УДК 517.972/974

В.С. САЖЕНЮК

АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ВАРІАЦІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Abstract: *Examined is the class of variational parabolic inequalities with restriction inside the domain. The method of the numeral solution, which is based on application of methods of penalty, fictitious region and grids, is offered. The ground of method is given as theorems about convergence. The estimations of velocity of convergence are got.*
Key words: *variational inequality, method of penalty, difference scheme.*

Анотація: *Розглядається клас параболічних варіаційних нерівностей з обмеженням у середині області. Пропонується метод чисельного розв'язування, який базується на застосуванні методів штрафу, фіктивних областей та сіток. Подається обґрунтування методу у вигляді теорем про збіжність. Отримані оцінки швидкості збіжності.*
Ключові слова: *варіаційна нерівність, метод штрафу, різницева схема.*

Аннотация: *Рассматривается класс параболических вариационных неравенств с ограничением внутри области. Предлагается метод численного решения, который основан на применении методов штрафа, фиктивных областей и сеток. Дается обоснование метода в виде теорем о сходимости. Получены оценки скорости сходимости.*
Ключевые слова: *вариационное неравенство, метод штрафа, разностная схема.*

1. Вступ

Математичними моделями багатьох важливих практичних задач механіки, гідродинаміки, керування, тощо є параболічні варіаційні нерівності з обмеженнями у середині області [1]. При побудові чисельних алгоритмів розв'язування параболічних варіаційних нерівностей одночасно з методами скінченних елементів або сіток застосовується метод штрафу [1]. Метод сіток є універсальним та високоефективним методом з точки зору машинної реалізації. У той же час його машинна реалізація суттєво залежить від геометрії області, в якій шукаємо розв'язок. У випадках неканонічних областей при знаходженні розв'язків крайових задач використовується метод фіктивних областей [2].

У даній статті досліджується клас параболічних варіаційних нерівностей з обмеженням у середині області з границею класу C^2. Для побудови чисельного алгоритму розв'язування параболічної варіаційної нерівності з обмеженням у середині області застосовуються методи штрафу, фіктивних областей та сіток. Наводяться оцінки швидкості збіжності розв'язку нелінійних крайових задач, побудованих за допомогою комбінації методів штрафу та двох варіантів методу фіктивних областей, до розв'язку варіаційної нерівності в нормі простору $W_2^{1,0}(Q_T)$. Для одного варіанта методу фіктивних областей будується різницева схема. Отримано оцінку швидкості збіжності розв'язку різницевої схеми до розв'язку задачі, побудованої за допомогою методів штрафу і фіктивних областей, та розв'язку варіаційної нерівності в області довільної форми порядку $\sqrt[3]{h}$ у сітковій нормі $W_2^{1,0}(\omega_T)$. Встановлено залежність та співвідношення між відповідними параметрами ε, δ, τ, h методів штрафу, фіктивних областей та сіток.

2. Постановка задачі

Нехай $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, \quad t \in (0,T)\}$ – циліндр, Ω – область з границею Γ класу C^2, $S_T = \{(x,t) : x \in \Gamma, \quad t \in (0,T)\}$ – бокова поверхня Q_T,

$$a(v_1, v_2) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} a_{ij}(x,t) \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_j} dx_1 dx_2 + \int_{\Omega} q(x\ ,t) v_1 v_2 dx_1 dx_2,$$

$$(v_1, v_2) = \int_{\Omega} v_1 v_2 dx_1 dx_2\ , \forall v_1, v_2 \in W_2^{1,0}(Q_T),$$

$$q(x\ ,t) \geq q_0 > 0, \quad q(x\ ,t) \in L_\infty(Q_T), \quad a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t), \quad a_{ij}(x,.t) \in W_\infty^1(Q_T),$$

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2\ , \forall \xi \in R^2.$$

Розглянемо узагальнену постановку наступної задачі розв'язування параболічної варіаційної нерівності з обмеженням у середині області:

знайти функцію $u \in \mathrm{K}$, $u\ (0,x) = u_0(x)$, $u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega$ таку, що

$$-\int_{Q_T} \frac{\partial v}{\partial t}(v-u) dx dt + \int_0^T \ a(u, v-u) dt \geq \int_0^T \ (f, v-u) dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathrm{v}(0,\mathrm{x}) - \mathrm{u}_0(\mathrm{x})|^2\ \mathrm{dx}, \quad \forall v \in \mathrm{K}, \tag{1}$$

де $f \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in W_2^2(\Omega)$, $\mathrm{K} = \{v \mid v \in W_2^{1,0}(Q_T), v \geq 0 \quad \text{майже всюди в } Q_T\}$.

3. Основні результати

Варіаційній нерівності (1) поставимо у відповідність задачу зі штрафом:

знайти функцію $u_\varepsilon \in \overset{o}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ таку, що $u_\varepsilon(0,x) = u_0(x)$,

$$-\int_{Q_T} \frac{\partial v}{\partial t} u_\varepsilon dx dt + \int_0^T \ a(u_\varepsilon, v) dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_o^T \ (u_\varepsilon^-, v) dt = \int_0^T \ (f, v) dt + \int_{\Omega} u_0 . v(x,0) dx, \tag{2}$$

$$\forall v \ \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T),\ v(x,T) = 0\ ,$$

де $u_\varepsilon^- = 0{,}5 u_\varepsilon (signu_\varepsilon - 1)$, $\varepsilon > 0$.

Регулярність розв'язків варіаційної нерівності (1) та відповідної задачі зі штрафом (2) досліджувалась у роботі [1], у якій встановлено, що задачі (1) і (2) мають єдині розв'язки у класі функцій $W_2^{2,1}(Q_T)$. Має місце [1, 3] наступна теорема.

Теорема 1. Розв'язок задачі (2) збігається при $\varepsilon \to 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (1), причому має місце оцінка

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_1 \sqrt{\varepsilon} \cdot (\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}). \tag{3}$$

(тут і надалі через M_i позначені додатні сталі, які не залежать від ε, δ, τ, h).

Нехай $Q^0{}_T = \{(x,t): x \in \Omega^0, \quad t \in (0,T)\}$ – паралелепіпед , Ω^0 – прямокутник з границею Γ^0, $S^0{}_T = \{(x,t): x \in \Gamma^0, \quad t \in (0,T)\}$ – бокова поверхня $Q^0{}_T$, $\Omega^1 = \Omega^0 - \Omega$; $Q_T^1 = \{(t,x), x \in \Omega^1, t \in (0,T)\}$; $Q_T^0 = Q_T^1 + Q_T$.

Для задачі (2) розглянемо два варіанти методу фіктивних областей [3] .

Варіант I

Знайти $u_\delta \in W_2^{1,0}(Q_T^0)$ таке, що

$$-\int_{Q_T} \frac{\partial v}{\partial t} u_\delta dxdt + \int_{Q_T^0} (\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u_\delta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}) dxdt + \int_{Q_T} q(x,t) u_\delta v dxdt + \frac{1}{\delta} \int_{Q_T^1} u_\delta v dxdt -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} u_\delta^- v dxdt = \int_{Q_T} f(x,t) v dxdt + \int_\Omega u_0 . v(x,0) dx, \quad (4)$$

$$\forall v \in W_2^{1,0}(Q^0{}_T),\ v(x,T) = 0 ,\ \delta > 0.$$

Варіант II

Знайти $u_\delta \in W_2^{1,0}(Q_T^0)$ таке, що

$$-\int_{Q_T{}^0} \frac{\partial v}{\partial t} u_\delta dxdt + \int_{Q_T} (\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u_\delta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}) dxdt + \int_{Q_T} q(x,t) u_\delta v dxdt + \frac{1}{\delta} \int_{Q_T^1} (\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}) dxdt -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} u_\delta^- v dxdt = \int_{Q_T} f(x,t) v dxdt + \int_\Omega u_0 . v(x,0) dx, \quad (5)$$

$$\forall v \in W_2^{1,0}(Q^0{}_T),\ v(x,T) = 0,\ \delta > 0.$$

Задачі (4) та (5) мають єдині розв'язки, що належать простору $W_2^{2,1}(Q_T)$ [4]. Справедливі наступні теореми [3].

Теорема 2. Розв'язок задачі (4) $(\varepsilon = \sqrt{\delta})$ збігається при $\delta \to 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (1), причому має місце оцінка

$$\|u - u_\delta\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \le M_2 \sqrt[4]{\delta} \cdot (\|f\|_{L_2(Q_T)} + \| u_0 \|_{W_2^1(\Omega)}) . \quad (6)$$

Теорема 3. Розв'язок задачі (5) $(\varepsilon = \delta)$ збігається при $\delta \to 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (1), причому має місце оцінка

$$\|u - u_\delta\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \le M_3 \sqrt{\delta} \cdot (\|f\|_{L_2(Q_T)} + \| u_0 \|_{W_2^1(\Omega)}) .$$

Різницеву схему будемо будувати та досліджувати для випадку, коли $a_{ij} = 1$, $i = j$, $a_{ij} = 0$, $i \ne j$, $i, j = 1,2$. Розглянемо задачу (4), отриману за допомогою комбінації методів штрафу та фіктивних областей (варіант I). Задачу (4) перепишемо у такому еквівалентному вигляді:

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t}-\Delta u_\delta+q_\delta(x,t)u_\delta+g_\delta(x,t,u_\delta)=\bar f(x,t),\qquad (x,t)\in Q_T^0, \tag{7}$$

$$u_\delta(x,t)=0,\quad x\in S_T^0,\ u_\delta(x,0)=u_0,\ x\in\Omega^0,$$

де позначено

$$g_\delta(x,t,u_\delta)=\begin{cases}-\delta^{-\frac{1}{2}}u_\delta^-,(x,t)\in Q_T\\ 0,\quad (x,t)\in Q_T^1\end{cases};\quad q_\delta(x,t)=\begin{cases}q(x,t),\ (x,t)\in Q_T\\ \delta^{-1},\quad (x,t)\in Q_T^1\end{cases};$$

$$\bar f(x,t)=\begin{cases}f(x,t),(x,t)\in Q_T\\ 0,\qquad (x,t)\in Q_T^1\end{cases}.$$

Функція $g_\delta(x,t,v)$ задовольняє співвідношенням

$$\begin{aligned}&(g_\delta(x,t,v_1)-g_\delta(x,t,v_2))(v_1-v_2)\le\frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}}}(v_1-v_2)^2,\\ &(g_\delta(x,t,v_1)-g_\delta(x,t,v_2))(v_1-v_2)\ge 0,\quad \forall v_1,v_2\in W_2^{1,0}(Q_T^0).\end{aligned} \tag{8}$$

Розв'язок задач (7) належить класу функцій $W_2^{2,1}(Q_T^0)$ [4], причому справедлива оцінка [5]

$$\|u_\delta\|_{W_2^{2,1}(Q_T^0)}\le M_4\delta^{-\frac{1}{4}}\cdot(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}). \tag{9}$$

У прямокутнику $\overline{\Omega}^0$ введемо рівномірну сітку $\overline{\omega}^0=\omega^0\cup\gamma^0$, де ω^0 – множина внутрішніх, а γ^0 – множина граничних вузлів відповідно. Позначимо:

$$\omega^0{}_\tau=\{t=t_j=j\tau,\ j=\overline{1,N};\tau=\tfrac{T}{N}\},\quad \omega^0{}_T=\omega^0\times\omega^0{}_\tau,\quad \gamma^0{}_T=\gamma^0\times\omega^0{}_\tau,$$

$$(y_1,y_2)=\sum_{\omega\ \tau}\tau(y_1,y_2),\quad \|y\|_{L_2(\omega\ T)}=\left(\sum_{\omega_\tau}\tau\|y\|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \|y|]_{L_2(\omega_T)}=\left(\sum_{\omega_\tau}\tau\|y|]^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|y]|_{L_2(\omega_\tau)}=\left(\sum_{\omega_\tau}\tau\|y]|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ |y|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}=\left\{\max_{t\in\omega_\tau}\|y(x,t)\|^2+|y|^2_{W_2^{1,0}(\omega_T)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$|y|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}=\left\{\max_{t\in\omega_\tau}\|y(x,t)\|^2+|y|^2_{W_2^{1,0}(\omega_T)}\right\}^{\frac{1}{2}},\quad \|y\|_*=\left\{|y|^2_{V_2^{1,0}(\omega_T)}+\tau\|y_{\bar t}\|^2_{L_2(\omega_T)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|y\|^2_{W_2^{1,0}(\omega_T)}=\|y\|_{L_2(\omega_T)}+|y|^2_{W_2^{1,0}(\omega_T)}.$$

Апроксимуємо задачу (7) такою неявною різницевою схемою:

$$
\begin{gathered}
y_{\bar t}-\sum_{i=1}^{2} y_{\bar x_i x_i}+\bar q_\delta \tilde y+P_0T_1T_2 g_\delta(\cdot,\tilde y)=P_0T_1T_2(\bar f),\quad (x,t)\in\omega_T^0,\\
\mathrm{y}(\mathrm{x},\mathrm{t})=0,\quad (\mathrm{x},\mathrm{t})\in\gamma_T^0,\quad y(x,0)=T_1T_2u_0,\quad x\in\omega^0,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

де
$$T_\alpha v(\cdot)=\int_{-1}^{1}(1-|t|)v(x_1+(2-\alpha)th_1,x_2+(\alpha-1)th_2)dt,\quad \alpha=1,2;$$

$$P_0u(x,t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}u(x,\xi)d\xi,\quad t=\tau,...,N\tau;\quad \bar q_\delta\tilde y=P_0T_1T_2(q_\delta(\cdot)\tilde y),$$

$\tilde y(x,t)$ – полілінійне по x та кусково-стале по t поповнення сіткової функції $y(x,t)$.

Використовуючи умови (8) та співвідношення

$$y_{\bar t}y=\frac{1}{2}(y^2)_{\bar t}+\frac{\tau}{2}y_{\bar t}^2,$$

можна отримати апріорну оцінку

$$|\,y\,|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}\le M_5(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}).\tag{11}$$

Встановимо оцінку швидкості збіжності розв'язку задачі (10) до розв'язку варіаційної нерівності (1). Для цього спочатку знайдемо оцінку швидкості збіжності розв'язку різницевої схеми (10) до розв'язку задачі (7).

Лема 1. Розв'язок різницевої задачі (10) $(\tau=h^2)$ збігається при $h\to 0$ до розв'язку задачі комбінації методів штрафу та фіктивних областей (7), причому має місце оцінка:

$$|\,y-\bar u_\delta\,|_{V_2^{1,0}(\omega_T^0)}\le M_6(h\delta^{-\frac{1}{4}}+h^2\delta^{-\frac{5}{4}})(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}),\tag{12}$$

де
$$\bar u_\delta(x,t)=\begin{cases}P_0u_\delta,(x,t)\in\omega_T^0,\\ 0,(x,t)\in\gamma^0{}_T,\\ T_1T_2u_0,\,x\in\omega^0,t=0.\end{cases}$$

Доведення. Похибка

$$z=y-\bar u_\delta$$

є розв'язком наступної задачі:

$$
\begin{gathered}
z_{\bar t}-\sum_{i=1}^{2} z_{\bar x_i x_i}+\bar q_\delta\tilde z+P_0T_1Tg_\delta(\tilde y)-P_0T_1T_2g_\delta(\tilde{\tilde u}_\delta)=\\
=-\sum_{i=1}^{2}\eta^{(i)}_{\bar x_i}+\psi_0-\eta_0-\mu_{\bar t},\quad (x,t)\in\omega^0{}_T,\\
z(x,0)=0,\ z(x,t)=0,\quad (x,t)\in\gamma^0{}_T,
\end{gathered}
\tag{13}
$$

де
$$\mu=u_\delta-T_1T_2\bar u_\delta,\ \eta_0=P_0T_1T_2(g_\delta(u_\delta)-g_\delta(\tilde{\tilde u}_\delta)),$$

$$\eta^{(i)}=P_0P_iT_{3-i}(\frac{\partial u_\delta(\cdot)}{\partial x_i}-\bar u_{\delta\bar x_i}),\quad i=1,2,\qquad \psi_0=P_0T_1T_2(q_\delta)(u_\delta-\tilde{\tilde u}_\delta),$$

$$P_\alpha u_\varepsilon(\cdot) = \int_{-1}^{0} u_\varepsilon(x_1 + (2-\alpha)th_1, x_2 + (\alpha-1)th_2)dt, \quad \alpha = 1,2 \cdot$$

Помножимо (13) скалярно на z, скористаємось умовами (8) та формулами сумування за частинами. Після нескладних перетворень отримаємо

$$\|z\|_*^2 \le M_7(\sum_{i=1}^{2}\left\|\eta^{(i)}\right\|_{L_2(\omega^0{}_T)}^2 + \left\|\eta^{(0)}\right\|_{L_2(\omega^0{}_T)}^2 + \|\psi_0\|_{L_2(\omega^0{}_T)}^2 + \frac{1}{\tau}\|\mu\|_{L_2(\omega^0{}_T)}^2) \,. \tag{14}$$

Функціонали у правій частині останньої нерівності оцінимо за допомогою леми Брембла – Гілберта:

$$\left\|\eta^{(i)}\right\|_{L_2(\omega^0{}_T)} \le M_8 h\|u_\delta\|_{W_2^{2,1}(Q^0{}_T)}, i = 1,2 \,, \quad \left\|\eta^{(0)}\right\|_{L_2(\omega_T^0)} \le M_9 \delta^{-\frac{1}{2}} \cdot (\tau + h^2)\|u_\delta\|_{W_2^{2,1}(Q^0{}_T)},$$

$$\|\psi_0\|_{L_2(\omega_T^0)} \le M_{10}\delta^{-1}(\tau + h^2)\,\|u_\delta\|_{W_2^{2,1}(Q_T^0)}, \quad \|\mu\|_{L_2(\omega^0{}_T)} \le M_{11}(\tau + h^2)\,\|u_\delta\|_{W_2^{2,1}(Q^0{}_T)} \,,$$

$$h = \max(h_1, h_2)\,.$$

Підставляючи ці оцінки в (14) та поклавши $(\tau = h^2)$, отримаємо

$$\|z\|_* \le M_{12}(h + \frac{h^2}{\delta})\,\|u_\delta\|_{W_2^{2,1}(Q_T^0)}\,.$$

Звідси, з урахуванням оцінки (9), випливає (12). *Лему 1 доведено*.

Лема 2. $\forall v \in W_2^2(\Omega)$ мають місце нерівності

$$|v|_{1,\omega} \le M_{13}(|v|_{W_2^1(\Omega)} + h|v|_{W_2^2(\Omega)})\,, \tag{15}$$

$$\|v\|_{0,\omega} \le M_{14}(h^2|v|_{W_2^2(\Omega)} + h|v|_{W_2^1(\Omega)} + \|v\|_{L_2(\Omega)})\,. \tag{16}$$

Доведення леми 2 базується на застосуванні леми Брембла – Гілберта і міститься в роботі [6] .

Теорема 4. Розв'язок різницевої схеми (10) ($\tau = h^2$, $\delta = h^{\frac{4}{3}}$) збігається при $h \to 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (1) ($a_{ij} = 1$, $i = j$, $a_{ij} = 0$, $i \ne j$, $b_i = 0$, $i, j = 1,2$;), при цьому має місце оцінка

$$\|y - \overline{u}\|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le M_{15} h^{\frac{1}{3}}(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)})\,. \tag{17}$$

Доведення.

Очевидна нерівність

$$\|y - \overline{u}\|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le \|\overline{u} - \overline{u}_\delta\|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} + \|\overline{u}_\delta - y\|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le \|\overline{u} - \overline{u}_\delta\|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} + |y - \overline{u}_\delta|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}\,. \tag{18}$$

Позначимо $\overline{w} = \overline{u} - \overline{u}_\delta$. Очевидно, що $\overline{w} \in W_2^{2,1}(Q_T)$.

Для функції $v = \overline{w}$, використовуючи лему 2 (оцінки (15), (16)), отримаємо

$$\|v\|_\omega \le M_{16}(h^2|v|_{W_2^2(\Omega_t)} + h|v|_{W_2^1(\Omega_t)} + \|v\|_{L_2(\Omega_t)}),$$

$$|v|_{1,w} \le M_{17}(|v|_{w_2^1(\Omega_t)} + h|v|_{W_2^2(\Omega_t)}) \quad ,$$

де Ω_t – верхня основа циліндра Q_t, $\forall t \in (0,T)$.

З останніх двох співвідношень виводимо

$$\| v \|_{\omega} \le M_{18} (h^2 \tau^{-\frac{1}{2}} \mid v \mid_{W_2^{1,0}(Q_t)} + h\tau^{-\frac{1}{2}} \mid v \mid_{W_2^{1,0}(Q_t)} + \tau^{-\frac{1}{2}} \| v \|_{L_2(Q_t)}) , \tag{19}$$

$$\mid v \mid_{1,\omega} \le M_{19} (\tau^{-\frac{1}{2}} \mid v \mid_{W_2^{1,0}(Q_t)} + h\tau^{-\frac{1}{2}} \mid v \mid_{W_2^{2,0}(Q_t)}) . \tag{20}$$

Помножимо почергово (19) та (20) на τ і просумуємо по вузлах сітки ω_τ. Отримаємо

$$\| v \|_{L_2(\omega_T)} \le M_{20} (h^2 \mid v \mid_{W_2^{2,0}(Q_T)} + h \mid v \mid_{W_2^{1,0}(Q_T)} + \| v \|_{L_2(Q_T)}) ,$$

$$\mid v \mid_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le M_{21} (\mid v \mid_{W_2^{1,0}(Q_T)} + h \mid v \mid_{L_2(Q_T)}) .$$

Отже, справедлива оцінка

$$\| \bar{u} - \bar{u}_\delta \|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le M_{22} \| u - u_\delta \|_{W_2^{1,0}(Q_T)} + o(h) .$$

Звідси, (19) та (20) випливає

$$\| y - \bar{u} \|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le M_{23} (\| u - u_\delta \|_{W_2^{1,0}(Q_T)} + \mid y - \bar{u}_\delta \mid_{V_2^{1,0}(\omega_T)} + o(h)) .$$

З останньої оцінки, (18), (12) та оцінки (6), можна отримати оцінку

$$\| y - \bar{u} \|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le M_{24} (h\delta^{-\frac{1}{4}} + h^2 \delta^{-\frac{5}{4}} + \sqrt[4]{\delta}) \cdot (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| u_0 \|_{W_2^1(\Omega)}) .$$

Поклавши $\delta = h^{\frac{4}{3}}$, отримаємо (17). *Теорему доведено.*

4. Висновки

Різницева схема (9) являє собою високоефективний алгоритм чисельного розв'язування широкого кола прикладних задач, математичні моделі яких можуть бути записані у вигляді варіаційних нерівностей, коли область визначення має складну геометрію. До таких моделей зводяться, зокрема, задачі керування з оптимальним часом зупинки для дифузійних процесів, задачі нестаціонарної фільтрації, задачі з вільною границею та задачі з перешкодами.

Стаціонарний випадок розглядався, зокрема, авторам роботи [7], де для еліптичної варіаційної нерівності в області довільної форми з границею класу C^2 побудовано різницеву схему, яка апроксимує нерівність і має порядок точності $\sqrt{h}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства: Пер. с франц. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
3. Саженюк В.С., Гаркуша В.І., Риженко А.І. Застосування методу штрафу та фіктивних областей для параболічних варіаційних нерівностей другого порядку // Вісник Київського університету. – 2006. – № 4. – С. 211–216.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
5. Войцеховский С.А., Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. О сходимости метода прямых для обобщения решений параболических уравнений в произвольной области // Вычислительная и прикладная математика. – Киев: 1983. – Вып. 50. – С. 3–10.

6. Войцеховский С.А., Гаврилюк И.П. О сходимости разностных решений к обобщенным решениям первой краевой задачи для квазилинейного уравнения четвертого порядка в областях произвольной формы // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 9. – С. 1582–1590.
7. Войцеховский С.А., Сергиенко И.В., Ляшко С.И. Приближенное решение одного класса вариационных эллиптических неравенств второго порядка в областях произвольной формы // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – Т. 40, № 4. – С. 157–161.