14)–(15). Точка u^0 служит стартовой точкой, принадлежащей области допустимых решений W задачи (12)–(13).

4. Численные эксперименты

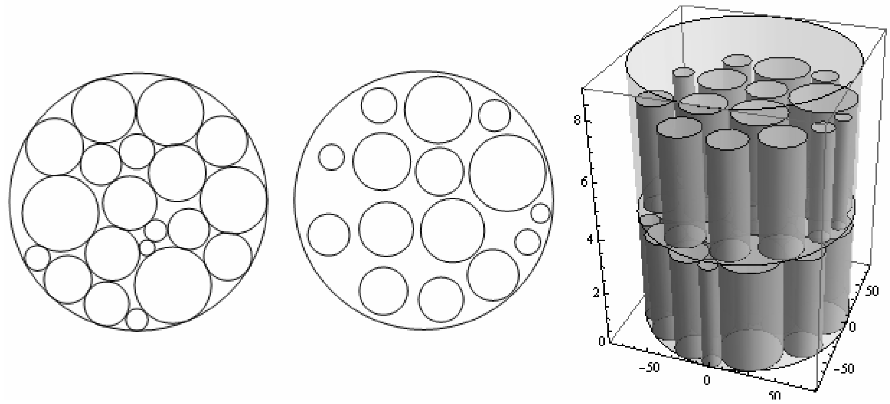
Чтобы продемонстрировать эффективность предлагаемого подхода, приведем результаты численных экспериментов для тестовых примеров (benchmark instances). Эксперименты проводились на компьютере AMD Athlon 64 X2 5200+, для локальной оптимизации использовалась программа IPOPT (https://projects.coin-or.org/Ipopt) на основе метода внутренней точки, приведенного в [7].

Пример 1. Пусть $A = \{C_i, i = 1, \dots, 21\}$, $m = 3$, $H = 9$, $t_1 = 3$, $t_2 = 3$, $h_i = 0{,}88$, $i = 1, \dots, 21$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, z_S)$, $A^1 = \{C_1, C_8, C_9, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}\}$, $A^2 = \{C_2, C_3, C_4, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{19}, C_{20}\}$, $A^3 = \{C_5, C_6, C_7, C_{14}, C_{21}\}$. Радиусы r_i и массы m_i цилиндров C_i $i = 1, \dots, 21$, задаются так: $r_i = 0{,}45$, $m_i = 3{,}1416$ для $i = 1, \dots, 7$, $r_i = 0{,}5$, $m_i = 3{,}8013$ для $i = 8, \dots, 14$, $r_i = 0{,}54$, $m_i = 4{,}5239$ для $i = 15, \dots, 21$.

Наилучшее решение без учета ограничений $\mu_2(v) \ge 0$ и $\mu_3(v) \ge 0$, найденное с помощью IPOPT (рис. 2): $u^* = (R^*, v^*)$, где $R^* = 1{,}7554$, $v^* = (1{,}2287$, –0,1211, –0,4765, 1,0895, –0,6782, –0,9821, 0,5256, –1,0444, –1,1601, 0,1099, 0,0120, –0,0011, 0,7195, 0,9235, 1,1776, 0,5636, –1,1859, –0,5458, –0,6074, 1,1556, –0,46621, –1,1658, 0,5335, –1,1365, –1,1886, 0,4042, 1,1947, –0,3862, 0,3826, 1,1537, –0,0094, –0,0174, –0,3444, –1,1142, 0,5231, 1,0514, 0,0438, 0,0033, 1,0785, –0,4136, –1,0480, 0,3632), $F(u^*) =$ $= 1{,}7555 + 0{,}0$. Точка u^* является точкой локального минимума.

Пример 2. Пусть $A = \{C_i, i = 1, \dots, 35\}$, $m = 2$, $H = 9$, $t_1 = 4$, $h_i = 1{,}85$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, z_S)$, $A^1 = \{C_i, i = 1, \dots, 20\}$, $A^2 = \{C_i, i = 21, \dots, 35\}$. Радиусы r_i и массы m_i цилиндров C_i $i = 1, \dots, 35$, задаются так: $\{r_i, i = 1, \dots, 35\}$ = {20, 24, 8, 11, 13, 7, 7, 15, 24, 18, 15, 17, 17, 14, 16, 18, 5, 21, 21, 13, 8, 14, 8, 15, 11, 17, 21, 16, 6, 18, 24, 13, 20, 10, 15}, $\{m_i, i = 1, \dots, 35\}$ = {86, 72, 81, 54, 29, 94, 92, 41, 57, 77, 40, 67, 31, 47, 39, 61, 73, 83, 11, 20, 75, 29, 36, 58, 75, 32, 98, 52, 76, 85, 59, 18, 85, 36, 12}.

Наилучшее решение без учета ограничений $\mu_2(v) \ge 0$ и $\mu_3(v) \ge 0$, найденное с помощью IPOPT (рис. 3): $u^* = (R^*, v^*)$, где $R^* = 80{,}716254$, $v^* = (-21{,}4244$, 56,8107, 21,2742, –52,5751, –63,5043, –35,4239, –0,99577, 31,904, –23,4157, 23,3398, 11,0458, –18,1127, –1,41107, –73,7027, 5,8804, –34,4861, –48,4474, –7,18759, –52,284, 34,6368, –44,4907, –48,3653, –16,4906, –32,8734, –5,47765, –0,706474, –19,8697, –63,6887, 52,1241, 37,9842, 24,2894 , 17,7034, 5,07463, –28,5216, 19,5737, 56,4172, 59,7007, 1,362, 31,0077, –16,8783, –58,2888, 27,0838, 10,3297, –62,1769, 63,9519, –25,9662, 9,85642, 18,3706, –27,9265, 60,0366, –24,2388, –17,58, 8,96545, 57,2424, 42,5509, –46,7507, 72,4863, –7,65304, –26,3991, 24,5612,



а) б) в)

Рис. 3. Размещение цилиндров, соответствующее точке локального минимума u^*:
а) – подмножество A^1 цилиндров на стеллаже S_1;
б) – подмножество A^2 цилиндров на стеллаже S_2, в) –вид системы Ω_A

51,8022, 17,6395, –59,8034, –21,3797, 17,1886, –18,4198, 43,2057, 53,4231, –25,6109, –56,2457), $F(u^*) = 80,71625 + 0,0$. Точка u^* является точкой локального минимума.

Выводы

Построена математическая модель равновесной компоновки цилиндрических объектов в виде задачи нелинейного программирования. Разработан алгоритм решения задачи с использованием метода мультистарта, алгоритма построения стартовых точек из области допустимых решений и IPOPT для решения задач нелинейного программирования. Предложенный алгоритм позволяет получать локально-оптимальные решения задачи (12)–(13), улучшить сходимость процедуры локальной оптимизации и сократить время решения. Приведенные результаты для известных тестовых примеров (*benchmark instances*) показали эффективность предложенного алгоритма.

Литература

1. *Fasano, G.* Modeling and Optimization in Space Engineering. Series: Springer Optimization and Its Applications / G. Fasano, J. D. Pinter // Problems and Applications. Publisher Springer New York. – New York, 2012. – Vol. 73, 404 p. – Online ISBN 978-1-4614-4469-5, Print ISBN 978-1-4614-4468-8.
2. *Che, C.* Test problems for quasi-satellite packing: cylinders packing with behavior constraints and all the optimal solutions known / C. Che, Y. Wang, H. Teng. [Electronic resource] / URL: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2008/09/2093.html.
3. *Sun, Z.* Optimal layout design of a satellite module / Z. Sun, H. Teng // Eng. optimization. – 2003. – Vol. 35, №5. – P. 513–530.
4. *Lei, K.* Constrained Layout Optimization Based on Adaptive Particle Swarm Optimizer / K. Lei // Advances in Computation and Intelligence. Series: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2009. – № 1. – P. 434–442.
5. *Stoyan, Yu.* Mathematical Models of Placement Optimization: Two- and Three-Dimensional Problems and Applications / Yu. Stoyan, T. Romanova // Modeling and optimization in space engineering. Series: Springer optimization and its applications. – 2013. – Vol. 73. – P. 363–388.
6. *Stoyan, Yu.* Packing congruent hyperspheres into a hypersphere / Yu. Stoyan, G. Yaskov // J. Global Optimization. – 2012. – Vol. 52(4). – P. 855–868.
7. *Wachter, A.* On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming / A. Wachter, L. T. Biegler // Math. Programming. – 2006. – Vol. 106, №1. – P. 25–57.

Поступила в редакцию 27.11.14