А. М. Чугай,
канд. техн. наук

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков,
e-mail: chugay@ipmach.kharkov.ua

Ключові слова: *математичне моделювання, квазі Ф-функція, неорієнтовані опуклі багатогранники, щільне пакування об'єктів.*

УДК 519.859

МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ РАЗМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ СИСТЕМ ПЛОТНОУПАКОВАННЫХ ОБЪЕКТОВ

На основі квазі Ф-функцій побудовано математичну модель задачі щільного пакування неорієнтованих опуклих багатогранників у паралелепіпеді мінімальної висоти. На основі властивостей побудованої моделі запропоновано метод отримання різноманітних початкових розміщень багатогранників. Метод складається з трьох основних етапів. На перших двох вирішуються допоміжні задачі нелінійного програмування, які дозволяють отримати початкове розміщення багатогранників. На останньому етапі визначаються параметри відокремлюваних площин для квазі Ф-функцій.

Введение

Решение задач плотной упаковки трехмерных геометрических объектов востребовано во многих областях человеческой деятельности. Так, например, плотные упаковки однородных твердых частиц представляют большой интерес, поскольку могут быть представлены в виде моделей физических систем, таких, как жидкости, стекла и аморфные материалы. Кроме этого, системы плотноупакованных твердых тел используются при проведении исследований в области гранулированных порошков и пористых материалов [1–3]. Для трехмерного моделирования, визуального и количественного анализа структурных особенностей различных твердых структур, а также для моделирования структуры материалов, используемых в нанотехнологиях, могут быть использованы математические модели и методы теории оптимизационного геометрического проектирования.

Анализ литературных данных и постановка проблемы

Обзор работ, посвященных плотной упаковке трехмерных геометрических объектов, позволяет сделать вывод, что сложность решения таких задач обусловлена отсутствием эффективных алгоритмов её решения. Большинство работ сводится к размещению простых геометрических фигур (параллелепипеды, цилиндры, сферы), в то время как большинство практических задач требует размещения объектов произвольной формы. Поэтому поиск новых подходов и алгоритмов для решения задачи плотного размещения трехмерных геометрических объектов остается актуальным. Вычислительная сложность решения задач трехмерной упаковки вынуждает многих исследователей вводить упрощения, которые достаточно сильно урезают область допустимых решений, но то же время позволяют находить рациональные решения задач с приемлемыми затратами вычислительных ресурсов [4–6].

На сегодняшний день в классе задач размещения трехмерных геометрических объектов наименее изученными являются задачи, в которых допускаются аффинные преобразования не только трансляции, но и произвольного поворота объектов. Вместе с тем эти задачи имеют важное как теоретическое, так и практическое значение. По своей постановке задачи размещения трехмерных геометрических объектов является оптимизационными. Однако в настоящее время существует проблема применения методов локальной и глобальной оптимизации для решения задач размещения неориентированных (т.е. допускающих произвольные повороты) трехмерных объектов. Это обусловлено отсутствием конструктивных средств математического моделирования отношений между этими объектами. В статье [7] приводится обзор современных подходов к решению задач размещения и говорится, что одним из перспективных подходов для построения адекватных математических моделей указанных задач является метод Ф-функций. В настоящее время построению Ф-функций для трехмерных объектов посвящён ряд работ, в частности [8, 9].

Целью данной работы является математическое моделирование плотного размещения неориентированных выпуклых многогранников и разработка метода получения их начальных размещений.

Рассматриваемая задача имеет следующую постановку. Пусть даны выпуклые многогранники P_i, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, заданные вершинами $p_{it} = (x'_{it}, y'_{it}, xz_{it})$ $t \in T$. Размещение многогранника P_i в пространстве R^3 определяется вектором $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ трансляции собственной системы координат P_i и тремя углами поворота $\theta = (\phi_i, \psi_i, \omega_i)$, $i \in I$.

Представим оператор поворота в следующем виде:

$$R_i = \begin{vmatrix} m_i \\ o_i \\ q_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} \\ o_{i1} & o_{i2} & o_{i3} \\ q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} \end{vmatrix}.$$

где $m_{i1} = \cos\psi_i \cos\omega_i, m_{i2} = \sin\phi_i \sin\psi_i \cos\omega_i + \cos\phi_i \sin\omega_i$, $m_{i3} = -\cos\phi_i \sin\psi_i \cos\omega_i + \sin\phi_i \sin\omega_i$, $o_{i1} = -\cos\psi_i \sin\omega_i, o_{i2} = -\sin\phi_i \sin\psi_i \sin\omega_i + \cos\phi_i \cos\omega_i$, $o_{i3} = \cos\phi_i \sin\psi_i \sin\omega_i + \sin\phi_i \cos\omega_i$, $q_{i1} = \sin\psi_i, q_{i2} = -\sin\phi_i \cos\psi_i, q_{i3} = \cos\phi_i \cos\psi_i$.

Тогда $p_{ij}(u_i) = (m_i^T p_{ij} + x_i, o_i^T p_{ij} + y_i, q_i^T p_{ij} + z), j \in T, i \in I$.

Вектор движения многогранника P_i обозначим через $u_i = (v_i, \theta_i) \in R^6$.

В качестве контейнера размещения рассматривается параллелепипед $P = \{X = (x, y, z) \in R^3 : 0 \le x \le w, 0 \le y \le l, \eta_1 \le z \le \eta_2, \eta_1 > 0\}$. Обозначим через $P(\eta)$ контейнер высотой $H(\eta) = \eta_2 - \eta_1$.

Вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^\omega$, $\omega = 6n$, будет определять размещение многогранников P_i, $i \in I$, в пространстве R^3.

Задача. Необходимо найти вектор u, который обеспечивает размещение P_i, $i \in I$, в $P(\eta)$ без взаимных пересечений таким образом, чтобы высота $H(\eta) = \eta_2 - \eta_1$ была минимальной.

Математическое моделирование взаимодействия геометрических объектов

Для моделирования взаимодействия выпуклых многогранников в [8] была построена Ф-функция. Чтобы уменьшить вычислительную сложность описания в аналитическом виде условий непересечения пары объектов, может быть использовано понятие квази Ф-функции. Эта функция зависит не только от параметров размещения объектов, но и от некоторых дополнительных переменных Y, количество k которых зависит от размерности пространства, в котором заданы геометрические объекты.

Всюду определенная и непрерывная функция $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) : R^k \to R^1$, где $(u_i, u_j) \in R^\mu$ и $k > \mu$, называется квази Ф-функцией для геометрических объектов $O_i(u_i)$ и $O_j(u_j)$, если $\max\limits_{Y_{ij} \in R^{k-\mu}} Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$ является Ф-функцией $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ для этих объектов.

Следует отметить важное свойство квази Ф-функции: если $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$ то $O_i(u_i)$ и $O_j(u_j)$ либо касаются, либо не имеют общих точек.

Идея квази Ф-функции основывается на построении разделяющей плоскости пары объектов $P_i(u_i)$ и $P_j(u_j)$.

Перед построением квази Ф-функции для P_i и P_j построим Ф-функцию для P_i и полупространства H_l

$$H_l = \{(x, y, z) \in R^3 : f_l(X, Y_l) = a_l(\alpha_l)x + b_l(\alpha_l, \beta_l)y + c_l(\alpha_l, \beta_l)z + d_l \le 0\}, \quad (1)$$

где $a_l(\alpha_l) = \sin\alpha_l$, $b_l(\alpha_l, \beta_l) = \sin\beta_l \cos\alpha_l$, $c_l(\alpha_l, \beta_l) = \cos\beta_l \cos\alpha_l$, $Y_l = (\alpha_l, \beta_l, d_l)$.

Легко проверить, что $\|N_l\| = \|a_l(\alpha_l), b_l(\alpha_l, \beta_l), c_j(\alpha_l, \beta_l)\| = 1$. Следовательно, плоскость $\Upsilon_l = \mathrm{fr} H_l$ (1) определяется нормальным уравнением

$$f_l(X, Y_l) = a_l(\alpha_l)x + b_l(\alpha_l, \beta_l)y + c_l(\alpha_l, \beta_l)z + d_l = 0 \quad (2)$$

Поскольку $\|N_l\| = 1$, то коєффициенты $a_l(\alpha_l)$, $b_l(\alpha_l, \beta_l)$ и $c_l(\alpha_l, \beta_l)$ не могут быть одновременно равны нулю, т. е. мы всегда имеем дело с полупространством.

Тогда, используя выражение (2) построим Ф-функцию для P_i и H_l

$$\Phi_{ij}(u_i, Y_l) = \min\{f_l(p_{it}(u_i), Y_l), t \in T\}. \quad (3)$$

Ф-функция для P_i и $\mathrm{cl}(R^3 \setminus P(\eta))$будет иметь вид

$$\begin{aligned}\Phi_i(u_i,\eta) = \min\{&m_i^T p_{it} + x_i, o_i^T p_{it} + y_i, w - m_i^T p_{it} - x_i,\\ &l - o_i^T p_{it} - y_i, -\eta_1 + q_i^T p_{it} + z_i, \eta_2 - q_i^T p_{it} - z_i, t \in T\}.\end{aligned} \tag{4}$$

Для дальнейшего удобства введем переименование Υ_l (2)

$$\Upsilon_{ij} = \{(x, y, z) \in R^3 : f_{ij}(X, Y_{ij}) = a_{ij}(\alpha_{ij})x + b_{ij}(\alpha_{ij}, \beta_{ij})y + c_{ij}(\alpha_{ij}, \beta_{ij})z + d_{ij} = 0\}. \tag{5}$$

Плоскость Υ_{ij} делит пространство R^3 на 2 полупространства

$$\begin{aligned}H_l^- &= \{(x,y,z) \in R^3 : f_{ij}(X, Y_{ij}) = a_{ij}(\alpha_{ij})x + b_{ij}(\alpha_{ij},\beta_{ij})y + c_{ij}(\alpha_{ij},\beta_{ij})z + d_{ij} \le 0\},\\ H_l^+ &= \{(x,y,z) \in R^3 : f_{ij}(X, \bar{Y}_{ij}) = -a_{ij}(\alpha_{ij})x - b_{ij}(\alpha_{ij},\beta_{ij})y - c_{ij}(\alpha_{ij},\beta_{ij})z - d_{ij} \le 0\},\end{aligned} \tag{6}$$

где $\bar{Y}_{ij} = (\pi + \alpha_{ij}, \beta_{ij}, -d_{ij})$. Тогда на основании (6) Ф-функции для P_i и H_l^- (H_l^+) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\Phi_{ij}^1(u_i, Y_{ij}) &= \min\left\{f_{ij}(p_{it}(u_i), Y_{ij}) = \left(m_i^T p_{it} + x_i\right)a_{ij} + \left(o_i^T p_{it} + y_i\right)b_{ij} + \left(q_i^T p_{it} + z_i\right)c_{ij} + d_{ij}, t \in T\right\},\\ \Phi_{ij}^2(u_j, \bar{Y}_{ij}) &= \min\left\{f_{ij}(p_{jt}(u_j), \bar{Y}_{ij}) = \left(m_i^T p_{it} + x_i\right)a_{ij} + \left(o_i^T p_{it} + y_i\right)b_{ij} + \left(q_i^T p_{it} + z_i\right)c_{ij} + d_{ij}, t \in T\right\}.\end{aligned} \tag{7}$$

Тогда на основании выражений (7) квази Ф-функция многогранников P_i и P_j может быть записана как

$$Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) = \min\{\Phi_{ij}^1(u_i, Y_{ij}), \Phi_{ij}^2(u_i, \bar{Y}_{ij})\}. \tag{8}$$

На основе Ф-функции (4) и квази Ф-функции (8) математическая модель поставленной задачи может быть построена в виде

$$H(\eta^*) = \min_{(u,Y,\eta) \in \Lambda \subset R^{\omega+\varepsilon+2}} H(\eta), \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}&Y = (Y_{12}, Y_{13}, ..., Y_{1n}, Y_{23}, Y_{24}, ..., Y_{2n}, ..., Y_{(n-1)n}) \in R^{\varepsilon}, \qquad \varepsilon = 3\frac{n(n-1)}{2},\\ &\Lambda = \left\{(u, Y, \eta) \in R^{\omega+\varepsilon+2} : Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) \ge 0,\ \ 0 < i < j \in I, \Phi_i(u_i, \eta) \ge 0, i \in I, H(\eta_1, \eta_2) \ge 0, \eta_2 \ge 0\right\}.\end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, выполнение $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) \ge 0$ обеспечивает непересечение $P_i(u_i)$ и $P_j(u_j)$, а выполнение $\Phi_i(u_i, \eta) \ge 0$ – размещение $P_i(u_i)$ внутри $P(\eta)$.

Метод получения начальных размещений

Поскольку математическая модель (9)–(10) поставленной задачи построена в виде классической задачи нелинейного программирования, то для ее решения могут быть применены различные модификации методов нелинейной оптимизации. Однако для применения численных методов нелинейной оптимизации необходимо иметь допустимую начальную точку. Среди методов, которые применяются для построения начальных точек, в задачах размещения объектов в основном используются различные модификации «жадных» алгоритмов. Применение «жадных» алгоритмов в рассматриваемой задаче представляет большую сложность. Кроме того, одним из недостатков применения таких алгоритмов является невозможность получения разнообразных начальных размещений объектов. Поскольку задачи размещения геометрических объектов являются *NP*-трудными, то применение «жадных» алгоритмов существенно ограничивает возможности перебора огромного количества локальных экстремумов (количество которых превышает $n!$).

В связи с вышеуказанными фактами в работе предлагается метод, который позволяет генерировать любые начальные точки задачи (9)–(10), т. е. определять начальные размещения объектов в области размещения. Предлагаемый метод можно разбить на три основных этапа.

На первом этапе каждый многогранник P_i покрывается сферой S_i минимального радиуса R_i^0, $i \in I$. Для этого мы решаем следующую вспомогательную задачу нелинейного программирования:

$$R_i^* = \min_{X_i = (v_i, R_i) \in D_i \subset R^4} R_i, \tag{11}$$

где

$$D_i = \{X_i = (v_i, R_i) \in R^4 : \Psi_{ij}(X_i) = R_i^2 - (x'_{ij} - x_i)^2 - (y'_{ij} - y_i)^2 - (z'_{ij} - z_i)^2 \geq 0, j \in T_i\}. \qquad (12)$$

На втором этапе будем полагать, что R_i, $i \in I$, являются переменными, а все переменные радиусы формируют вектор $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$. Кроме того, перенесем собственную систему координат P_i в центр найденной на первом этапе сферы S_i, $i \in I$.

Установим высоту $H(\eta^0) = \eta_2^0 - \eta_1^0$ области размещения $P(\eta^0)$ таким образом, что будет гарантировано размещение всех S_i, $i \in I$ внутри $P(\eta^0)$ без пересечений. Предположив $R_i^\bullet = 0$, $i \in I$, случайным образом сгенерируем вектор $v^\bullet$ таким образом, что $v_i^\bullet \in P(\eta^0)$, $i \in I$. В результате получим вектор $X^\bullet = (v^\bullet, 0)$. Взяв точку $X^\bullet = (v^\bullet, 0)$, решим следующую вспомогательную задачу:

$$\Omega(R^*) = \max_{X \in G \subset R^{4n}} \Omega(R) = \max_{X \in G \subset R^{4n}} \sum_{i=1}^{n} R_i, \qquad (13)$$

где

$$G = \{X \in R^{4n} : \Phi_{ij}(X_i, X_j) \geq 0, \ \ 0 < i < j \in I, \Phi_i(X_i, \eta^0) \geq 0, \ \varphi_i(R_i) = R_i^0 - R_i \geq 0, \ R_i \geq 0, \ i \in I\}. \qquad (14)$$

Очевидно, что $X^\bullet \in G$. Задача (13)–(14) имеет следующие свойства. Если в точке $\hat{X} = (\hat{u}, \hat{\hat{\hat{R}}})$ локального максимума $\Omega(\hat{R}) = \sum_{i=1}^{n} R_i^0 = d$, то $(\hat{u}, \eta^0) \in \Lambda$, т. е. многогранники $P_i(\hat{u}_i)$, $i \in I$, размещены в $P(\eta^0)$. В таком случае точка $\hat{X}$ является глобальным максимумом задачи (13)–(14). Если же глобальный максимум $\hat{X} = (\hat{u}, \hat{R})$ такой, что $\Omega(\hat{h}) < d$, то многогранники $P_i(\hat{u}_i)$, $i \in I$, не размещены в $P(\eta^0)$. Поскольку выбор η^0 обеспечивает размещение сфер S_i, $i \in I$, в $P(\eta^0)$, т.е.. $\Omega(\hat{R}) = d$, то в результате решения задачи (13)–(14) мы получим точку глобального экстремума $(v^\bullet, R^\bullet) = (v^\bullet, R^0) \in G$.

На последнем третьем этапе для построения начальной точки $(u^\bullet, Y^\bullet, \eta^0) \in \Lambda$ задачи (9)–(10) определим параметры разделяющих плоскостей для квази Ф-функций $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$, $0 < i < j \in I$. Для этого случайным образом выберем значения $\phi_i^\bullet, \psi_i^\bullet, \omega_i^\bullet \in [0, 2\pi]$, $i \in I$, и определим вектор $Y^\bullet$.

Построим канонические уравнения прямых Υ_{ij}, проходящих через точки $v_i^\bullet$ и $v_j^\bullet$

$$\frac{x - x_i^\bullet}{x_j^\bullet - x_i^\bullet} = \frac{y - y_i^\bullet}{y_j^\bullet - y_i^\bullet} = \frac{z - z_i^\bullet}{z_j^\bullet - z_i^\bullet}.$$

Далее построим точки $(N_{ij}^{11}, N_{ij}^{12}, N_{ij}^{13})$, $(N_{ij}^{21}, N_{ij}^{22}, N_{ij}^{23})$, $0 < i < j \in I$, где

$$N_{ij}^{11} = x_i + \frac{R_i^0(x_j^\bullet - x_i^\bullet)}{\varsigma_{ij}}, \qquad N_{ij}^{12} = y_i + \frac{R_i^0(y_j^\bullet - y_i^\bullet)}{\varsigma_{ij}}, \qquad N_{ij}^{13} = z_i + \frac{R_i^0(z_j^\bullet - z_i^\bullet)}{\varsigma_{ij}},$$

$$N_{ij}^{21} = x_j - \frac{R_j^0(x_j^\bullet - x_i^\bullet)}{\varsigma_{ij}}, \qquad N_{ij}^{22} = y_j - \frac{R_j^0(y_j^\bullet - y_i^\bullet)}{\varsigma_{ij}}, \qquad N_{ij}^{23} = z_j - \frac{R_j^0(z_j^\bullet - z_i^\bullet)}{\varsigma_{ij}},$$

$$\varsigma_{ij} = \sqrt{\left(x_j^\bullet - x_i^\bullet\right)^2 + \left(y_j^\bullet - y_i^\bullet\right)^2 + \left(z_j^\bullet - z_i^\bullet\right)^2}.$$

После этого построим плоскости N_{ij}, проходящие через точки $\left(\frac{N_{ij}^{11} + N_{ij}^{21}}{2}, \frac{N_{ij}^{12} + N_{ij}^{22}}{2}, \frac{N_{ij}^{13} + N_{ij}^{23}}{2}\right)$ перпендикулярно к Υ_{ij}

$$\left(x - \frac{N_{ij}^{11} + N_{ij}^{21}}{2}\right)\left(x_j^\bullet - x_i^\bullet\right) + \left(y - \frac{N_{ij}^{12} + N_{ij}^{22}}{2}\right)\left(y_j^\bullet - y_i^\bullet\right) + \left(z - \frac{N_{ij}^{13} + N_{ij}^{23}}{2}\right)\left(z_j^\bullet - z_i^\bullet\right) = 0, \qquad 0 < i < j \in I.$$

Из построения N_{ij} следует, что данная плоскость является разделяющей плоскостью сфер $S_i(v_i^\bullet)$ и $S_j(v_j^\bullet)$.

Взяв

$$a_{ij}^{\bullet}=\frac{x_j^{\bullet}-x_i^{\bullet}}{\varsigma_{ij}},\qquad b_{ij}^{\bullet}=\frac{y_j^{\bullet}-y_i^{\bullet}}{\varsigma_{ij}},\qquad c_{ij}^{\bullet}=\frac{z_j^{\bullet}-z_i^{\bullet}}{\varsigma_{ij}},$$

$$d_{ij}^{\bullet}=\frac{N_{ij}^{11}+N_{ij}^{21}}{2\varsigma_{ij}}\left(x_j^{\bullet}-x_i^{\bullet}\right)+\frac{N_{ij}^{12}+N_{ij}^{22}}{2\varsigma_{ij}}\left(y_j^{\bullet}-y_i^{\bullet}\right)+\frac{N_{ij}^{13}+N_{ij}^{23}}{2\varsigma_{ij}}\left(z_j^{\bullet}-z_i^{\bullet}\right),$$

получим нормальное уравнение

$$\left(x-\frac{N_{ij}^{11}+N_{ij}^{21}}{2}\right)a_{ij}^{\bullet}+\left(y-\frac{N_{ij}^{12}+N_{ij}^{22}}{2}\right)b_{ij}^{\bullet}+\left(z-\frac{N_{ij}^{13}+N_{ij}^{23}}{2}\right)c_{ij}^{\bullet}+d_{ij}^{\bullet}=0\,,$$

разделяющей плоскоти N_{ij} для сфер $S_i(v_i^{\bullet})$ и $S_j(v_j^{\bullet})$. Поскольку сферы $S_i(v_i^{\bullet})$ и $S_j(v_j^{\bullet})$покрывают мнгогранники $P_i(v_i^{\bullet})$ и $P_j(v_j^{\bullet})$, то плоскости N_{ij} являются разделяющими плоскостями для этих многогранников. Следовательно, мы можем взять вектор

$$Y^{\bullet}=(Y_{11}^{\bullet},Y_{12}^{\bullet},...,Y_{1n}^{\bullet},Y_{21}^{\bullet},Y_{22}^{\bullet},...,Y_{2n}^{\bullet},...,Y_{(n-1)1}^{\bullet},Y_{(n-1)2}^{\bullet},...,Y_{(n-1)n}^{\bullet})\,,$$

где $Y_{ij}^{\bullet}=(\alpha_{ij}^{\bullet},\beta_{ij}^{\bullet},d_{ij}^{\bullet})$, $\alpha_{ij}^{\bullet}=\arcsin a_{ij}^{\bullet}$, $\beta_{ij}^{\bullet}=\arcsin\dfrac{b_{ij}^{\bullet}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_{ij}^{\bullet}}}$.

Сформируем вектор $(v^{\bullet}, \theta^{\bullet}, Y^{\bullet}, \eta^0) = (u^{\bullet}, Y^{\bullet}, \eta^0)$. Поскольку сферы $S_i(v_i^{\bullet})$ содержат многогранники $P_i(v_i^{\bullet})$, $i \in I$, то $(u^{\bullet}, Y^{\bullet}, \eta^0) \in \Lambda$. Следовательно, точка $(u^{\bullet}, Y^{\bullet}, \eta^0) \in \Lambda$ может быть взята в качестве начальной точки для поиска точки локального максимума (u^*, Y^*, η^0) задачи (9)–(10).

Для поиска локальных экстремумов задачи (11)–(12) и (13)–(14) использовалась библиотека IPOPT [10]. В данной библиотеке реализованы алгоритмы метода внутренней точки, которые для поиска вектора движения используют матрицу Гессе левой части системы ограничений, описывающей область допустимых решений.

Выводы

Для трехмерного моделирования структурных особенностей различных материалов предложено использовать задачу плотной упаковки неориентированных выпуклых многогранников в параллелепипеде.

Для построения математической модели поставленной задачи использован аппарат квази Ф-функций. Благодаря этому математическая модель поставленной задачи построена в виде классической задачи нелинейного программирования.

Предложен специальный метод получения разнообразных начальных размещений неориентированных выпуклых многогранников. Метод условно разбивается на три этапа, предполагающих решение вспомогательных задач нелинейного программирования и определение параметров разделяющих плоскостей для квази Ф-функций неориентированных выпуклых многогранников.

Литература

1. *Williams, S. R.* Random Packings of Spheres and Spherocylinders Simulated by Mechanical Contraction / S. R. Williams, A. P. Philipse // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol. 67. – P. 051301-1–051301-9.
2. *Torquato, S.* Modeling of Physical Properties of Composite Materials / S. Torquato // Int. J. Solids Struct. – 2000. – Vol. 37. – P. 411–422.
3. *Yi, Y. B.* Compression of Packed Particulate Systems: Simulations and Experiments in Graphitic Li-ion Anodes / Y. B. Yi, C. W. Wang, A. M. Sastry // J. Eng. Materials and Techn. – 2006. – Vol. 128. – P. 73–80.
4. *Li, S. X.* Sphere assembly model and relaxation algorithm for packing of non-spherical particles / S. X. Li, J. Zhao // Chin. J. Comput. Phys. – 2009. – Vol. 26(3), P. 167–173.
5. *Korte, A. C. J.* Random packing of digitized particles / A. C. J Korte, H. J. H. Brouwers // Powder Techn. – 2013. – Vol. 233. – P. 319–324.
6. *Jia, X.* Validation of a digital packing algorithm in predicting powder packing densities / X. Jia, M. Gan, R. A. Williams, D. Rhodes // Powder Techn. – 2007. – Vol. 174. – P. 10–13.
7. *Bennell, .* The geometry of nesting problems: A tutorial / J. ennell, J. Oliveira // European J. Oper. Res. – 2008. – Vol. 184. – P. 397–415.

8. *Stoyan, Yu. G.* Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes / Yu. G. Stoyan, A. M. Chugay // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – Vol. 48(6). – P. 837–845.
9. *Scheithauer, G.* Mathematical modeling of interactions of primary 3D geometric objects / G. Scheithauer, Y. Stoyan, T. Romanova // Cybernetics and System Analysis. – 2005. – Vol. 41(3). – P. 332–342.
10. *Wachter, A*. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming / A. Wachter, L. T. Biegler // Math. Programming. – 2006. – Vol. 106(1). – P. 25–57.

Поступила в редакцию 12.05.14