

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ ДЛЯ НЕЙТРОННО-ФИЗИЧЕСКИХ РАСЧЁТОВ

А.И. Жуков

*ННЦ «Харьковский физико-технический институт»,
г. Харьков, Украина*

Предложен новый метод решения стационарных уравнений, описывающих диффузию нейтронов. Метод основан на вариационной формулировке уравнений стационарной диффузии и прямом поиске минимума соответствующего функционала. Результаты тестового расчёта мощности тепловыделяющих сборок показывают точность ~ 2%.

ВВЕДЕНИЕ

Нейтронно-физические расчёты легководных реакторов во многих случаях основаны на решениях стационарных уравнений диффузии нейтронов в двугрупповом приближении [1]. Наиболее распространённым методом решения этих уравнений является нодальный метод [-]. В этом методе тепловыделяющая сборка (ТВС) разбивается на конечные объёмы – ноды – с однородными, как правило, свойствами. Благодаря однородности можно в явном виде написать решение одномерного уравнения диффузии внутри ноды в виде разложения по собственным функциям лапласиана и/или полиномам. Неизвестные коэффициенты в разложении выражаются через токи (градиенты потоков) на границах. Требования непрерывности нормальных компонентов токов приводят к системе линейных алгебраических уравнений. ТВС квадратного сечения обычно разбиваются на 4 ноды в поперечном сечении и 20... 50 нод по высоте. Из-за сравнительно грубой сетки число уравнений невелико, и решения этих уравнений легко находятся. Нодальный метод обеспечивает хорошую точность при нахождении средних характеристик ноды – мощности, выгорания и т.п. Для получения детальной картины, например, потвального распределения мощности, применяется специальная техника восстановления нейтронных полей внутри ноды [2].

Нодальный метод для реакторов с ТВС шестигранного сечения имеет свои особенности. Сведение трехмерных уравнений к одномерным в этом случае становится непросто из-за «ломаной» боковой поверхности ноды. Эта проблема была решена с помощью конформных преобразований шестиугольника в прямоугольник [3]. Кроме того, поскольку шестиугольник невозможно разбить на меньшие шестиугольники, возможна только одна нода в поперечном сечении ТВС, и, как следствие, необходим учёт неоднородности свойств внутри ноды для обеспечения точности, принятой для квадратных ТВС [4].

Между тем, для решения уравнений диффузии, теплопроводности, теории упругости, электродинамики и др. давно и успешно используется метод конечных элементов (МКЭ)[5]. Преимуществами МКЭ являются простота, независимость от формы расчётной области, гибкость расчётной сетки. Недостатки,

как и у близкого метода конечных разностей, заключаются в большом числе переменных, что требует больших объёмов памяти и времени вычислений. С развитием вычислительных мощностей эти недостатки будут уменьшаться, а если говорить о требованиях к оперативной памяти, то их можно избежать уже сегодня.

В данной работе представлены (а) описание метода локальных вариаций на основе МКЭ для решения стационарных уравнений диффузии двух групп нейтронов и (б) результаты двумерных тестовых расчётов для реактора ВВЭР-1000.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИФFUЗИИ

Стационарные уравнения диффузии для двух групп нейтронов имеют следующий вид:

$$-\nabla(D_g \nabla \phi_g) + \sigma_g \phi_g = q_g, \quad (1)$$

где $g = 1, 2$ – номер группы, 1 – быстрые, 2 – тепловые; ϕ_g – скалярный поток нейтронов; D_g – коэффициент диффузии; σ_g – сечение увода из группы; для 1 группы оно состоит из суммы сечения поглощения σ_{1a} и замедления σ_s , т.е. $\sigma_1 = \sigma_{1a} + \sigma_s$, для 2 группы оно равно сечению поглощения $\sigma_2 = \sigma_{2a}$. Источники

$$q_1 = \frac{1}{k^{ef}} (\sigma_{1v} \phi_1 + \sigma_{2v} \phi_2), \quad q_2 = \sigma_s \phi_1, \quad (2)$$

где σ_{gv} – v -сечение деления; k^{ef} – коэффициент размножения нейтронов (собственное значение). В общем случае граничные условия на внешней поверхности можно записать в виде [6]

$$D_g \nabla \phi_g \cdot \mathbf{n} + \alpha_g \phi_g + J_g = 0, \quad (3)$$

где для случая стандартных альбедных условий

$$J_1 = 0, \quad J_2 = \alpha_2 \phi_1.$$

Для упрощения записи в дальнейшем опустим индекс группы g .

Уравнения (1) с граничными условиями (3) получаются из условия минимума функционала [7]:

$$\Xi = \int_V \left\{ \frac{1}{2} D(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \sigma \phi^2 - q\phi \right\} dV + \oint_S \left(\frac{1}{2} \alpha \phi^2 + J\phi \right) dS. \quad (4)$$

Найдём нейтронный поток ϕ , доставляющий минимальное значение функционалу (4); очевидно, такой поток будет решением уравнений (1)-(3).

Разобьём ТВС на конечные элементы в форме прямой призмы с треугольным сечением. Поперечное сечение ТВС изображено на рис. 1. Внутри каждого конечного элемента разложим поток, коэффициент диффузии, сечения по базисным функциям:

$$\phi(x, y, z) = \sum_j \phi_j \cdot F_j(x, y, z), \quad (5)$$

где ϕ_j – значения функции в j -м узле.

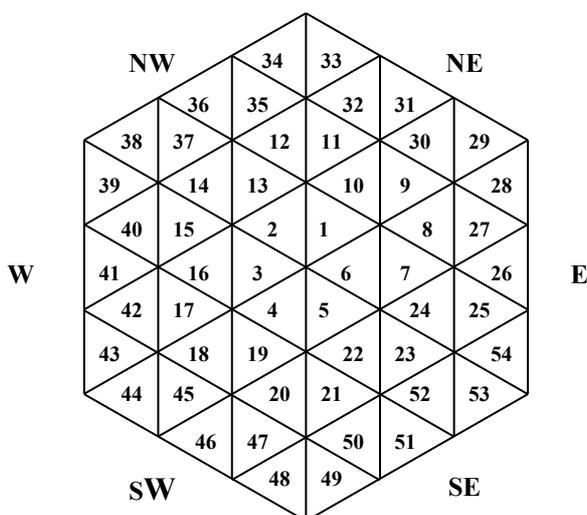


Рис. 1. Разбиение сечения ТВС на конечные элементы. Показано название граней

Подставив разложение (5) в (4) и изменив значение потока в k -м узле

$$\phi_k \rightarrow \phi_k + \delta\phi_k, \quad (6)$$

получим вариацию функционала (4), связанную с изменением потока в k -м узле:

$$\delta\Xi_k = U_k \delta\phi_k + \frac{1}{2} B_{kk} (\delta\phi_k)^2, \quad (7)$$

где

$$U_k = \sum_j B_{kj} \phi_j + A_k; \quad (8)$$

$$B_{kj} = \sum_i \int_V D_i F_i \cdot \nabla F_k \cdot \nabla F_j dV + \sum_i \int_V \sigma_i F_i \cdot F_k F_j dV + \alpha \oint_S F_k F_j dS; \quad (9)$$

$$A_k = - \sum_i \int_V q_i F_i F_k dV + \sum_i \oint_S J_i F_i F_k dS. \quad (10)$$

Интегралы по поверхности отличны от нуля только в случае, когда узел, в котором происходит вариация потока, принадлежит поверхности. Вариация потока (6) приведёт к максимальному уменьшению функционала (4) при

$$\delta\phi_k^* = - \frac{U_k}{B_{kk}}. \quad (11)$$

Применяя процедуру вариации потока во всех узлах до тех пор, пока максимальная вариация $\delta\phi_k^*$ станет меньше заданного значения точности, получим искомое решение.

Приведенный выше алгоритм используется в трёхмерном коде DiFis (Diffusion and Fission), разработанном автором. В этом коде в качестве базисных взяты функции

$$F_j(x, y, z) = \xi_j(x, y) \cdot \zeta_j(z), \quad (12)$$

где линейные симплекс-функции $\xi_j(x, y)$ равны 1 в собственных узлах и 0 в остальных:

$$\xi_j(x, y) = ax + by + c; \quad (13)$$

$$\xi_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \quad k \pm 3 \\ 0, & j \neq k \text{ or } j \neq k \pm 3 \end{cases}$$

$$\zeta_j(z) = \begin{cases} \frac{z}{h}, & j = 4, 5, 6 \\ \frac{h-z}{h}, & j = 1, 2, 3 \end{cases}. \quad (14)$$

Узлы 1, 2, 3 относятся к нижней грани треугольной призмы, а 4, 5, 6 – к верхней, h – высота призмы.

ПРИМЕР РАСЧЁТА

В качестве примера расчётов, выполненных с помощью кода DiFis, рассмотрим двумерную задачу, описанную в [1]. Результаты, с которыми идёт сравнение (эталон), получены в [2] путём экстраполяции конечно-разностных расчётов на сетку из 384 треугольников в сечении ТВС. Граничным условием на границе отражатель/вакуум является отсутствие тока, т.е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{12} = 0. \quad (15)$$

На рис. 2 приведена схема загрузки в 30°-м секторе симметрии. Тестовые расчёты выполнены для 60° сектора, который получается из приведенного на рисунке путём зеркального отражения относительно оси, проходящей через центры ТВС № 1-7. Параметры топлива и отражателя взяты из работы [3].

В таблице показаны те параметры, которые не зависят от выгорания.

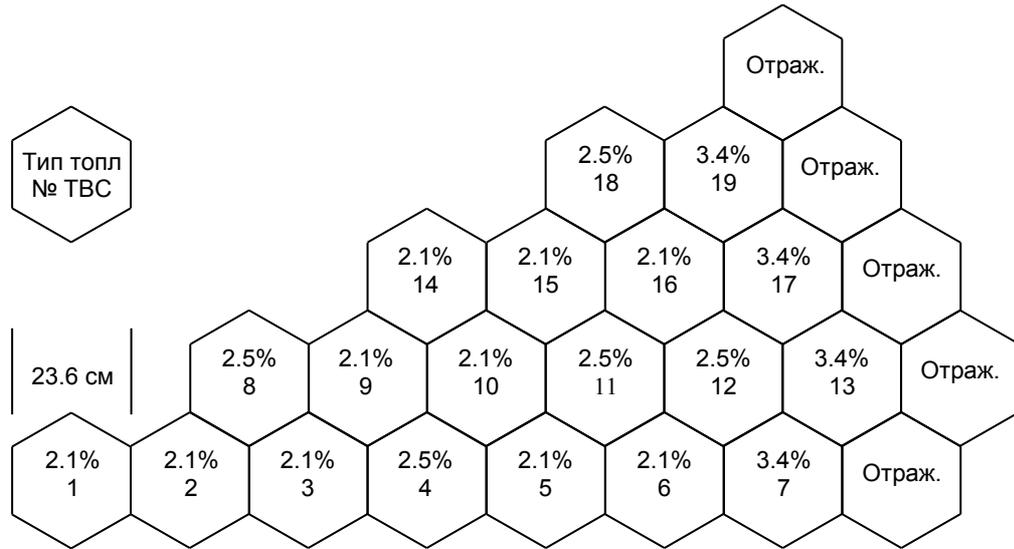


Рис. 2. Схема загрузки

Параметры топлива и отражателя

| Тип ТВС | D_1 , см | D_2 , см | σ_s , см ⁻¹ | σ_{1a} , см ⁻¹ | σ_{2a} , см ⁻¹ |
|------------|------------|------------|-------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 2.1% | 1.5015 | 0.399202 | 0.0189 | Массив из [] | Массив из [] |
| 2.5% | 1.5015 | 0.402091 | 0.0188 | Массив из [] | Массив из [] |
| 3.4% | 1.5015 | 0.406504 | 0.0185 | Массив из [] | Массив из [] |
| Отражатель | 1.297 | 0.2544 | 0.0237 | 0.02468 | 0.138 |

Мощность (энерговыведение) ТВС рассчитывались по формуле

$$E = \int \{ \sigma_{1k} \phi_1 + \sigma_{2k} \phi_2 \} dV, \quad (16)$$

где $\sigma_{гк}$ – сечения энерговыведения.

На рис. 3 и 4 изображены относительные энерговыведения ТВС для начала и конца топливной кампании. Для начала цикла, когда параметры однородны по сечению сборок, приведены эталонное значение и разность между расчётным и эталонным значениями, а для конца цикла проводилось два расчёта: в случае (а) каждая ТВС характеризовалась средними по сборке значениями σ , σ_v и σ_k , а в случае (б) σ , σ_v и σ_k зависели от координат следующим образом []:

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) = & C_0 + C_{11}x + C_{12}\sqrt{3}y \\ & + (4C_{21} + C_{22} + C_{23})\frac{1}{4}x^2 \\ & + (C_{22} - C_{23})\frac{\sqrt{3}}{2}xy \\ & + (C_{22} + C_{23})\frac{3}{4}y^2 + C_3\frac{3}{4}(-x^3 + 3xy^2), \end{aligned} \quad (17)$$

где σ обозначает любое из сечений σ , σ_v или σ_k ,

$$C_0 = 2\bar{\sigma} - \frac{1}{6}(\sigma_E + \sigma_W + \sigma_{NE} + \sigma_{SW} + \sigma_{NW} + \sigma_{SE});$$

$$C_{11} = \frac{1}{3a} [2(\sigma_E - \sigma_W) + \sigma_{NE} - \sigma_{SW} - \sigma_{NW} + \sigma_{SE}];$$

$$C_{12} = \frac{1}{3a} (\sigma_{NE} - \sigma_{SW} + \sigma_{NW} - \sigma_{SE});$$

$$C_{21} = \frac{3}{a^2} \left(\sigma_E + \sigma_W + \frac{2}{5}C_0 - \frac{12}{5}\bar{\sigma} \right);$$

$$C_{22} = \frac{3}{a^2} \left(\sigma_{NE} + \sigma_{SW} + \frac{2}{5}C_0 - \frac{12}{5}\bar{\sigma} \right);$$

$$C_{23} = \frac{3}{a^2} \left(\sigma_{NW} + \sigma_{SE} + \frac{2}{5}C_0 - \frac{12}{5}\bar{\sigma} \right);$$

$$C_3 = \frac{8}{3a^3} [-(\sigma_E - \sigma_W) + \sigma_{NE} - \sigma_{SW} - \sigma_{NW} + \sigma_{SE}],$$

$\sigma_W, \sigma_E, \sigma_{NW}, \sigma_{SE}, \sigma_{SW}, \sigma_{NE}$ – средние по границам значения; $\sigma, \bar{\sigma}$ – среднее по объёму (площади) ТВС; a – шаг расстановки ТВС.

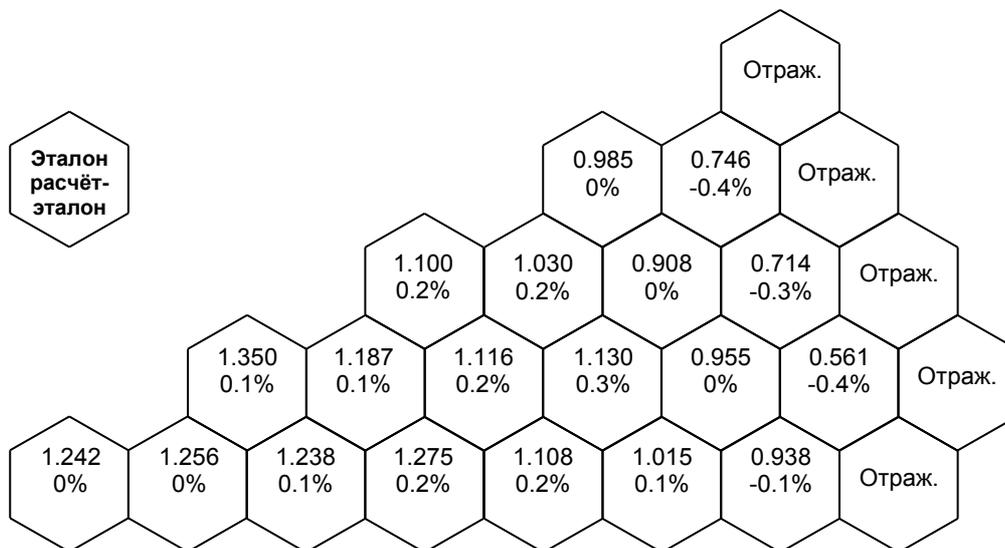


Рис. 3. Начало кампании: максимальная ошибка $Err_{max} = 0.4\%$; среднеквадратичная ошибка $Err_{rms} = 0.2\%$

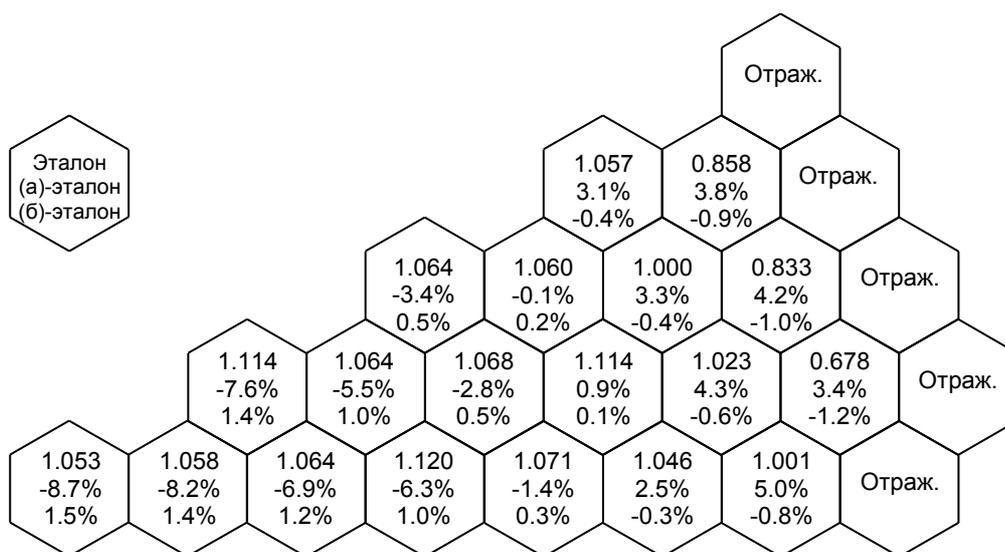


Рис. 4. Конец кампании (а) $Err_{max} = 8.7\%$, $Err_{rms} = 4.3\%$, (б) $Err_{max} = 1.5\%$, $Err_{rms} = 0.8\%$

Расчёты, выполненные традиционным МКЭ с тем же набором базисных функций, дали в точности те же результаты, что и приведенные выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные примеры расчётов показывают, что предложенный метод обеспечивает достаточную для нейтронно-физических расчётов точность. По сравнению со стандартным конечно-элементным подхо-

дом данный метод не имеет дела с огромными матрицами коэффициентов и не использует технику разреженных матриц. Вместе с тем он сохраняет традиционные преимущества МКЭ – возможность описывать сложные границы, использовать гибкую (неоднородную) сетку и т.п.

Тестовые расчёты подтверждают необходимость учёта неоднородности сечений внутри ТВС – так называемый градиент выгорания.

Автор благодарен доктору Ю.А. Чао за плодотворные обсуждения и ценные советы, а также А.М. Абдуллаеву за полезные замечания и дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. R.J.J. Stemm'ler and M.J. Abbate. *Methods of Steady-State Reactors Physics in Nuclear Design*. London: «Academic Press», 1983, 506 p.
2. H. Finneemann, F. Bennewitz, and M.R. Wagner. Interface current techniques for Multidimensional Reactor Calculations // *Atomkernenergie*. 1977, v. 30, p. 23.
3. R.D. Lawrence. Progress in nodal methods for the solution of the neutron diffusion and transport equations // *Prog. Nucl. Energy*. 1986, v. 17, p. 271.
4. K.S. Smith. Assembly homogenization techniques of light water reactor analysis // *Prog. Nucl. Energy*. 1986, v. 17, p. 303.
5. H. Zhang, Rizwan-Uddin and J.J. Dorning. Systematic homogenization and self-consistent flux and pin power reconstruction for nodal diffusion methods – I: Diffusion Equation-based theory // *Nuclear Science and Engineering*. 1995, v. 121, p. 226–244.
6. Y.A. Chao and N. Tsoufanidis. Conformal Mapping and Hexagonal Nodal Methods – I: Mathematical Foundation // *Nuclear Science and Engineering*. 1995, v. 121, p. 202–209.
7. Y.A. Chao and Y.A. Shatilla. Conformal Mapping and Hexagonal Nodal Methods – II: Implementation in the ANC-H Code // *Nuclear Science and Engineering*. 1995, v. 121, p. 210–225.
8. M. Knight, P. Hutt and I. Lewis. Comparison of PANTHER Nodal Solutions in Hexagonal-z Geometry // *Nuclear Science and Engineering*. 1995, v. 121, p. 254–263.
9. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite Element Method*. New York: “McGraw-Hill”, 1989, Forth Edition, v. 1
10. C.A.J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. London: “Springer-Verlag”. Two volumes, 1991.
11. Y.A. Chao and C.A. Suo. A Two-Dimensional Two-Group Albedo Model for Pressurized Water Reactor Reflector // *Nuclear Science and Engineering*. 1984, v. 88, p. 103–109.
12. E.E. Lewis. *Primal, Mixed and Hybrid Elements for Neutronics Computations*. Madrid, September 27-30, 1999. M&C'99, p. 805–813.

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДА ЛОКАЛЬНИХ ВАРІАЦІЙ ДЛЯ НЕЙТРОННО-ФІЗИЧНИХ РОЗРАХУНКІВ

О.І. Жуков

Запропонований новий метод рішення стаціонарних рівнянь, що описують дифузію нейтронів. Метод ґрунтується на варіаційному формулюванні рівнянь стаціонарної дифузії та прямому пошуку мінімуму функціонала. Результати тестових розрахунків тепловиділяючих збірок показують точність ~ 2%.

USE OF LOCAL VARIATION METHOD FOR NUCLEAR DESIGN CALCULATIONS

A.I. Zhukov

A new problem-solving method for steady-state equations, which describe neutron diffusion, is presented. The method bases on a variation principal for steady-state diffusion equations and direct search the minimum of a corresponding functional. Benchmark problem calculations for power of fuel assemblies show ~ 2% relative accuracy.