

УДК 524.354:524.1-6

О. Петрук^{1, 2}, В. Бешлей³

¹Інститут прикладних проблем механіки та математики НАН України
79060 Львів, вул. Наукова 3-б

²Астрономічна обсерваторія Львівського національного університету ім. І. Франка
79005 Львів, вул. Кирила і Методія, 8

³Кафедра астрофізики, Львівський національний університет ім. І. Франка
79005 Львів, вул. Кирила і Методія 8

Синхротронне випромінювання залишків наднових зір в рентгенівському діапазоні. Експоненційне обрізання спектру електронів

Описано модель еволюції енергетичного розподілу релятивістських електронів в залишках наднових зір (ЗН), яка враховує радіаційні втрати частинок. Метод може бути застосований для розрахунку синхротронного рентгенівського випромінювання ЗН в однорідному міжзоряному середовищі та однорідному міжзоряному магнітному полі. Показано роль різних факторів у модифікації просторових розподілів нетеплових електронів та їхньої синхротронної випромінювальної здатності. Вказано на значення похибок оцінки напруженості магнітного поля в моделях, які не враховують детальну картину еволюції магнітного поля та електронного спектру за фронтом ударної хвилі в ЗН. Розраховано еволюцію спектрального розподілу синхротронного випромінювання та відношення синхротронних потоків від ЗН в радіо- та рентгенівському діапазонах.

СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОСТАТКОВ ВСПЫШЕК СВЕРХНОВЫХ ЗВЕЗД В РЕНТГЕНОВСКОМ ДИАПАЗОНЕ. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОБРЕЗАНИЕ СПЕКТРА ЭЛЕКТРОНОВ, Петрук О., Бешлей В. — Описана модель эволюции энергетического распределения релятивистских электронов в остатках вспышек сверхновых звезд, которая учитывает радиационные потери частиц. Метод может быть использован для расчета синхротронного рентгеновского излучения остатков в однородной межзвездной среде и однородном межзвездном магнитном поле. Показана роль различных факторов в изменении пространственных распределений нетепловых электронов и их синхротронной излучательной способности. Указано на значения погрешностей оценки напряженности магнитного поля в моделях, которые не учитывают детальную картину эволюции магнитного поля и электронного спектра за фронтом ударной волны. Рассчитана эволюция спектрального распределения синхротронного излучения и отношение синхротронных потоков от остатков сверхновых в радио- и рентгеновском диапазонах.

SYNCHROTRON EMISSION OF SUPERNOVA REMNANTS IN X-RAYS. EXPONENTIAL CUT-OFF IN ELECTRON SPECTRUM, by Petruk O., Beshley V. — Model for description of evolution of the energetic spectrum of relativistic electrons downstream of the shock which accounts for electron radiative losses is presented. It may be used for calculations of X-ray synchrotron emission from supernova remnants in uniform interstellar medium and uniform interstellar magnetic field. The influence of different factors on spatial distributions of nonthermal electrons and their synchrotron emissivity is shown. The errors in estimations of magnetic field strength with models neglecting detailed picture of evolution of magnetic field and electron spectrum downstream of the shock are demonstrated. The evolution of synchrotron spectrum and the ratio between radio and X-ray synchrotron fluxes are calculated.

ВСТУП

Питання про те, чи залишки наднових зір (ЗН) є основним джерелом галактичного компонента космічних променів, залишається одним з найцікавіших в астрофізиці високих енергій. Щороку з'являються кілька сот публікацій, в яких вивчаються різні аспекти цієї проблеми (див. огляди [4, 7, 15, 16, 19]). Важливими для розуміння мікрофізики явищ, що відбуваються в околі ударних хвиль (УХ) в ЗН, є рентгенівські спостереження цих об'єктів. Висока просторова та спектральна роздільна здатність сучасних рентгенівських телескопів дозволяє виділяти та аналізувати нетепловий компонент рентгенівського випромінювання ЗН, який є наслідком синхротронного випромінювання релятивістських електронів, прискорених на УХ до енергій порядку максимальної E_{\max} .

Моделюванню та дослідженню властивостей синхротронного радіо-випромінювання ЗН на адиабатичній стадії еволюції були присвячені роботи [2, 6, 8, 13]. Особливості нетеплового випромінювання ЗН в рентгенівському діапазоні вивчалися лише в роботах [3, 13].

Для розрахунку синхротронного випромінювання необхідним є знання розподілу релятивістських електронів за їхніми енергіями E . В першій нашій роботі [1] ми розглядали випадки, коли втратами електронів на випромінювання можна було знехтувати. Через те що радіаційні втрати $-dE_{\text{rad}}/dt \propto E^2$, вони ефективно модифікують форму електронного спектру лише в області максимальних енергій [13]; ці втрати є однією з причин високоенергетичного обрізання спектру електронів. Тому якщо в роботі [1] ми нехтували ними, то могли розглядати лише випромінювання електронів з енергіями, значно меншими за максимальні, зокрема в радіодіапазоні. Тому й приймали, що на фронті УХ формується класичний степеневий спектр релятивістських частинок $N(E)dE = KE^{-s}dE$, де s і K — константи.

Електрон з енергією E_{13} (в одиницях 10^{13} eV) випромінює основну частину своєї енергії через синхротронний механізм в фотонах з енергією $\varepsilon_m = 0.29\varepsilon_c = 19B_{-5}E_{13}^2$ eV, де B вимірюється в 10^{-5} Гс. Очікується, що максимальні енергії електронів в околі УХ в ЗН дорівнюють $E_{\max} = 30 \dots 300$ TeV [14, 11], а типові значення магнітного поля на фронті УХ $B_s = 10^{-5} \dots 10^{-4}$ Гс. Тому в рентгенівському діапазоні ($\varepsilon = 0.1 \dots 10$ keV) вклад випромінювання електронів з енергіями, близькими до E_{\max} , може бути визначальним для багатьох ЗН. Відтак слід дослідити, як впливає на властивості нетеплового рентгенівського випромінювання відхилення форми спектру електронів від степеневі.

ОПИС МОДЕЛІ

Розглядаємо адиабатичний ЗН в однорідному міжзоряному середовищі (МЗС) з концентрацією атомів водню n_0 та однорідному магнітному полі B_0 . Загальний опис процесів випромінювання, гідродинаміки плазми та магнітного поля такий же, як і в роботі [1]. Відмінності полягають в тій частині моделі, яка відповідає за поведінку нетеплових електронів. Тут нами узагальнюється підхід [13]. В області максимальних енергій розподіл релятивістських електронів має обрізання, за формою близьке до експоненціального [10, 14]:

$$N(E)dE = KE^{-s} \exp(-E/E_{\max})dE. \quad (1)$$

Можливість УХ, що має швидкість V , прискорити електрони до певних максимальних енергій є різною в різні моменти часу. Так, в роботі [13] розглянуто три моделі, в яких $E_{\max} \propto V^q$. У першій, якщо максимальна енергія обмежується радіативними втратами електронів, $q = 1$. В другій, якщо E_{\max} визначається обмеженням часом прискорення (віком ЗН), $q = 2$. Можливим є й третій варіант, $q = 0$, коли обмеження зумовлені неможливістю електронів з високими енергіями розсіюватися на МГД-хвилях в МЗС, а отже, продовжувати прискорення. Якщо відомо, що в даний час t максимальна енергія електронів дорівнює E_{\max} , то в якийсь попередній час t_i , коли УХ збурила елемент з лагранжевою координатою $a \equiv R(t_i)$, УХ була спроможна прискорити частинки до енергії

$$E_{\max}(t_i) = E_{\max}(V(t_i)/V(t))^q = E_{\max} \bar{a}^{-3q/2},$$

де $\bar{a} = a/R(t)$.

Можливою є залежність E_{\max} від кута Θ_0 між нормаллю до поверхні УХ та напрямком зовнішнього магнітного поля. Наприклад, у вказаних моделях [13] значення E_{\max} може змінюватися удвічі при зміні Θ_0 від 0 до $\pi/2$. Проте ймовірно, що діапазон зміни максимальних енергій може бути суттєво більшим, якщо саме ці зміни є відповідальними за спостережуване розширення високоенергетичного синхротронного спектру в ЗН G347.3-0.5 та SN 1006 [12]. Можна наближено прийняти, що

$$E_{\max}(\Theta_0) = E_{\max,||} f_E(\Theta_0).$$

Тут $E_{\max,||}$ — максимальна енергія електронів, прискорених на паралельній ділянці УХ (при $\Theta_0 = 0$) на теперішній момент t , а проста параметризація наближено відтворює вплив косих УХ ($\Theta_0 > 0$)

$$f_E(\Theta_0) \approx \exp(a_E(\Theta_0/\Theta_E)^2),$$

де $a_E = \pm 1$, параметр Θ_E не змінюється з часом і регулює вплив Θ_0 на значення E_{\max} . Вплив зміни E_{\max} на синхротронний спектр випромінювання ЗН досліджувався нами в роботі [12]; тут ми обмежуємося випадком $f_E = 1$.

Для опису еволюції розподілу (1) вниз по течії розглядаються процеси втрати енергії електронів внаслідок адиабатичного розширення, а також радіаційних втрат внаслідок синхротронного випромінювання та зворотного ефекту Комптона на фотонах мікрохвильового випромінювання. Вважати- мемо, що релятивістські частинки зв'язані з елементами потоку, які вивели їх з області прискорення [13]. Нехай елемент потоку з лагранжевою координатою a перетнув ударний фронт в момент часу t_i . Якщо енергія електрона на цей момент була E_i , то з часом вона стає рівною [13]

$$E = \frac{E_i}{\bar{n}(\bar{a})^{-1/3} + \mathfrak{F}(\bar{a})E_i/E_f}, \quad (2)$$

де перший доданок в знаменнику зумовлений адіабатичними втратами, другий — радіаційними, $\bar{n} = n/n_s$, так звана «порівняльна» енергія для паралельних УХ $E_f = 637/(B_{\text{эф},s}^2 t)$ ерг = $12.6 B_{\text{эф},s}^{-2} t_4^{-1}$ ТеВ, t_4 вимірюється в одиницях 10^4 р., \mathfrak{F} — це безрозмірна функція, яку можна переписати у зручному для прикладних розрахунків вигляді:

$$\mathfrak{F}(\bar{a}, \Theta_0, d) = \frac{5\sigma_B^2}{2\bar{n}(\bar{a})^{1/3}} \int_{\bar{a}}^1 x^{3/2} \bar{B}_{\text{эф}} \left(\frac{\bar{a}}{x}\right)^2 \bar{n} \left(\frac{\bar{a}}{x}\right)^{1/3} dx,$$

де $B_{\text{эф}}^2 = B^2 + B_{\text{CMB}}^2$, $d = B_{\text{CMB}}/B_0$, $B_{\text{CMB}} = 3.27$ мкГс — індукція магнітного поля, густина енергії якого дорівнює густині енергії космічного мікрохвильового випромінювання. Зауважимо, що шляхом введення B_{CMB} враховуються втрати через зворотний ефект Комптона. Це не є додатковою складовою магнітного поля, яка посилюватиме синхротронне випромінювання, B_{CMB} не змінюватиметься в об'ємі ЗН, як B , тому для прикладу $\bar{B}_{\text{эф},s}^2 = B_0^2(\sigma_B^2 + d^2)$ [13], де $\sigma_B = B_s/B_0$. Вираз для розрахунку $\bar{B}_{\text{эф}}$ є таким: $\bar{B}_{\text{эф}}^2 = (\sigma_B^2 \bar{B}^2 + d^2)/(\sigma_B^2 + d^2)$.

З виразу (2) одержується необхідна далі залежність $E_i(E)$:

$$E_i = \frac{E}{\mathfrak{C}_{ad}(\bar{a}) \mathfrak{C}_{rad}(\bar{a}, E)},$$

де

$$\mathfrak{C}_{ad} = \bar{n}(\bar{a})^{1/3},$$

$$\mathfrak{C}_{rad} = 1 - \mathfrak{F}(\bar{a}, \Theta_0, d) E/E_f.$$

На фронті УХ в час t_i утворився спектр релятивістських електронів

$$N(E_i, t_i) = K_s(t_i) E_i^{-s} \exp\left[-\frac{E_i}{E_{\text{max}}}(t_i)\right].$$

Із закону збереження кількості частинок

$$N(E, a, t) = N(E_i, a, t_i) \frac{a^2 da dE_i}{\sigma r^2 dr dE}$$

(де $\sigma = n_s/n_0$) та закону неперервності $n_0(a) a^2 da = n(a, t) r^2 dr$ і похідної

$$\frac{dE_i}{dE} = \frac{1}{\mathfrak{C}_{ad} \mathfrak{C}_{rad}^2}$$

впливає, що вниз по течії

$$N(E, a, t) = K(a, t) E^{-s} \mathfrak{C}_{rad}(a, E)^{s-2} \exp\left[-\frac{E \bar{a}^{3q/2}}{E_{\text{max}} \mathfrak{C}_{ad}(a) \mathfrak{C}_{rad}(a, E)}\right], \quad (3)$$

де $K(a, t) = K_s(t_i) \bar{n}^{4/3} \mathfrak{C}_{ad}^{s-2}$. Звернемо увагу, що еволюція спектру (3) буде різною для різних Θ_0 , d та E_f . Якщо $K_s \propto V^{-b}$, то зміна K вниз по течії є автотомельною:

$$\bar{K}(a) = K(a, t)/K_s(t) = \bar{a}^{3b/2} \bar{n}(\bar{a})^{(2+s)/3}. \quad (4)$$

Просторовий розподіл електронів з енергією в інтервалі $(E, E \pm dE)$, які не зазнають суттєвих радіаційних втрат, задається виразом $\bar{N}(\bar{a}) = \bar{K}(\bar{a})$, який не залежить від енергії E . Натомість електрони, які ефективно втрачають енергію на випромінювання, розподіляються згідно з виразом

$$\frac{N(E, a, t)}{N_s(E, t)} = \bar{K} \mathfrak{C}_{rad}^{s-2} \exp\left(-\frac{E}{E_{\text{max}}} \left[\frac{\bar{a}^{3q/2}}{\mathfrak{C}_{ad} \mathfrak{C}_{rad}} - 1\right]\right). \quad (5)$$

У цьому виразі еволюція $\bar{K}(\bar{a})$ відбиває адиабатичні зміни енергетичного спектру електронів. Вони однакові для усіх часток: і тих, які випромінюють в радіодіапазоні, й тих, які продукують рентгенівський потік, зазнаючи суттєвих втрат енергії на випромінювання. Інші члени в (5) відповідальні за модифікацію розподілу радіаційними втратами.

Спектр нетеплових електронів буде змінюватися також по поверхні УХ, бо орієнтація магнітного поля відносно нормалі до цієї поверхні впливає на можливість частинок бути прискореними [8, 17]:

$$K_s(\Theta_0) = K_{s,\parallel} f_K(\Theta_0).$$

Цей ефект враховано нами шляхом параметризації

$$f_K(\Theta_0) \approx \exp[-(\Theta_0/\Theta_K)^2].$$

СИНХРОТРОННЕ РЕНТГЕНІВСЬКЕ ТА РАДІОВИПРОМІНЮВАННЯ ЗАЛИШКІВ НАДНОВИХ ЗІР

Спектр синхротронного випромінювання ЗН задається виразом

$$\mathcal{J}_{nth}(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^R dr r^2 P(r, \varepsilon), \quad (6)$$

де φ , θ , r — сферичні координати. Синхротронна диференціальна випромінювальна здатність популяції електронів зі спектром $N(E)dE$ дорівнює

$$P(\varepsilon) = \int_0^{\infty} N(E) p(E, \varepsilon) dE,$$

$p \propto BF(\varepsilon/\varepsilon_c)$ — спектральний розподіл випромінювання одного електрона, $\varepsilon_c = h\nu_c$, h — стала Планка, $\nu_c(E, B) = c_1 \mu_\varphi B E^2$, $\mu_\varphi = \langle \sin\phi \rangle$, ϕ — кут між вектором магнітного поля і променем зору (розрахунок μ_φ описано в [1]), $c_1 = 3e/(4\pi m_e^3 c^5)$, e , m_e — заряд і маса електрона, c — швидкість світла. Функцію $F(w)$ для практичних застосувань зручно апроксимувати:

$$F(w) = \begin{cases} 2.150w^{1/3}, & w < 0.01, \\ \sqrt{\pi} w^{0.29} \exp(-w), & 0.01 \leq w \leq 5, \\ \sqrt{\pi/2} w^{1/2} \exp(-w), & w > 5. \end{cases}$$

Ця апроксимація достатньо точна. Інтеграл $\int_0^{\infty} F d\varepsilon = 1.59$ (точне значення $8\pi/9\sqrt{3} = 1.61$).

Спектр (6) при використанні формул попереднього розділу може бути записаний у вигляді

$$\mathcal{J}_{nth}(\tilde{\varepsilon}) = C_0 \psi(\tilde{\varepsilon}) K_{s,\parallel} B_0 R^3 E_{max,\parallel}^{1-s}, \quad (7)$$

де $C_0 = \sqrt{3} e^3 \mu_\varphi / (m_e c^2)$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon / \varepsilon_c(E_{max,\parallel}(t), B_0)$, t — час спостереження, а автотельні властивості розв'язків Седова дозволяють усю фізику еволюції елемента потоку вниз по течії зібрати в одну безрозмірну функцію

$$\psi(\tilde{\varepsilon}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta f_K \int_0^1 d\bar{a} r^2 \bar{r}_a \bar{K} \sigma_B \bar{B} \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon^{-s} \mathbb{C}_{rad}^{s-2} \exp\left(-\frac{\epsilon \bar{a}^{3q/2}}{\mathbb{C}_{ad} \mathbb{C}_{rad} f_E}\right) F\left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\epsilon^2 \sigma_B B}\right), \quad (8)$$

поведінка якої для даного s залежить від набору значень ($b, \Theta_K, q, \Theta_E, d, \epsilon_f$). Тут $\bar{r}_a = d\bar{r}/d\bar{a}$, $\epsilon = E/E_{max,\parallel}$, функція F задає спектральний розподіл випромінювання одного електрона. Формула зв'язку кута Θ_0 зі сферичними координатами φ, θ наведена в першій роботі [1]; вона залежить від орієнтації зовнішнього магнітного поля відносно спостерігача, яка задається кутом φ_0 між напрямком магнітного поля в МЗС та напрямком на спостерігача.

Вираз (7) справедливий для будь-якої енергії випромінювання, також і в рентгенівському діапазоні, де важливим є врахування радіаційних втрат електронів. Для квантів з енергіями, значно меншими за рентгенівські ($\epsilon \ll 19B_{-5}E_{max,13}^2$ еВ), вирази спрощуються. Якщо використати наближення слабких радіаційних втрат (в якому одержані результати [1]), то з (8) одержимо вираз для синхротронного спектру в радіодіапазоні. Справді, використаємо в (3) дві умови переходу до наближення слабких радіаційних втрат: $E \ll E_f$, $E \ll E_{max}$ та застосуємо інтеграл

$$\int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon^{-s} F\left(\frac{A}{\epsilon^2}\right) = \mathfrak{A}(s) A^{-(s-1)/2},$$

де $\mathfrak{A}(s)$ — відома функція зі значенням $A = \tilde{\epsilon}(\sigma_B \bar{B})^{-1}$. Вираз (8) тоді набере вигляду

$$\begin{aligned} \psi(\tilde{\epsilon}) &= \mathfrak{A}(s) \tilde{\epsilon}^{-(s-1)/2} \zeta(\varphi_0, b, \Theta_K), \\ \zeta &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta f_K \int_0^1 d\bar{a} r^2 \bar{r}_a \bar{K}(\sigma_B \bar{B})^{(s+1)/2}; \end{aligned}$$

для фіксованого s він залежить лише від набору параметрів b, Θ_K . Якщо підставити ці вирази у (7), одержимо вираз (30) з роботи [1]:

$$\mathfrak{F}_{nth}(\nu) = C_1(\nu) \zeta(b, \Theta_K) K_{s,\parallel} B_0^{(s+1)/2} R^3,$$

де

$$\begin{aligned} C_1(\nu) &= c_2 \mu_\varphi \mu_\phi^{(s-1)/2} (\nu/c_1)^{-(s-1)/2}, \\ c_2 &= \mathfrak{A}(s) \sqrt{3} e^3 / (m_e c^2), \quad \mu_\phi^{(s-1)/2} \equiv \langle \sin\phi^{(s-1)/2} \rangle. \end{aligned}$$

Цей вираз можна переписати в термінах $\tilde{\epsilon}$ у формі, подібній до (7):

$$\mathfrak{F}_{nth}(\tilde{\epsilon}) = C_2(\tilde{\epsilon}) \zeta(b, \Theta_K) K_{s,\parallel} B_0 R^3 E_{max,\parallel}^{1-s}, \quad (9)$$

де $C_2(\tilde{\epsilon}) = c_2 \mu_\varphi \tilde{\epsilon}^{-(s-1)/2}$. На протигагу спектру (7), простіший вираз (9) має місце лише у випадку, коли радіаційні втрати електронів слабкі. Наприклад, його можна застосовувати для розрахунків радіовипромінювання.

ПОВЕДІНКА РОЗПОДІЛІВ В ОКОЛІ УДАРНОЇ ХВИЛІ

Для якісного аналізу модельних результатів та аналізу спостережень корисними є наближені вирази для просторових розподілів величин в околі фронту УХ. Розподіл концентрації $n(a)$ одразу за фронтом сильної УХ можна апроксимувати виразом

$$\bar{n}(\bar{a}) \approx \bar{a}^\kappa. \quad (10)$$

За означенням

$$\kappa = \left(- \frac{a}{n_*(a)} \frac{\partial n_*(a)}{\partial a} \right)_{a=R} = \left(- \frac{\partial \ln n_*(a)}{\partial \ln a} \right)_{a=R},$$

де $n_*(a)$ — профіль з розв'язку Седова. У типовому випадку $\gamma = 5/3$ фактор компресії УХ $\sigma = 4$, і $\kappa = 3$. Подібно знаходяться апроксимації для зв'язку між лагранжевою та ейлеровою координатами

$$\bar{r}(\bar{a}) \approx \bar{a}^{1/4} \quad (11)$$

і похідною

$$\bar{r}'_{\bar{a}}(\bar{a}) \approx (1/4)\bar{a}^{-3/2}.$$

При використанні виразів (10) і (11) для складових магнітного поля маємо

$$\begin{aligned} \bar{B}_{\parallel}(\bar{a}) &\approx \bar{a}^{3/2}, \\ \bar{B}_{\perp}(\bar{a}) &\approx \bar{a}^{9/4}. \end{aligned} \quad (12)$$

Наближений вираз для $B_{\text{еф}}$, яке використовується для розрахунку \mathbb{E}_{rad} , має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{B}_{\text{еф}}(\bar{a}) &\approx \bar{a}^{\beta}, \\ \beta &= \frac{(3/2)\cos^2\Theta_0 + (9/4)\sigma^2\sin^2\Theta_0}{\cos^2\Theta_0 + \sigma^2\sin^2\Theta_0 + d^2}. \end{aligned}$$

Для $d = 0$ він переходить у апроксимацію для $\bar{B}(\bar{a}, \Theta_0)$, а вона в граничних випадках паралельних та перпендикулярних УХ — у (12). Для $d > 0$ значення показника β в цих граничних випадках складають відповідно $\beta_{\parallel} = 3/[2(1 + d^2)]$, $\beta_{\perp} = 9/[4(1 + d^2/\sigma^2)]$. Бачимо, що збільшення d (тобто зменшення B_0) призводить до того, що профіль ефективного магнітного поля стає плоскішим. Це означає, що роль ефекту Комптона стає головною у радіаційних втратах електронів. Натомість $d = 0$ означає, що в моделі враховуються лише втрати внаслідок синхротронного випромінювання. Чутливішими до зміни d є паралельні УХ.

З виразу (4) одержуємо

$$\bar{K}(\bar{a}) \approx \bar{a}^{2+s+3b/2}. \quad (13)$$

Апроксимації для \mathbb{E}_{ad} і \mathbb{E}_{rad} записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{ad}(\bar{a}) &\approx \bar{a}, \\ \mathbb{E}_{rad}(\bar{a}, E) &\approx \bar{a}^{5\sigma_B^{(2)}(\Theta_0)E/(2E_f)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Бачимо, що в околі фронту УХ (при $\bar{a} > 0.8$ чи $\bar{r} > 0.94$) їхня поведінка практично не залежить від d (звернемо увагу, що в цій апроксимації E_f залежить від B_0).

Біля фронту УХ вираз (5) набуває вигляду

$$\bar{N}(\bar{a}, \varepsilon) \approx \bar{a}^{2+s+3b/2+(s-2)5\sigma_B^2\varepsilon/(2E_f)} \exp(-\varepsilon[\bar{a}^{3a/2-1-5\sigma_B^2\varepsilon/(2E_f)} - 1]),$$

де $\varepsilon = E/E_{\text{max}}$. Похибка цієї апроксимації менша за 10 % для $\bar{r} \geq 0.94$.

У випадку степеневого спектру електронів апроксимація розподілу випромінювальної здатності P по паралельній УХ записується як

$$P_{\parallel} \propto \bar{K}\bar{B}_{\parallel}^{(s+1)/2} \approx \bar{a}^{(7s+11)/4+3b/2}, \quad (15)$$

а по перпендикулярній УХ — як

$$P_{\perp} \propto \bar{K}\bar{B}_{\perp}^{(s+1)/2} \approx \bar{a}^{(17s+25)/8+3b/2}. \quad (16)$$

Бачимо, що в перпендикулярних УХ зменшення випромінювальної

здатності P зі зменшенням a відбувається дещо швидше, ніж у паралельних УХ. Причиною є швидше зменшення напруженості магнітного поля за фронтом перпендикулярної УХ.

Зазначимо наприкінці, що допоміжні апроксимації наведено для спрощення якісного аналізу результатів; усі розрахунки здійснено з використанням основних формул.

РЕЗУЛЬТАТИ

Властивості розподілу електронів поблизу ударної хвилі. На рис. 1 наведено розраховані профілі $K(\bar{r})$, які відповідають розподілу релятивістських електронів $N(\bar{r})$ з енергіями $E \ll E_{\max}$. Важливо, що позитивні значення b призводять до крутішого падіння амплітуди електронного спектру.

Як видно з виразу (5), при різних параметрах моделі радіаційні втрати по-різному змінюють розподіл $N(a)$. Це наглядно демонструє рис. 2. Якщо максимальна енергія електронів вища для УХ з більшою швидкістю (випадає $q = 2$), то $N(a)$ зменшується повільніше, ніж тоді, коли максимальна енергія не залежить від швидкості УХ. Цей ефект посилюється зі збільшенням ϵ_f . При достатньо високому значенні цього параметра можливим навіть є збільшення концентрації електронів з енергіями $E \sim E_{\max}$ (правий графік). Розрахунки показують, що якщо при цьому ще й $b < 0$, то це зростання може бути досить різким. Зменшення ϵ_f призводить до того, що різниця між кривими для різних q зменшується, й профілі $N(a)$ стають дещо крутішими. Як видно з апроксимації (14), профілі $N(a)$ в областях, близьких до УХ, практично не змінюються від зміни параметрів d і Θ_0 .

Характер розподілу релятивістських електронів $N(a)$ чисельно оцінюється просторовим масштабом l_2 . Означимо цей масштаб як відстань від фронту УХ, на якій значення величини є меншим від значення на УХ в e разів: $l_2 = 1 - \bar{r}(\bar{a}_*)$, де \bar{a}_* є розв'язком рівняння $\bar{N}(\bar{a}_*) = e^{-1}$. Оскільки радіаційні втрати електронів $\dot{E} \propto E^2$, то l_2 буде зменшуватися зі збільшенням E . Роль ряду факторів в модифікації масштабу l_2 показано на рис. 3. Зі зменшенням енергії електронів масштаб перестає бути чутливим до енергії, що є наслідком того, що радіаційні втрати електронів стають нехтовно малими порівняно з адіабатичними. Важливо, що збільшення b призводить до зменшення l_2 . Позитивне значення b означає, що з часом (зі

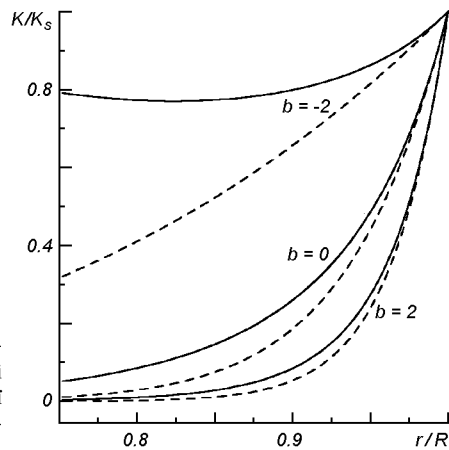


Рис. 1. Розподіл $\bar{K}(\bar{r})$ за фронтом адіабатичної УХ для різних значень b (суцільні криві). Штрихові криві — апроксимації (13) та (11). Тут і далі розрахунки здійснено для $s = 2$

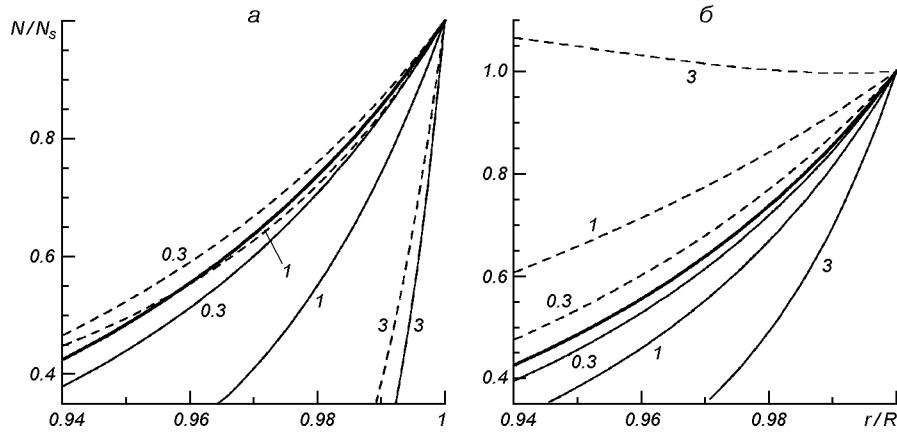


Рис. 2. Розподіл електронів $\bar{N}(\bar{r})$ з різною енергією $\varepsilon = E/E_{\max}$ (числа біля кривих) за фронтом адиабатичної УХ: *a* — $\varepsilon_f = 1$, *б* — $\varepsilon_f = 10$. Жирна крива — профіль $\bar{K}(\bar{r})$, $q = 0$ (суцільні криві), $q = 2$ (штрихові криві). Для всіх кривих $b = 0$, $d = 0$, $\Theta_0 = 0$

зменшенням швидкості) збільшується кількість інжектованих часток, а отже, профіль їхнього розподілу вниз по течії справді повинен ставати крутішим. Великі значення \bar{l}_2 у випадку $b = -3/2$ засвідчують пологий характер розподілу часток. При $b = -2$ зі зменшенням енергії в розподілі $N(\bar{a})$ з'являється мінімум (як це видно на рис. 1). Значення цього мінімуму для енергій $\varepsilon < 0.05$ є вищим за $1/\varepsilon$, й тому розрахувати масштаб \bar{l}_2 не можна. Тому ми наводимо розрахунки для $b = -3/2$. Зауважимо, що великі значення \bar{l}_2 для $b = -2$ є наслідком домінування залежності $K_s \propto V^{-b}$ (що є й причиною збільшення $N(\bar{a})$ після мінімуму). Вказана степенева залежність є лише емпіричною апроксимацією, яку насправді можна використовувати протягом відносно короткого часу еволюції (тобто в областях простору, близьких до УХ), а тому значення $\bar{l}_2 > 0.3$, знайдені при використанні в моделі цієї степеневої залежності, швидше за все не є фізичними.

Важливим для інтерпретації результатів є параметр $\varepsilon_f = E_f/E_{\max}$. На рис. 3, *a* бачимо, що зі збільшенням енергії електронів \bar{l}_2 швидко зменшується, якщо $\varepsilon_f < 1$, а для $\varepsilon_f > 1$ ці зміни більш поступові. «Порівняльна енергія» $E_f \propto (B_{\text{эф},s}^2 t)^{-1}$ — це енергія електрона, яку він буде мати після випромінювання протягом часу t в магнітному полі $B_{\text{эф},s}$, якщо його початкова енергія була нескінченною. Вказана залежність $\bar{l}_2(\varepsilon_f)$ відповідає даним [13]: якщо $\varepsilon_f < 1$, то роль радіаційних втрат велика, якщо ж $\varepsilon_f > 1$, то основним процесом втрат енергії електронами навіть для електронів з енергіями $\varepsilon \sim 1$ є адиабатичні зміни.

Розподіл синхротронної випромінювальної здатності. Функція $F(\varepsilon/\varepsilon_c)$ вказує, що максимум синхротронного випромінювання електронів з енергією ε припадає на частоту $\tilde{\omega} = 0.29\varepsilon^2\sigma_B B$. Через те що напруженість магнітного поля зменшується вниз по течії за УХ, то електрони тієї самої енергії ε , перебуваючи на різних відстанях \bar{a} , випромінюватимуть основну частину енергії на різних частотах, відповідно до зміни $B(\bar{a})$. Оскільки B зменшується з віддаленням від УХ, то частота, на якій в основному випромінюють електрони з енергією ε , також зменшується. Розглянемо для прикладу паралельну УХ та частоту випромінювання $\tilde{\omega} = 0.29\varepsilon^2$, на яку

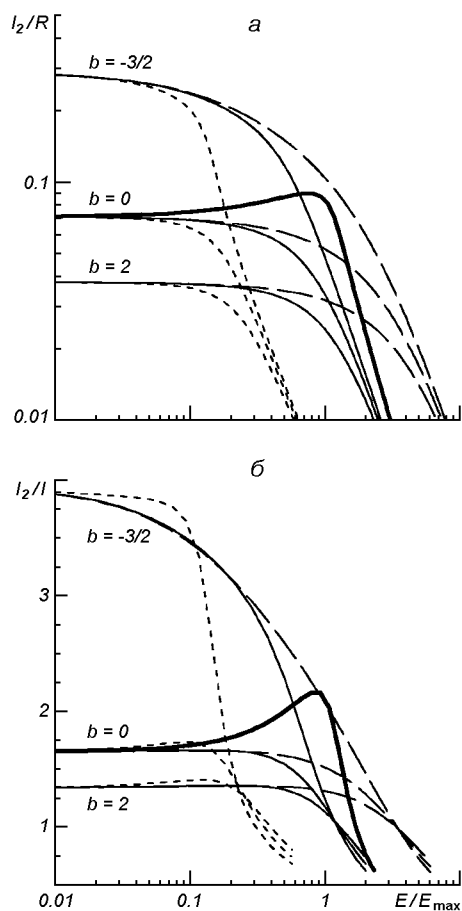


Рис. 3. Просторовий масштаб l_2 (а) та відношення просторових масштабів l_2/l (б) для розподілу електронів $\bar{N}(\bar{r})$ з різною енергією ϵ : короткі штрихи — $\epsilon_f = 0.1$, суцільні криві — $\epsilon_f = 1$, довгі штрихи — $\epsilon_f = 10$. Для всіх кривих $d = 0$, $\Theta_0 = 0$, $q = 0$. Жирна крива — випадок $q = 2$, $b = 0$, $\epsilon_f = 1$

припадає максимум випромінювання електронів з енергією ϵ , коли їхня координата дорівнює $\bar{a} = 1$. На цій самій частоті в елементі потоку з координатою $\bar{a} < 1$ в основному випромінюватимуть електрони з вищою енергією. Й чим далі від УХ перебуває елемент потоку, тим вищою мусить бути енергія електронів, які випромінюють на заданій частоті. Це призводить до того, що просторовий розподіл електронів, які переважно випромінюють на вказаній частоті, не збігатиметься з просторовим розподілом електронів заданої енергії; при цьому, взагалі кажучи, перший повинен бути крутішим за другий, оскільки синхротронні втрати більш енергетичних електронів є вищими.

Порівняємо розподіли випромінювальної здатності $\bar{P}(\bar{r})$ з розподілами електронів $\bar{N}(\bar{r})$. Нас цікавитиме інтервал $\bar{r} = 0.94\dots 1$. На цьому інтервалі \bar{V} змінюється на 10 та 15 % відповідно для паралельних та перпендикулярних УХ. Оскільки така зміна є малою, ми будемо порівнювати у вказаному інтервалі \bar{r} розподіли $\bar{P}(\bar{r})$ на частоті $\tilde{\epsilon} = 0.29\epsilon^2$ з $\bar{N}(\bar{r})$ для енергії ϵ .

Розглянемо спочатку випадок слабких радіаційних втрат. Вирази (13), (15), (16) показують, що розподіли $\bar{N}(\bar{r})$ і $\bar{P}(\bar{r})$ за фіксованого $s = 2$ залежать

лише від b та Θ_0 . Порівняння характерних просторових масштабів цих розподілів (відповідно l_2 та l) проведено в табл. 1. Бачимо, що застосовувати рівність $l = l_2$ до аналізу спостережених карт розподілу яскравості ЗН в радіодіапазоні можна тоді, коли модель ЗН передбачає позитивні значення b (тобто коли ефективність інжекції збільшується зі зменшенням швидкості УХ). Зменшення b призводить до помітної розбіжності між просторовими масштабами розподілу електронів та випромінювальної здатності елемента об'єму.

Така тенденція у співвідношенні між l_2 і l зберігається й для електронів, які випромінюють в рентгенівському діапазоні. Відношення l_2/l буде різним для електронів з різною енергією та залежатиме вже не лише від одного параметра b (рис. 3, б). Іншим параметром, який помітно впливає на співвідношення між масштабами розподілів $\bar{N}(\bar{r})$ і $\bar{P}(\bar{r})$, є показник q . Якщо УХ з вищою швидкістю здатна прискорювати електрони до вищої енергії E_{\max} (тобто $q > 0$), то відмінність між розподілами електронів та синхротронної випромінювальної здатності в області енергій $E \sim E_{\max}$ є більшою, ніж у випадку $q = 0$. Якщо $q = 0$, наявною є тенденція до збільшення відношення масштабів зі зменшенням енергії електронів; тоді значення, наведені в табл. 1, будуть граничними при $\epsilon \ll \epsilon_f$. При $q = 2$ в інтервалі $\epsilon < \epsilon_f$ відношення збільшується зі збільшенням ϵ , відтак для $\epsilon > \epsilon_f$ — зменшується.

Посилення ролі радіаційних втрат в еволюції електронного розподілу призводить до різкого зменшення $\bar{N}(\bar{r})$ та має наслідком те, що відношення l_2/l стає близьким до 1, чи навіть меншим (тобто розподіл випромінювальної здатності є пологішим за розподіл електронів). Це стається тоді, коли енергія електронів ϵ наближається до ϵ_f .

Додамо, що для перпендикулярних УХ значення відношення l_2/l вищі на 20—40 %, ніж для паралельних; причиною цього є дещо крутіший розподіл напруженості магнітного поля за фронтом перпендикулярної УХ. Відношення масштабів слабо відчуває зміну d : при збільшенні d від 1 до 10 відношення стає меншим на кілька відсотків.

Похибки оцінки магнітного поля, посиленого УХ. Одним з найважливіших результатів використання даних спостережень сучасних рентгенівських місій є експериментальне підтвердження передбаченого теорією факту турбулентного посилення напруженості магнітного поля на фронті УХ [5].

Два масштаби, \bar{l}_2 і \bar{l} , є важливою складовою методу оцінки величини магнітного поля на фронті УХ [3, 5]. В цьому методі форма профілю випромінювальної здатності $P(r)$ апроксимується експонентою $P(\bar{r}) \approx P_e \exp(-(1 - \bar{r})/\bar{l})$. Величина \bar{l} оцінюється зі спостережень шляхом аналізу форми розподілу поверхневої яскравості. Так, якщо $\bar{L} = L/R$ — ширина профілю поверхневої яскравості на висоті $1/e$ від максимуму, то $\bar{l} \approx \bar{L}/7$ [5]. Якщо ж використовувати ширину профілю $\bar{L} = L/R$ на висоті $1/2$

Таблиця 1. Порівняння характерних просторових масштабів \bar{l}_2 і \bar{l} розподілів $\bar{N}(\bar{r})$ та $\bar{P}(\bar{r})$ для електронів, які не зазнають суттєвих радіаційних втрат

b	\bar{l}_2	l_2/l	
		паралельні УХ	перпендикулярні УХ
-3/2	0.286	3.94	5.06
0	0.071	1.65	1.94
2	0.038	1.34	1.50

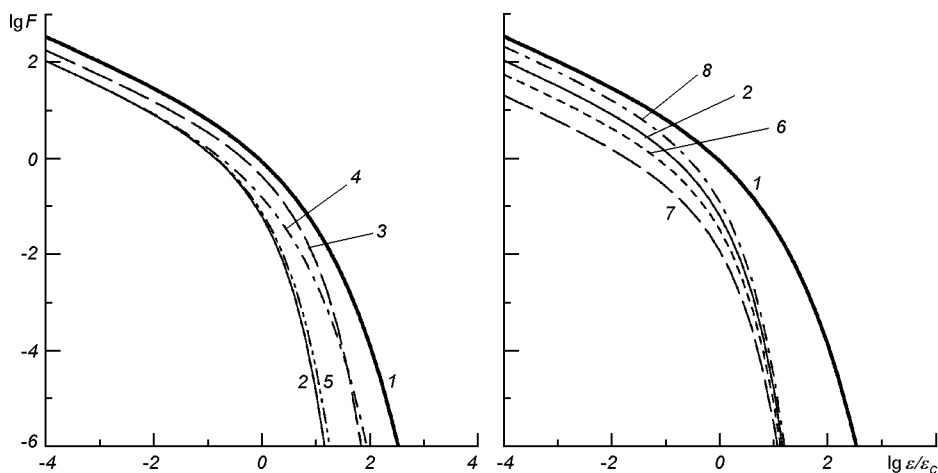


Рис. 4. Еволюція спектру синхротронного випромінювання за фронтом УХ в однорідному середовищі. Лінія 2 побудована для базового набору параметрів: $\bar{a} = 0.8$, $\Theta_0 = 0$, $d = 1$, $\epsilon_f = 1$, $b = 0$. Інші лінії побудовано для базового набору з лише одним зміненим параметром: (1 — $\bar{a} = 1$, 3 — $\Theta_0 = \pi/2$, 4 — $\epsilon_f = 10$, 5 — $d = 0.1$, 6 — $b = 2$, 7 — $b = 5$, 8 — $b = -2$)

максимуму, то $\bar{l} \approx \bar{L}/4.6$ [3]. По-друге, приймається, що розподіл релятивістських електронів $f_e(r, p) = f_{es}(p)\exp(-(1 - \bar{r})/\bar{l}_2)$ є розв'язком одновимірною лінійного кінетичного рівняння, яке описує дифузію, радіаційні втрати електронів та враховує адвекцію з постійною швидкістю [18], а величина l_2 визначається або дифузією, або переносом речовини.

Для оцінки значення напруженості магнітного поля використовується припущення про те, що величина l збігається з ефективним розміром області, яку займають ультрарелятивістські електрони за фронтом УХ: $l = l_2$. Відтак величину напруженості магнітного поля визначають із закону $l_2 \propto B^{-3/2}$ [3, 5]. Припущення $l = l_2$ справедливе у випадках, які розглядалися авторами методу, а саме: якщо плазма та магнітне поле за фронтом УХ є однорідними, якщо не враховується вплив різних факторів на еволюцію розподілу електронів вниз по течії, можливість еволюції ефективності інжекції та E_{\max} з часом тощо. Вище ми показали, як врахування таких факторів порушує наближену рівність $l_2/l = 1$. Якщо $l \neq l_2$, тоді значення B_s , одержане описаним методом, потрібно домножити на $(l_2/l)^{-2/3}$. Наприклад, якщо $l_2 = 2l$, то коефіцієнт дорівнює 0.63. Для практичного застосування методу важливо, що для електронів з енергією $\epsilon/\epsilon_f \sim 1$ відношення $l_2/l \approx 1$ та що зі збільшенням b похибка стає меншою. Крім того, якщо $\epsilon/\epsilon_f > 1$, то коефіцієнт $(l_2/l)^{-2/3}$ може бути навіть більшим за одиницю.

Локальні спектри синхротронного випромінювання. Електрони з різною енергією ϵ мають різні профілі розподілів $N(\bar{a})$. З віддалю від фронту УХ стає все менше електронів з високими енергіями. Як наслідок форма спектру електронів $N(\epsilon)$ змінюватиметься зі зменшенням a , що відповідно позначиться на формах спектрів синхротронного випромінювання. На рис. 4 показано розрахунки локальних спектрів випромінювання електронів для $\bar{a} = 1$ та $\bar{a} = 0.8$. Як і очікувалося, радіаційні втрати є ефективними в області обрізання спектру. При $\epsilon_f = 10$ радіаційні втрати менше модифікують спектр (лінія 4). Форма спектрів малочутлива до d і

Θ_0 (вища амплітуда спектру для $\Theta_0 = \pi/2$ пов'язана з тим, що $B_{s,\parallel} < B_{s,\perp}$). Натомість значення b помітно впливає на форму синхротронного спектру (лінії 6—8). Вплив цього параметра помітний у зміні амплітуди спектру в області $\tilde{\varepsilon} < 0.01$, де радіаційні втрати не впливають на спектр. Це й зрозуміло, бо b позначається лише на характері зміни $K(a)$, що відбиває адиабатичні втрати в електронному спектрі [12].

Відношення потоків радіо- та рентгенівського синхротронного випромінювання. Зміни властивостей електронних розподілів та локальних спектрів випромінювання, досліджені вище, визначатимуть й спектр випромінювання від усього ЗН. Порівняємо потоки синхротронного випромінювання ЗН в радіо- та в рентгенівському діапазонах. Енергії релятивістських електронів, чиє синхротронне випромінювання має максимуми на частоті 1 ГГц (радіодіапазон) та в фотонах з енергією 5 кеВ (рентгенівський діапазон), відрізняються в $3.48 \cdot 10^4$ разів. Відношення відповідних потоків, розраховані за формулами (7) і (9), наведено в табл. 2. Чим воно менше, тим вищим є потік рентгенівських квантів. Зі збільшенням максимальної енергії у спектрі прискорених електронів спектр синхротронного випромінювання в області 5 кеВ стає пологішим, що й фіксується меншим значенням відношення $\mathcal{F}_{1\text{ГГц}}/\mathcal{F}_{5\text{кеВ}}$. Чим більше значення напруже-

Таблиця 2. Логарифм відношення синхротронного потоку на $\nu = 1$ ГГц до потоку на $\varepsilon = 5$ кеВ

b	B_0 , мкГс	E_{max} , ТеВ	d	q	$\lg(F_{1\text{ГГц}}/F_{5\text{кеВ}})$
-2	3	30	0	0	6.72
0					6.51
2					6.39
-2	30	30	0	0	5.50
0					5.35
2					5.29
-2	3	300	0	0	4.92
0					4.85
2					4.82
-2	30	300	0	0	4.69
0					4.65
2					4.64
0	3	30	1	0	6.53
			1	2	6.36
			10	0	6.70
			10	2	6.54

ності магнітного поля, тим вищими є радіаційні втрати електронів $\dot{E} \propto B^2$. Тому крутішим є розподіл електронів за фронтом УХ, проте водночас зростає потік випромінювання в області обрізання спектру. Збільшення b та q зумовлюють зростання випромінювання в рентгенівському діапазоні порівняно з радіовипромінюванням. Натомість вище значення d визначає вищу роль ефекту Комптона у радіаційних втратах й призводить до крутішого падіння синхротронного спектру в області 5 кеВ.

ВИСНОВКИ

Ми отримали вирази, які дозволяють описувати еволюцію розподілу релятивістських електронів в об'ємі ЗН після його формування в області УХ. Нашу модель можна застосувати для розрахунку властивостей енергетично-

го спектру електронів в області їхніх максимальних енергій, де суттєвою є роль радіаційних втрат частинок. Враховано радіаційні втрати внаслідок синхротронного випромінювання та зворотного ефекту Комптона, які є основними каналами енергетичних втрат електронів. Формули записано у вигляді, в якому розділено роль адиабатичних та радіаційних втрат. Враховано можливу залежність ефективності інжекції електронів від швидкості УХ та здатності УХ різної швидкості прискорювати частки до різних максимальних енергій. Усі вирази записано у зручному для використання безрозмірному вигляді.

Наведено вирази для розрахунку як спектрального, так і просторового розподілу синхротронного випромінювання ЗН, які можна застосовувати для аналізу нетеплового випромінювання в рентгенівському діапазоні. Показано, що автотельність розв'язків Седова дозволяє у випадку врахування радіаційних втрат електронів описати усі особливості еволюції випромінювальної здатності електронів в об'ємі ЗН однією константою, яка залежить лише від параметрів моделі і є постійною в часі. Показано, як запропонований опис переходить у граничному випадку до простішої моделі, в якій радіаційними втратами можна знехтувати (її слід використовувати для моделювання радіовипромінювання ЗН).

Наведено апроксимаційні формули, корисні для якісного аналізу поведінки спектральних та просторових розподілів випромінювання.

Розраховано просторові розподіли релятивістських електронів та показана роль модельних параметрів у їхній модифікації. Проведено їхнє порівняння з просторовими розподілами синхротронної випромінювальної здатності. Вказано на величину похибок, які виникають в експериментальній оцінці напруженості магнітного поля, якщо використовується припущення про те, що ці розподіли характеризуються однаковими просторовими масштабами. Показано, як змінюється спектр синхротронного випромінювання елементу потоку при його віддаленні від фронту УХ.

Дослідження частково фінансувалися в рамках цільової програми Національної академії наук України «Космомікрофізика».

1. Петрук О., Бешлей В. Синхротронне та теплове випромінювання залишків наднових зір в рентгенівському діапазоні. Слабкі радіаційні втрати електронів // Кинематика і фізика небес. тел.—2007.—23, № 1.—С. 25—39.
2. Asvarov A. Radio emission from shell-type supernova remnants // *Astron. and Astrophys.*—2006.—459, N 2.—P. 519—533.
3. Ballet J. X-ray synchrotron emission from supernova remnants // *Adv. Space Res.*—2006.—37.—P. 1902—1908.
4. Baring M. Topical issues for particle acceleration mechanisms in astrophysical shocks // *Astrophys. and Space Sci.*—2007.—307, N 1-3.—P. 297—303.
5. Berezhko E. G., Volk H. J. Direct evidence of efficient cosmic ray acceleration and magnetic field amplification in Cassiopea A // *Astron. and Astrophys.*—2004.—419, N 2.—P. L27—L30.
6. Berezhko E. G., Volk H. J. The theory of synchrotron emission from supernova remnants // *Astron. and Astrophys.*—2004.—427, N 2.—P. 525—536.
7. Decourchelle A. Elemental composition and distribution in SNRs: X-ray spectroscopy // *New Astron. Revs.*—2004.—48.—P. 75—79.
8. Ellison D. C., Baring M. G., Jones F. C. Acceleration rates and injection efficiencies in oblique shocks // *Astrophys. J.*—1995.—453, N 2.—P. 873—882.
9. Fulbright M. S., Reynolds S. P. Bipolar supernova remnants and the obliquity dependence of shock acceleration // *Astrophys. J.*—1990.—357, N 1.—P. 591—601.
10. Gaisser T. K., Protheroe R. J., Stanev T. Gamma-ray production in supernova remnants // *Astrophys. J.*—1998.—492, N 1.—P. 219—227.
11. Hendrick S. P., Reynolds S. P. Maximum energies of shock-accelerated electrons in large magellanic cloud supernova remnants // *Astrophys. J.*—2001.—559, N 2.—P. 903—908.

12. *Petruk O.* The artificial broadening of the high-energy end of electron spectrum in supernova remnants // *Astron. and Astrophys.*—2006.—**460**, N 2.—P. 375—379.
13. *Reynolds S. P.* Models of synchrotron X-rays from shell supernova remnants // *Astrophys. J.*—1998.—**493**, N 1.—P. 375—396.
14. *Reynolds S. P., Keohane J. W.* Maximum energies of shock-accelerated electrons in young shell supernova remnants // *Astrophys. J.*—1999.—**525**, N 1.—P. 368—374.
15. *Vink J.* X-ray high resolution and imaging spectroscopy of supernova remnants // *X-ray Universe 2005* / Ed. by A. Wilson. — ESA Publ. Division, 2006.—P. 306—315.
16. *Volk H.* Shell-type supernova remnants // *Towards a network of atmospheric Cherenkov detectors* / Eds B. Degrange, G. Fontaine. — Palaiseau, France, 2006.—P. 233—245.
17. *Volk H. J., Berezhko E. G., Ksenofontov L. T.* Variation of cosmic ray injection across supernova shocks // *Astron. and Astrophys.*—2003.—**409**, N 2.—P. 563—571.
18. *Volk H. J., Morfill G. E., Forman M. A.* The effect of losses on acceleration of energetic particles by diffusive scattering through shock waves // *Astrophys. J.*—1981.—**249**, N 1.—P. 161—175.
19. *Weisskopf M. C., Hughes J. P.* Six years of Chandra observations of supernova remnants // *Astrophysics Update 2* / Ed. by J. W. Mason. — Heidelberg: Springer, 2006.—P. 55—75.

Надійшла до редакції 26.03.07