ISSN 1028-7507 Акустичний вiсник. 2011. Том 14, N 3. С. 23 – 45

УДК 532.595

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ КАПЛИ

И. А. ЛУКОВСКИЙ, М. А. ЧЕРНОВА

Институт математики НАН Украины, Киев

Получено 22.07.2011

На основе вариационного метода Луковского – Майлса выведены общие нелинейные модальные уравнения движения капли в невесомости. С использованием этих уравнений и нелинейной алгебры преобразований полиномов Лежандра построена асимптотическая нелинейная модальная теория третьего порядка для осесимметричных колебаний капли, в которой величины гидродинамических коэффициентов вычисляются аналитически через так называемые коэффициенты Клебша – Гордана, возникающие в квантовой механике. Рассмотрены нелинейные свободные колебания капли с частотой, близкой к основной собственной частоте. Проведено сравнение результатов с экспериментальными и численными данными других авторов.

На базi варiацiйного методу Луковського – Майлса виведено загальнi нелiнiйнi модальнi рiвняння руху краплi у невагомостi. З використанням цих рiвнянь та нелiнiйної алгебри перетворень полiномiв Лежандра побудовано асимптотичну нелiнiйну модальну теорiю третього порядку для осесиметричних коливань краплi, в якiй значення гiдродинамiчних коефiцiєнтiв обчислюються аналiтично через так званi коефiцiєнти Клебша – Гордана, що виникають в квантовiй механiцi. Розглянуто нелiнiйнi вiльнi коливання краплi з частотою, близькою до основної власної частоти. Проведено порiвняння результатiв з експериментальними й чисельними даними iнших авторiв.

The general nonlinear modal equations describing the motions of a liquid drop at zero-gravity condition are derived on the base of the Lukovsky – Miles variational method. Using these equations and the nonlinear algebra for the Legendre polynomials transformations, the third-order asymptotic nonlinear modal theory for axisymmetric oscillations of the drop is developed. In the above theory, the hydrodynamic coefficients are found analytically via the so-called Clebsch -– Gordan coefficients emerging in quantum mechanics. The nonlinear free oscillations of the drop at frequency close to the primary natural one are considered. The results are compared with the experimental and numerical data obtained by other authors.

ВВЕДЕНИЕ

Современные бесконтактные технологии химической и фармацевтической индустрии, нацеленные на производство, анализ и использование сверхчистых материалов, активно эксплуатируют "капельные" методы [1 – 3], когда левитирующие капли жидких реагентов и катализаторов помещаются в газообразных средах с целью увеличения площади их соприкосновения с внешней средой. Это приводит к существенному ускорению скорости химических реакций, а следовательно, к повышению эффективности производственных процессов. Кроме того, поскольку левитирующие капли не контактируют со стенками частей установок и устройств, то жидкие реагенты (катализаторы) сохраняют свой химический состав, что способствует улучшению качества и чистоты полученных продуктов. Левитирующие капли используются также в высокоточных методах спектрометрии.

Начиная с 70-ых гг. XX ст., развитие капельных технологий сделало актуальной задачу исследования колебаний и устойчивости левитирующей капли, находящейся в условиях невесомости и совершающей немалые (нелинейные) свободные колебания относительно сферического положения равновесия под действием поверхностного натяжения. В 80–90-ых гг. XX ст. возник также интерес к задаче о формах равновесия и динамическом поведении капли под действием внешних акустических или электромагнитных полей, которые используются в качестве вспомогательного средства для ее позиционирования (локализации и удержания в заданной точке пространства). Ряд теоретических и экспериментальных исследований в этих направлениях представлен в [4 – 12]. В теоретических разделах этих работ, как правило, строятся асимптотические периодические решения задачи о свободных колебаниях капли. Используются как дифференциальная, так и вариационная постановки задачи. В большинстве публикаций анализ проводился в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости, однако имеются работы, в которых делались попытки учесть ее вязкость.

В случае невязких колебаний капли построенные асимптотические решения задачи в свободных колебаниях могут быть интерпретированы как усеченные ряды Фурье в терминах объемных сферических функций. Следует отметить, что, как показано в 1879 году Лордом Рэлеем [13,14], именно объемные сферические функции являются решениями (собственными формами) задачи о собственных (линейных) колебаниях идеальной несжимаемой капиллярной жидкости в неактивной среде под действием поверхностного натяжения относительно сферического статического положения равновесия. Таким образом, полученные асимптотические решения задачи о свободных периодических колебаниях капли, по-сути, описывают слабо нелинейные установившиеся свободные колебания в виде рядов по собственным формам.

Резюмируя сказанное, состояние проблемы теоретического описания колебания левитирующей капли можно уподобить тому, которое имело место в 50–60-ых гг. XX ст. для задачи о немалых колебаниях жидкости в подвижных баках [15, 16]. Действительно, на то время была построена теория линейных собственных колебаний и получены некоторые численные и асимптотические результаты об установившихся решениях нелинейной задачи. Общей же конструктивной теории нелинейных колебаний для этого физического объекта на то время не существовало. Лишь позднее, в 70–80-ых гг., были предложены нелинейные модальные методы, позволившие свести исследование задачи со свободной границей, описывающей колебания жидкости в баке, к достаточно простым системам обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат, отвечающих за возмущения собственных форм. В силу этого стал возможен аналитический (теоретический) анализ не только установившихся (периодических) свободных и вынужденных, но и различного типа переходных волновых процессов, в том числе и для баков сложной геометрической формы. Настоящим прорывом для нелинейных модальных методов стали работы И. А. Луковского и Дж. Майлса, построивших с использованием вариационного принципа в форме Бейтмена – Люка наиболее общие нелинейные модальные уравнения движения жидкости в баке в аналитическом виде [15, 16]. При дополнительных соотношениях между обобщенными координатами такие бесконечномерные модальные уравнения допускают редукцию к более простой, конечномерной и компактной, форме. Поскольку для конечномерных уравнений удается получить аналитически и затабулировать все необходимые гидродинамические коэффициенты, именно они получили наибольшее развитие в научной литературе и нашли применение при решении конкретных прикладных задач, связанных с исследованием установившихся режимов движения и расчетом переходных процессов.

В данной статье мы следуем идеям работ Луковского и Майлса с целью построения наиболее общей нелинейной модальной теории колебаний капли в неактивной среде в условиях малой гравитации. Фактическая основная цель нашей работы – обобщение результатов нелинейного модального подхода Луковского и Майлса на случай капиллярной капли. При этом используется вариационный принцип Бейтмена – Люка и известные из работ лорда Рэлея собственные формы колебания капли. Особенность задачи состоит в наличии нелинейного условия сохранения объема, имеющего вид геометрической связи для допустимых пространственных конфигураций капли. Поэтому при формулировке вариационного принципа приходится, вообще говоря, вводить дополнительный член с множителем Лагранжа, отражающий наличие этой геометрической связи. Специфика реализации нелинейного модального метода заключается также в том, что собственные формы колебаний жидкости Рэлея не формируют полного функционального базиса и должны быть пополнены четырьмя объемными сферическими функциями, которые с физической точки зрения не описывают собственных колебаний капли. Кроме того, упомянутое пополнение базиса математически необходимо для выполнения условия сохранения объема.

При реализации нелинейного модального метода вводятся обобщенные координаты, описывающие возмущения свободной поверхности, в том числе, за счет четырех дополнительных координатных функций. В процессе вывода нелинейных модальных уравнений, основываясь на особенностях базисного набора функций, из нелинейного условия сохранения объема удается выразить аналитически одну из обобщенных координат через другие и таким образом избавиться от геометрической связи. В математическом плане построенные нелинейные модальные уравнения колебания капли подобны общим модальным уравнениям Луковского [15, 16], которые известны для задачи о нелинейных плесканиях жидкости в сосуде.

Основываясь на выведенных из вариационного принципа общих нелинейных модальных уравнениях, мы также выводим аналитически асимптотическую нелинейную модальную теорию третьего порядка, описывающую осесимметричные нелинейные колебания капли. В ее модальных уравнениях удерживаются лишь полиномиальные нелинейные члены до третьей степени относительно обобщенных координат. Построенные уравнения могут быть применены для решения задачи описания нелинейных собственных (периодических) колебаний капли, которая уже исследовалась ранее рядом авторов как экспериментально, так и с помощью численных методов.

Наиболее интересен и важен случай собственных нелинейных колебаний с частотой, близкой к низшей собственной частоте капли σ_{20}. Для этих колебаний первая собственная (осесимметричная) форма дает доминантный вклад и бесконечномерную нелинейную асимптотическую модальную теорию можно свести к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых вклад собственных форм (обобщенных координат) связывается с асимптотикой третьего порядка типа Дюффинга. Ниже будет выведен явный вид соответствующей трехмодовой нелинейной модальной системы и приведены точные значения всех ее гидродинамических коэффициентов. С использованием редукции Ляпунова – Шмидта, строится периодическое решение этой трехмодовой системы, которое сравниваются с экспериментальными [8, 25] и численными [9, 17, 18] результатами. Полученные асимптотические значения хорошо согласуются с расчетами [9, 17, 18] и экспериментальными данными, полученными для капли большего радиуса.

Заметим, что в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости зависимость между безразмерными частотой и амплитудой не будет функцией реального размера капли. Следовательно, как это уже обсуждалось в работе [9], количественное расхождение между теоретическими и экспериментальными зависимостями необходимо связывать с физическими факторами, которые не учитываются исходной гидродинамической моделью. К таковым можно отнести вязкость (в том числе, поверхностную) и сжимаемость жидкости, которые, вероятно, начинают играть важную роль при уменьшении размеров капли.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим колебания каплеобразного объема $Q(t)$ идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в условиях отсутствия гравитационного поля в инертной среде. Колебания жидкости определяются начальными возмущениями свободной границы $\Sigma(t)$, движение которой задается в сферической системе координат:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

$$(r \geq 0, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

с помощью уравнения

$$r = \zeta(\theta, \varphi, t).$$

Геометрические обозначения показаны на рис. 1.

Наряду с неизвестной функцией $\zeta(\theta,\varphi,t)$, задающей мгновенное положение поверхности $\Sigma(t)$,

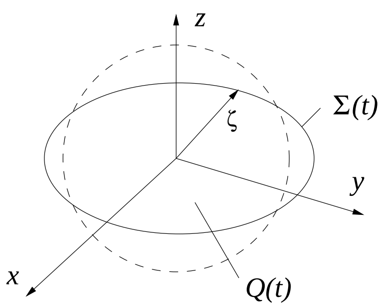

Рис. 1. Геометрические обозначения, введенные для описания колебания уединенной капли

введем потенциал скоростей Φ, который должен быть найден в процессе решения соответствующей краевой задачи со свободной границей.

1.1. Условие сохранения объема

При определении функции $\zeta(\theta,\varphi,t)$ необходимо учесть, что статическое положение жидкости под действием поверхностного натяжения совпадает со сферой радиуса R_0, так что объем несжимаемой жидкости неизменен – $V_l = 4\pi R_0^3/3$. Поэтому уравнение свободной границы в сферической системе координат можно представить в виде

$$\zeta(\theta,\varphi,t) = R_0 + \xi(\theta,\varphi,t),$$

где возмущения свободной границы относительно сферического положения равновесия подчинены нелинейному (относительно ξ) условию сохранения объема:

$$\int\limits_{Q(t)} dQ = V_l \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\xi^3}{3} + R_0\xi^2 + R_0^2\xi\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0. \qquad (1)$$

Нелинейное условие сохранение объема (1) выступает в качестве геометрического ограничения на допустимые положения свободной границы $\Sigma(t)$.

1.2. Вариационный принцип Бейтмена – Люка

Для вывода уравнений движения каплеобразного объема жидкости воспользуемся принципом Бейтмена – Люка, который использовался Луковским и Майлсом для решения задачи о нелинейных колебаниях жидкости в сосуде. История его возникновения и особенности его применения в различных проблемах гидродинамики детально описаны в работах [16, 19].

Наличие нелинейности в условии сохранения объема (1) вносит дополнительную сложность при применении этого принципа для задачи о колебаниях капли по сравнению с задачей о плескании жидкости в цилиндрическом сосуде. В последней использование собственных форм колебания жидкости в качестве функционального базиса (базиса Фурье) в представлении модального решения гарантировало автоматическое выполнение условия сохранения объема, которое в этом случае остается линейным, и ему удовлетворяет каждая собственная функция. Для нелинейных колебаний капли это не так, поэтому, исследуя самый общий случай, функционал (лагранжиан) должен, вообще говоря, содержать дополнительный сумманд вида

$$\bar{p}_0 \left(\int\limits_{Q(t)} dQ - V_l \right), \tag{2}$$

где $\bar{p}_0$ – множитель Лагранжа. Альтернатива указанному представлению может состоять в том, чтобы найти такую явную зависимость одной из обобщенных координат от других, чтобы условие сохранения объема удовлетворялось автоматически.

В данном разделе мы рассматриваем общий теоретический случай. В соответствии с принципом Бейтмена – Люка, действительное движение соответствует стационарным точкам функционала действия $A(\Phi,\zeta)$, в котором лагранжиан – интеграл давления по мгновенному объему жидкости $Q(t)$, и рассматриваются полностью независимые изохронные вариации относительно Φ и ζ. Как было замечено выше в контексте обсуждения нелинейного условия сохранения объема (1), являющегося ограничением для допустимых функций ζ, функция Лагранжа должна содержать сумманд (2) с множителем Лагранжа $\bar{p}_0$, чтобы вариации по ζ можно было рассматривать как полностью независимые без предварительного удовлетворения условия сохранения объема.

Применительно к нашей задаче, принцип Бейтмена – Люка сводит проблему к определению стационарных точек функционала действия

$$A(\Phi,\zeta) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{BL}(\Phi,\zeta)dt \tag{3}$$

для произвольных фиксированных времен t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$) и изохронных независимых вариаций

$$\delta\Phi|_{t_1,t_2} = 0, \qquad \delta\zeta|_{t_1,t_2} = 0. \tag{4}$$

Здесь лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathrm{BL}(\Phi,\zeta) = \int\limits_{Q(t)} (p-p_0)dQ - T_s|\Sigma(t)| - \\ -\bar{p}_0 \left(\int\limits_{Q(t)} dQ - V_l \right), \end{aligned} \tag{5}$$

p – поле давления в жидкости; p_0 – давление во внешней среде; T_s – коэффициент поверхностного натяжения; $|\cdot|$ – площадь поверхности; $\bar{p}_0$ – множитель Лагранжа (может быть функцией времени), который следует найти в процессе определения стационарных точек функционала с учетом того, что условие стационарности функционала действия $A(\Phi,\zeta)$ должно быть выполнено на многообразии допустимых возмущений ξ, подчиненных условию (1).

Давление внутри идеальной несжимаемой жидкости можно определить из уравнения Бернулли (интеграла Лагранжа – Коши)

$$p - p_0 = -\rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 \right), \tag{6}$$

где ρ – плотность жидкости. Подстановка уравнения (6) в функционал (5) показывает, что множитель Лагранжа $\bar{p}_0$ имеет физический смысл скачка давления между жидкостью и внешней средой, наличие которого связывается с поверхностным натяжением, а также нелинейностью задачи и наличием свободной поверхности. Аналогичная трактовка множителей Лагранжа имеет место для вариационных постановок задачи о статических капиллярных формах равновесия [20] жидкости в баках в условиях, близких к невесомости.

1.3. Вывод основных уравнений и краевых условий

Воспользуемся принципом Бейтмена – Люка для вывода уравнений колебания капли. Для этого подставим соотношение (6) в выражение (5) и осуществим независимые малые вариации функционала действия относительно функций Φ и ζ. При этом будем использовать формулу Грина

$$\int\limits_{Q(t)} \left(\psi_1\nabla^2\psi_2 + \nabla\psi_1\cdot\nabla\psi_2\right) dQ = \int\limits_{\Sigma(t)} \psi_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial n} dS \tag{7}$$

и транспортную теорему Рейнольдса

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q(t)} X dQ = \int\limits_{Q(t)} \frac{\partial X}{\partial t} dQ + \int\limits_{\Sigma(t)} X U_{nt} dS, \tag{8}$$

где U_{nt} – нормальная скорость свободной поверхности, которая в сферической системе координат вычисляется по формуле

$$U_{nt}=\frac{\zeta\zeta_t}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+\zeta_\varphi^2/\sin^2\theta}}\,.$$

1.3.1. Кинематическая часть задачи

Равенство нулю вариации по Φ дает

$$0=-\rho\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_{Q(t)}\frac{\partial\delta\Phi}{\partial t}dQ+\int\limits_{Q(t)}\nabla\Phi\cdot\nabla(\delta\Phi)dQ\right]dt=$$
$$=-\rho\left[\int\limits_{Q(t_2)}\delta\Phi dQ-\int\limits_{Q(t_1)}\delta\Phi dQ\right]+$$
$$+\rho\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_{Q(t)}\nabla^2\Phi\delta\Phi dQ-\int\limits_{\Sigma(t)}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}-U_{nt}\right)\delta\Phi dS\right]dt,$$

где нормальная производная от потенциала скоростей в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\frac{\zeta^2\Phi_r-\Phi_\theta\zeta_\theta-\Phi_\varphi\zeta_\varphi/\sin\theta}{\zeta\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+\zeta_\varphi^2/\sin^2\theta}}\,.$$

Учитывая условие изохронности вариации (4) и независимость вариации потенциала скоростей в области и на границе, мы получаем кинематическую часть задачи, которая приобретает вид задачи Неймана:

$$\nabla^2\Phi=0 \quad \text{в} \quad Q(t), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=U_{nt} \quad \text{на} \quad \Sigma(t). \qquad (9)$$

В сферической системе координат ее можно записать так:

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (10)$$
$$\text{в} \quad Q(t),$$

$$\zeta\Phi_r-\Phi_\theta\zeta_\theta-\frac{\Phi_\varphi\zeta_\varphi}{\sin\theta}=\zeta\zeta_t \quad \text{на} \quad \Sigma(t). \qquad (11)$$

Последнее уравнение – так называемое кинематическое краевое условие на свободной (неизвестной) поверхности.

Кинематическая часть задачи (10), (11) имеет решение лишь в том случае, когда сохраняется объем жидкости V_l, поскольку должно быть выполнено условие разрешимости задачи Неймана (9):

$$\int\limits_{\Sigma(t)}U_n dS=\int\limits_{\Sigma(t)}\frac{\partial\Phi}{\partial n}dS=0, \qquad (12)$$

которое следует из транспортной теоремы Рейнольдса (8) после дифференцирования по времени условия сохранения объема (1):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q(t)}dQ=\int\limits_{\Sigma(t)}U_n dS=0.$$

Таким образом, условие сохранения объема является необходимым условием разрешимости кинематической части задачи (10), (11).

1.3.2. Динамическая часть задачи

Равенство нулю вариации по ζ приводит к вариационному уравнению:

$$0=\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Sigma(t)}[(p-p_0)-T_s(k_1+k_2)-\bar{p}_0]\times$$
$$\times\frac{\zeta\delta\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}dSdt, \qquad (13)$$

где k_1 и k_2 – главные кривизны $\Sigma(t)$, которые вычисляются по формуле

$$k_1+k_2=\frac{2+(\zeta_\theta/\zeta)^2+(\zeta_\varphi/(\zeta\sin\theta))^2}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}-$$
$$-\frac{1}{\zeta^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\zeta\zeta_\theta\sin\theta}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}\right)- \qquad (14)$$
$$-\frac{1}{\zeta^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\zeta\zeta_\varphi}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}\right).$$

С учетом уравнения Бернулли (6) и выражения для суммы главных кривизн (14), вариационное равенство (13) приводит к так называемому динамическому краевому условию:

$$\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\right)+\bar{p}_0+$$
$$+T_s\left\{\frac{2+(\zeta_\theta/\zeta)^2+(\zeta_\varphi/(\zeta\sin\theta))^2}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}-\right.$$
$$-\frac{1}{\zeta^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\zeta\zeta_\theta\sin\theta}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}\right)- \qquad (15)$$
$$\left.-\frac{1}{\zeta^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\zeta\zeta_\varphi}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}\right)\right\}=0$$
$$\text{на}\quad\Sigma(t).$$

1.4. О множителе Лагранжа $\bar{p}_0$ для статического положения равновесия

Если капля находится в статическом (сферическом) положении равновесия ($\zeta=R_0$ и $\nabla\Phi=0$), то кинематическая часть задачи (10), (11) выполняется автоматически. В то же время, сумма кривизн (14) равна $2/R_0$ и, следовательно, динамическое условие (15) приводит к соотношению

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\bar{p}_0+\frac{2T_s}{R_0}=0, \qquad r=R_0, \qquad (16)$$

где $\Phi=\Phi(t)$.

Если предположить, что $\Phi=0$ (это допустимо в рамках теории потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости, определяющих потенциал скоростей с точностью до функции времени), то $\bar{p}_0$ можно трактовать как статический скачок давления, связанный с поверхностным натяжением, т. е. $\bar{p}_0=\bar{p}_0^{\text{st}}=-2T_s/R_0$. Альтернативно можно учесть статический скачок давления с помощью функции $\Phi=\Phi(t)=-2T_s/(R_0\rho)$, что обеспечивает $\bar{p}_0^{\text{st}}=0$.

Для осциллирующей капли $\nabla\Phi\neq0$, а значит, множитель Лагранжа $\bar{p}_0$ становится значительно более сложной функцией времени. Однако, как и для статического положения равновесия, физический смысл этого множителя трактуется как средний (по свободной поверхности) скачок давления, порождаемый поверхностным натяжением и нелинейными условиями на свободной поверхности.

1.5. Начальные условия и условия периодичности

Задача со свободной границей (10), (11), (15) требует либо начальных условий, задающих начальное положение свободной границы и начальное распределение поля скоростей:

$$\zeta(\theta,\varphi,0)=\zeta_0(\theta,\varphi),$$
$$\Phi(r,\theta,\varphi,0)=\Phi_0(r,\theta,\varphi),$$

либо условия периодичности:

$$\zeta(\theta,\varphi,t)=\zeta(\theta,\varphi,t+T),$$
$$\Phi(r,\theta,\varphi,t)=\Phi(r,\theta,\varphi,t+T),$$

где $T=2\pi/\sigma$ – период колебания капли, который в нашем случае может ассоциироваться с нелинейными собственными (свободными) колебаниями с частотой σ.

2. ЛИНЕЙНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ КАК РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

Собственные частоты и формы колебания капли [14] являются решениями линейной спектральной краевой задачи, описывающей малые периодические решения. Их вывод требует линеаризации кинематического и динамического краевых условий, а также условия сохранения объема, выведенных в предыдущем разделе в самом общем нелинейном случае.

2.1. Спектральная краевая задача, связанная с собственными колебаниями капиллярной капли

Рассмотрим колебания капли относительно статического положения равновесия в предположении малости возмущений поля скоростей и свободной поверхности. Как уже отмечалось, для их описания необходимо линеаризовать условия (1), (11) и (15), считая, что

$$\Phi=-\frac{2T_st}{R_0\rho}+\Phi, \quad \zeta=R_0+\xi, \quad \bar{p}_0=0+\bar{p}_0,$$
$$\Phi,\ \xi,\ \bar{p}_0\ll1,$$

и пренебрегая нелинейными членами в возмущениях Φ, ξ, $\bar{p}_0$ и их производных. Таким образом, линеаризованные краевые условия выполняются на сферической поверхности $r=R_0$, а уравнение Лапласа (10) – внутри шара $r<R_0$.

Линеаризуя условие сохранения объема (1), получаем

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\xi\sin\theta d\theta d\varphi=0. \qquad (17)$$

Линеаризованное кинематическое условие (11) примет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\frac{\partial\xi}{\partial t}, \qquad r=R_0. \tag{18}$$

Наконец, линеаризация динамического условия (15) приводит к соотношению

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+T_s\left\{-\frac{2\xi}{R_0^2}-\frac{1}{R_0^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}\right)\right\}=0, \tag{19}$$
$$r=R_0.$$

Условия (19) и (18) допускают исключение из рассмотрения функции ξ, что дает краевое условие относительно Φ:

$$\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\frac{T_s}{R_0^2}\left\{2\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi}\right]\right\}=0,$$
$$r=R_0.$$

Представляя возмущение потенциала скоростей в виде $\Phi(r,\theta,\varphi,t)=\phi(r,\theta,\varphi)\exp(i\sigma t)$, где σ – линейная собственная частота, приходим к спектральной задаче о собственных колебаниях капли:

$$\nabla^2\phi=0, \qquad r<R_0,$$

$$-\lambda\phi=\left\{2\frac{\partial\phi}{\partial r}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right]\right\}, \tag{20}$$
$$r=R_0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R_0}\sin\theta d\theta d\varphi=0$$

относительно спектрального параметра $\lambda=\rho R_0^2\sigma^2/T_s$ и собственных функций ϕ.

2.2. Собственные функции и собственные формы колебания капли

Спектральная задача (20) имеет аналитическое решение. Найдем его, воспользовавшись методом разделения пространственных переменных и представив собственные функции в виде

$$\phi(r,\theta,\varphi)=r^l\bar{Y}(\theta,\varphi), \qquad l\geq 0, \tag{21}$$

где $\bar{Y}$ – сферические функции Лапласа. Решение (21) по определению удовлетворяет уравнению Лапласа. Подставляя его в спектральное условие при $r=R_0$, приходим к уравнению

$$-(R_0\lambda-2l)\bar{Y}=$$
$$=l\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\bar{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\bar{Y}}{\partial\varphi^2}\right],$$

которое превращается в уравнение для шаровых функций Лапласа $\bar{Y}_{lm}=Y_{lm}/r^l$:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi}=$$
$$=-l(l+1)Y_{lm} \tag{22}$$

и дает собственные значения

$$\lambda=\lambda_{lm}=\frac{1}{R_0}l(l-1)(l+2),$$
$$l=0,1,\ldots, \qquad m=0,\ldots,l. \tag{23}$$

Собственные формы колебаний капли можно теперь записать явно:

$$Y_{lm}(r,\theta,\varphi)=N_{lm}\left(\frac{r}{R_0}\right)^l P_l^{(m)}(\cos\theta)\left\{\begin{array}{c}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{array}\right\},$$

$$N_{lm}=\left\{\begin{array}{ll}\sqrt{\dfrac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}, & m=0,\\ \sqrt{\dfrac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!}}, & m\geq 1,\end{array}\right. \tag{24}$$

где $P_l^{(m)}$ – присоединенные полиномы Лежандра, причем собственные частоты, соответствующие собственным формам (23), имеют вид

$$\sigma_{lm}^2=\frac{T_s}{\rho R_0^3}l(l-1)(l+2),$$
$$l=2,3,\ldots, \qquad m=0,1,\ldots,l \tag{25}$$

(здесь ρ – плотность жидкости; T_s – коэффициент поверхностного натяжения).

Исходя из проделанных выкладок, можно сделать важный вывод о том, что собственные частоты (25) не зависят от индекса m, значение которого не превышает l. Это означает, что для каждого целочисленного значения l имеется $(2l+1)$ взаимно ортогональных (кратных) собственных функций.

С математической точки зрения все собственные функции Y_{lm}, $l=0,1,\ldots$, $m=0,\ldots,l$, начиная с $l=0$, будут решениями спектральной задачи (20). Однако по своему физическому смыслу четыре собственных функции для $l=0$ и 1 не являются собственными формами колебания капли, так как все они отвечают нулевой собственной частоте. Таким образом, в рамках задачи о линейных колебаниях капли необходимо вводить ограничение $l\geq 2$.

Интересно исследовать, чему же соответствуют указанные собственные функции с индексами $l=0$ и 1:

- случай $l=1$, $m=0$ приводит к решению $\phi=z=r\cos\theta$, описывающему поступательное движение капли как твердого тела вдоль оси Oz;
- в случае $l=1$, $l=1$ порождаются два решения $\phi=y=r\sin\theta\sin\varphi$ и $\phi=x=r\sin\theta\cos\varphi$, соответствующие таким же поступательным движениям, но уже вдоль осей Oy и Ox соответственно;
- случай $l=0$ дает тривиальное решение-константу: $\phi_{00}=1/2\sqrt{\pi}$.

Отметим, что отбрасывание четырех собственных функций делает всю систему неполной с математической точки зрения. Следовательно, включение собственных функций с индексами для $l=0$ и 1 необходимо для того, чтобы иметь полный набор гармонических функций, используемый в нелинейном модальном методе.

3. БЕЗРАЗМЕРНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основываясь на решении задачи о собственных колебаниях, можно наряду с характерным линейным размером R_0 ввести в рассмотрение характерное время, которое ассоциируется с размерной величиной $s^{-2}=T_s/(\rho R_0^3)$, возникающей в виде множителя в выражении для собственных частот. Это означает, что характерное время можно выбирать в виде

$$t_* = \sqrt{\rho R_0^3/T_s}\,.$$

Тогда безразмерная краевая задача со свободной границей, соответствующая постановке (10), (11), (15), примет вид

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0$$
$$\text{в}\quad Q(t),$$

$$\zeta\Phi_r-\Phi_\theta\zeta_\theta-\frac{\Phi_\varphi\zeta_\varphi}{\sin\theta}=\zeta\zeta_t \quad \text{на} \quad \Sigma(t),$$

$$\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\right)+\bar{p}_0+ \tag{26}$$
$$+T_s\left\{\frac{2+(\zeta_\theta/\zeta)^2+(\zeta_\varphi/(\zeta\sin\theta))^2}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}-\right.$$
$$-\frac{1}{\zeta^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\zeta\zeta_\theta\sin\theta}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}\right)-$$
$$\left.-\frac{1}{\zeta^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\zeta\zeta_\varphi}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}\right)\right\}=0$$
$$\text{на}\quad\Sigma(t).$$

Здесь $\bar{p}_0$ – безразмерный множитель Лагранжа.

Ее следует дополнить условием сохранения объема

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\xi^3}{3}+\xi^2+\xi\right)\sin\theta d\theta d\varphi=0, \tag{27}$$

где колебания свободной поверхности относительно сферы единичного радиуса представляются в виде

$$\zeta(\theta,\varphi,t)=1+\xi(\theta,\varphi,t).$$

Соответствующий безразмерный лагранжиан в функционале Бейтмена – Люка запишется как

$$\mathrm{BL}(\Phi,\zeta)=-\int\limits_{Q(t)}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\right)dQ-$$
$$-|\Sigma(t)|-\bar{p}_0\left(\int\limits_{Q(t)}dQ-\frac{4}{3}\pi\right). \tag{28}$$

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ФОРМЕ ЛУКОВСКОГО – МАЙЛСА

4.1. Модальное решение

В самом общем случае, применение нелинейных модальных методов к задаче о колебаниях капли (26), (27) предполагает следующее модальное решение:

$$\zeta(\theta,\varphi,t)=1+\sum_I \beta_I(t) f_I(\theta,\varphi),$$
$$\Phi(r,\theta,\varphi,t)=\sum_N F_N(t)\phi_N(r,\theta,\varphi), \tag{29}$$

где f_I и ϕ_N – полные наборы функций в представлении свободной границы и потенциала скоростей, которые должны обеспечить возможность приближения любых допустимых геометрических конфигураций области $Q(t)$, удовлетворяющих условию сохранения объема, а также приближению соответствующего поля скоростей в этой области.

Учтем, что мы имеем дело с так называемыми звездными областями $Q(t)$ относительно начала координат. Полнота представления допустимых областей и соответствующих потенциалов скоростей может быть гарантирована, если взять в качестве полного набора функций ϕ_N собственные функций (24), которые в безразмерном случае примут вид объемных сферических функций:

$$Y_{lm}(r,\theta,\varphi)=N_{lm}r^l P_l^{(m)}(\cos\theta)\left\{\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}\right\},$$

$$N_{lm}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}, & m=0,\\ \sqrt{\dfrac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!}}, & m\geq 1.\end{cases} \tag{30}$$

При этом полный набор функций f_I определяется проекциями Y_{lm} на невозмущенную (статическую) сферическую свободную границу – шаровыми функциями Лапласа:

$$Y_{lm}(1,\theta,\varphi)=N_{lm}P_l^{(m)}(\cos\theta)\left\{\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}\right\}. \tag{31}$$

Еще раз подчеркнем, что отличие нашей задачи от задачи о колебании жидкости в сосуде состоит в том, что полнота системы функций (30) и (31) достигается лишь в том случае, когда в нее включены не только собственные формы колебания капли (функции с индексами $l\geq 2$), но и четыре функции с индексами $l=0$ и 1, с физической точки зрения не описывающие линейных колебаний системы. Поскольку собственным функциям (30) соответствуют безразмерные собственные частоты

$$\sigma_{lm}^2=l(l-1)(l+2), \tag{32}$$

эти четыре дополнительные функции отвечают нулевым частотам и, как отмечено выше, описывают поступательные движения капли ($l=1$) либо (для $l=0$) несут вспомогательный характер:

$$\phi_0=f_0=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}. \tag{33}$$

Введение этой функции связано с необходимостью удовлетворения нелинейного условия сохранения объема и описания среднего по свободной поверхности скачка давления между внешней средой и внутренней жидкостью.

Примем во внимание наличие осесимметричных ($m=0$) и несимметричных форм, что позволяет задать базисный набор функций следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\phi_l=N_{l0}r^lP_l(\cos\theta), && l\geq 0;\\
&\phi_{lm,c}=\phi_{lm}(r,\theta)\cos m\varphi=\\
&\qquad=N_{lm}r^lP_l^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi,\\
&\qquad\qquad l\geq 1,\quad m=1,\ldots,l;\\
&\phi_{lm,s}=\phi_{lm}(r,\theta)\sin m\varphi=\\
&=N_{lm}r^lP_l^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi,\\
&\qquad\qquad l\geq 1,\quad m=1,\ldots,l.
\end{aligned} \tag{34}$$

Им соответствуют

$$\begin{aligned}
&f_l=N_{l0}P_l(\cos\theta), && l\geq 0;\\
&f_{lm,c}=f_{lm}(\theta)\cos m\varphi=\\
&\qquad=N_{lm}P_l^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi,\\
&\qquad\qquad l\geq 1,\quad m=1,\ldots,l;\\
&f_{lm,s}=f_{lm}(\theta)\sin m\varphi=\\
&=N_{lm}P_l^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi,\\
&\qquad\qquad l\geq 1,\quad m=1,\ldots,l.
\end{aligned} \tag{35}$$

Отметим важные соотношения

$$\phi_l=r^lf_l,\quad \phi_{lm,c}=r^lf_{lm,c},\quad \phi_{lm_s}=r^lf_{lm,s}, \tag{36}$$

которые в ряде случаев могут существенно упростить вывод аналитических выражений в нелинейной модальной теории.

Используя определения (34), (35), модальное решение (29) перепишем в виде

$$\zeta(\theta,\varphi,t)=1+\sum_{l=0}^{\infty}\beta_l(t)f_l(\theta)+ \\ +\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}(\beta_{c,lm}(t)\cos m\varphi+ \\ +\beta_{s,lm}(t)\sin m\varphi)f_{lm}(\theta), \qquad (37)$$

и

$$\Phi(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{l=0}^{\infty}F_l(t)\phi_l(r,\theta)+ \\ +\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}(F_{c,lm}(t)\cos m\varphi+ \\ +F_{s,lm}(t)\sin m\varphi)\phi_{lm}(r,\theta). \qquad (38)$$

Первые суммы в выражениях (37) и (38) начинаются с нулевого значения индекса l, т. е. формально включают в себя базисные функции-константы (33). Однако на следующем этапе функции β_0 и F_0 могут быть исключены из рассмотрения в качестве независимых обобщенных координат посредством аналитического удовлетворения условия сохранения объема и использования специфических свойств функционала действия, основанного на лагранжиане в форме Бейтмена – Люка.

4.2. Условие сохранения объема и обобщенная координата β_0

При рассмотрении представления свободной границы (37) следует помнить, что, в отличие от задачи о колебании жидкости в сосуде, линейная комбинация (37) должна включать обобщенную координату β_0, помогающую обеспечить выполнение нелинейного условия сохранения объема (27). Подстановка модального решения (37) в интегральное условие (27) приводит к следующем дополнительному уравнению, связывающему β_i, $\beta_{c,lm}$ и $\beta_{s,lm}$:

$$2\sqrt{\pi}\beta_0+\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i^2+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}(\beta_{c,lm}^2+\beta_{s,lm}^2)+ \\ +O_3(\beta_i,\beta_{c,lm},\beta_{s,lm})=0, \qquad (39)$$

где O_3 – остаточная функция, удерживающая высшие, начиная с кубических, полиномиальные величины в терминах обобщенных координат, включая β_0. Механический смысл этого соотношения – геометрическая связь для допустимых положений свободной границы в терминах обобщенных координат.

Рассмотрим относительно малые деформации сферической свободной границы. Это означает, что рассматриваются нетривиальные решения однородного уравнения (39) в окрестности нулевого (тривиального) решения. Тогда можно использовать теорему о неявной функции и выразить β_0 через остальные обобщенные координаты. В терминах рядов Тейлора по степеням обобщенных координат соответствующее нетривиальное решение уравнения (39) примет вид

$$\beta_0=G(\beta_i,\beta_{c,lm},\beta_{s,lm},\ i\ge1,\ l\ge1)= \\ =-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\sum_{i=1}\beta_i^2+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}(\beta_{c,lm}^2+\beta_{s,lm}^2)\right]- \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_3(\beta_i,\beta_{c,lm},\beta_{s,lm},\ i\ge1,\ l\ge1), \qquad (40)$$

где G_3 – остаточная функция (в терминах независимых обобщенных координат, удерживающая начиная с кубических, полиномиальные порядки β_i, $\beta_{c,lm}$, $\beta_{s,lm}$, $i\ge1$, $l\ge1$.

Подставив выражение (40) в (37), исключим β_0 из числа независимых обобщенных координат и получим следующее представление свободной поверхности:

$$\zeta(\theta,\varphi,t)=1-\frac{1}{4\pi}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^2+\right. \\ \left.+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}(\beta_{c,lm}^2+\beta_{s,lm}^2)+G_3\right)+ \\ +\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l(t)f_l(\theta)+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}(\beta_{c,lm}(t)\cos m\varphi+ \\ +\beta_{s,lm}(t)\sin m\varphi)f_{lm}(\theta), \qquad (41)$$

которое гарантирует автоматическое выполнение условия сохранение объема и задает свободную границу как функцию независимых обобщенных координат β_i, $\beta_{c,lm}$, $\beta_{s,lm}$, $i\ge1$, $l\ge1$.

4.3. Лагранжиан в форме Бейтмена – Люка и обобщенная координата F_0

С учетом представления свободной границы в форме (41) исчезает необходимость рассматривать условие сохранения объема как дополнительное геометрическое ограничение для задачи определения экстремальных значений функционала действия с лагранжианом в форме Бейтмена – Люка (28). Это же делает ненужным введение дополнительных членов с множителем Лагранжа –

если модальное решение имеет вид (41), он может быть приравнен к нулю: $\bar{p}_0=0$.

Подставим модальное представление потенциала скоростей (38) в формулу (28). Это приводит к следующему выражению для лагранжиана:

$$\begin{aligned}\mathrm{BL} = &-\sum_{i=1}^{\infty} A_i\dot{F}_i - \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l} A_{c,lm}\dot{F}_{c,lm} - \\ &-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l} A_{c,lm}\dot{F}_{c,lm} - \frac{1}{2}\sum_{n,k=1}^{\infty} A_{n,k}F_nF_k - \\ &-\frac{1}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2} A_{(c,l_1m_1),(c,l_2m_2)}\times \\ &\qquad\times F_{(c,l_1m_1)}F_{(c,l_2m_2)} - \\ &-\frac{1}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2} A_{(s,l_1m_1),(s,l_2m_2)}\times \\ &\times F_{(s,l_1m_1)}F_{(s,l_2m_2)} - \\ &-\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2} A_{(c,l_1m_1),(s,l_2m_2)}\times \\ &\qquad\times F_{(c,l_1m_1)}F_{(s,l_2m_2)} - \\ &-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l} A_{n,(s,lm)}F_nF_{(s,lm)} - \\ &-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l} A_{n,(c,lm)}F_nF_{(c,lm)} - \\ &\qquad -\mathrm{TS} - \frac{2}{3}\sqrt{\pi}\,\dot{F}_0 = 0,\end{aligned} \tag{42}$$

где

$$\begin{aligned}&A_n = \int\limits_{Q(t)} \phi_n dQ = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\zeta} \phi_n\ r^2\sin\theta\ drd\theta d\varphi, \\ &A_{c,lm} = \int\limits_{Q(t)} \phi_{lm}\cos(m\varphi)\,dQ = \\ &\qquad = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\zeta} \phi_{lm}\cos(m\varphi)\ r^2\sin\theta\ drd\theta d\varphi, \\ &A_{s,lm} = \int\limits_{Q(t)} \phi_{lm}\sin(m\varphi)\,dQ = \\ &\qquad = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\zeta} \phi_{lm}\sin(m\varphi)\ r^2\sin\theta\ drd\theta d\varphi,\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}&A_{n,k} = A_{k,n} = \int\limits_{Q(t)} (\nabla\phi_n\cdot\nabla\phi_k)dQ = \\ &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\zeta} (\nabla\phi_n\cdot\nabla\phi_k)\ r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi, \\ &A_{n,(c,lm)} = A_{(c,lm),n} = \\ &= \int\limits_{Q(t)} (\nabla\phi_n\cdot\nabla[\phi_{lm}\cos m\varphi])dQ = \\ &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\zeta} (\nabla\phi_n\cdot\nabla[\phi_{lm}\cos m\varphi])\ r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi, \\ &A_{n,(s,lm)} = A_{(s,lm),n} = \\ &= \int\limits_{Q(t)} (\nabla\phi_n\cdot\nabla[\phi_{lm}\sin m\varphi])dQ = \\ &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\zeta} (\nabla\phi_n\cdot\nabla[\phi_{lm}\sin m\varphi])\ r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi, \\ &A_{(c,l_1m_1),(s,l_2m_2)} = A_{(s,l_2m_2),(c,l_1m_1)} = \\ &= \int\limits_{Q(t)} (\nabla[\phi_{l_1m_1}\cos m_1\varphi]\cdot\nabla[\phi_{l_2m_2}\sin m_2\varphi])dQ = \\ &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\zeta} (\nabla[\phi_{l_1m_1}\cos m_1\varphi]\cdot\nabla[\phi_{l_2m_2}\sin m_2\varphi])\times \\ &\qquad\times r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi, \\ &A_{(c,l_1m_1),(c,l_2m_2)} = A_{(c,l_2m_2),(c,l_1m_1)} = \\ &= \int\limits_{Q(t)} (\nabla[\phi_{l_1m_1}\cos m_1\varphi]\cdot\nabla[\phi_{l_2m_2}\cos m_2\varphi])dQ = \\ &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\zeta} (\nabla[\phi_{l_1m_1}\cos m_1\varphi]\cdot\nabla[\phi_{l_2m_2}\cos m_2\varphi])\times \\ &\qquad\times r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi, \\ &A_{(s,l_1m_1),(s,l_2m_2)} = A_{(s,l_2m_2),(s,l_1m_1)} = \\ &= \int\limits_{Q(t)} (\nabla[\phi_{l_1m_1}\sin m_1\varphi]\cdot\nabla[\phi_{l_2m_2}\sin m_2\varphi])dQ = \\ &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\zeta} (\nabla[\phi_{l_1m_1}\sin m_1\varphi]\cdot\nabla[\phi_{l_2m_2}\sin m_2\varphi])\times \\ &\qquad\times r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi\end{aligned} \tag{44}$$

и

$$\mathrm{TS} = \int\limits_{\Sigma(t)} dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \zeta \sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+\frac{\zeta_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,\sin\theta d\theta d\varphi, \quad (45)$$

где

$$\zeta_\theta = \frac{\partial\zeta}{\partial\theta}, \qquad \zeta_\varphi = \frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}.$$

Нелинейная зависимость от обобщенных координат β_* обеспечиватся тем, что в выражения (43)–(45) необходимо подставить представление свободной границы (41).

Функционал действия, основанный на лагранжиане в форме Бейтмена – Люка, предполагает независимость вариации по возмущениям свободной поверхности и потенциалу скоростей. После исключения β_0 это означает, что независимыми остаются лишь вариации по обобщенным координатам β_i, $\beta_{c,lm}$, $\beta_{s,lm}$ и F_i, $F_{c,lm}$, $F_{s,lm}$ при $i\geq 1$, $l\geq 1$, а также, вообще говоря, F_0. Однако выражение (42) показывает, что обобщенная координата F_0 входит в функционал действия линейным образом. Поэтому и его вариация по F_0 всегда приводит к формальному тождеству

$$\frac{2}{3}\sqrt{\pi}\int\limits_{t_1}^{t_2}\delta\dot{F}_0 dt = \frac{2}{3}\sqrt{\pi}\left[\delta F_0(t_2)-\delta F_0(t_1)\right] = 0,$$

которое достигается за счет выполнения условия изохронности вариации (4) для независимых обобщенных координат:

$$\delta\beta_i(t_1) = \delta\beta_i(t_2) = \delta\beta_{c,lm}(t_1) = \delta\beta_{c,lm}(t_2) =$$
$$= \delta\beta_{s,lm}(t_1) = \delta\beta_{s,lm}(t_2) = \delta F_i(t_1) = \delta F(t_2) =$$
$$= \delta F_{c,lm}(t_1) = \delta F_{c,lm}(t_2) =$$
$$= \delta F_{s,lm}(t_1) = \delta F_{s,lm}(t_2) = 0.$$

Таким образом, решение нашей задачи в терминах обобщенных координат β_i, $\beta_{c,lm}$, $\beta_{s,lm}$ и F_i, $F_{c,lm}$, $F_{s,lm}$ $i\geq 1$, $l\geq 1$ не зависит от обобщенной координаты F_0, которая может быть исключена из рассмотрения. Это естественно, поскольку F_0 играет роль среднего по поверхности скачка давления между внешним (атмосферным) давлением и давлением внутри жидкой капли постоянного объема. С физической точки зрения такой средний скачок давления не должен влиять на колебания капли, если жидкость несжимаемая, что соответствует принятой гидродинамической модели.

4.4. Общий вид модальных уравнений

4.4.1. Кинематические модальные уравнения

Вариация функционала действия с лагранжианом вида (42) по независимым обобщенным координатам F_i, $F_{c,lm}$, $F_{s,lm}$, $i\geq 1$, $l\geq 1$ приводит к системе уравнений

$$\frac{dA_n}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k}F_k +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k}\left(A_{n,(c,km)}F_{c,km}+A_{n,(s,km)}F_{s,km}\right),$$
$$n\geq 1,$$

$$\frac{dA_{c,lm}}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{(c,lm),k}F_k +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(A_{(c,lm),(c,kn)}F_{c,kn}+A_{(c,lm),(s,kn)}F_{s,kn}\right),$$
$$\frac{dA_{s,lm}}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{(s,lm),k}F_k +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(A_{(s,lm),(c,kn)}F_{c,kn}+A_{(s,lm),(s,kn)}F_{s,kn}\right),$$
$$l\geq 1, \quad m=1,\ldots,l. \quad (46)$$

Приводящие к уравнениям (46) выкладки достаточно сложны и громоздки. Заметим, однако, что общая схема их вывода абсолютно аналогична приведенной в [15] для задачи о плескании жидкости в сосуде.

С учетом правил дифференцирования

$$\frac{dA_n}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial A_n}{\partial\beta_i}\dot{\beta}_i +$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{\partial A_n}{\partial\beta_{c,lm}}\dot{\beta}_{c,lm}+\frac{\partial A_n}{\partial\beta_{s,lm}}\dot{\beta}_{s,lm}\right),$$
$$\frac{dA_{c,lm}}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial A_{c,lm}}{\partial\beta_i}\dot{\beta}_i +$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j}\left(\frac{\partial A_{c,lm}}{\partial\beta_{c,jn}}\dot{\beta}_{c,jn}+\frac{\partial A_{c,lm}}{\partial\beta_{s,jn}}\dot{\beta}_{s,jn}\right), \quad (47)$$
$$\frac{dA_{s,lm}}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial A_{s,lm}}{\partial\beta_i}\dot{\beta}_i +$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j}\left(\frac{\partial A_{s,jn}}{\partial\beta_{c,jn}}\dot{\beta}_{c,jn}+\frac{\partial A_{s,lm}}{\partial\beta_{s,jn}}\dot{\beta}_{s,jn}\right),$$

соотношения (46) могут быть рассмотрены как дифференциальные уравнения относительно обобщенных координат β_*. Заметим, что при дифференцировании по обобщенным координатам β_* необходимо также учитывать наличие в выражении (41) компоненты, которая появились в результате удовлетворения условия сохранения объема.

Равенства (46) могут быть также рассмотрены как система линейных алгебраических уравнений относительно F_i, $F_{c,lm}$, $F_{s,lm}$, $i\geq 1$, $l\geq 1$, где коэффициенты $A_{n,k}$ – нелинейные функции обобщенных координат β_i, $\beta_{c,lm}$, $\beta_{s,lm}$, $i\geq 1$, $l\geq 1$, а правая часть dA_n/dt, $dA_{c,lm}/dt$, $dA_{s,lm}/dt$ выражается через β_i, $\beta_{c,lm}$, $\beta_{s,lm}$, $i\geq 1$, $l\geq 1$ и их первые производные.

Уравнения системы (46) несут в себе кинематические соотношения между обобщенными координатами, поэтому они будут в дальнейшем именоваться общими кинематическими модальными уравнениями.

4.4.2. Динамические модальные уравнения

Вариация функционала действия по независимым обобщенным координатам β_i, $\beta_{c,lm}$, $\beta_{s,lm}$, $i\geq 1$, $l\geq 1$ приводит к системе дифференциальных уравнений (так называемым динамическим модальным уравнениям) вида

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial A_n}{\partial\beta_\mu}\dot F_n+\\&+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{\partial A_{c,lm}}{\partial\beta_\mu}\dot F_{c,lm}+\frac{\partial A_{c,lm}}{\partial\beta_\mu}\dot F_{c,lm}\right)+\\&+\frac{1}{2}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{\partial A_{n,k}}{\partial\beta_\mu}F_nF_k+\sum_{n,l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}F_n\times\\&\times\left(\frac{\partial A_{n,(c,lm)}}{\partial\beta_\mu}F_{c,lm}+\frac{\partial A_{n,(s,lm)}}{\partial\beta_\mu}F_{s,lm}\right)+\\&+\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2}F_{c,l_1m_1}F_{s,l_2m_2}\times\\&\qquad\times\frac{\partial A_{(c,l_1m_1),(s,l_2m_2)}}{\partial\beta_\mu}+\\&+\frac{1}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2}F_{c,l_1m_1}F_{c,l_2m_2}\times\\&\qquad\times\frac{\partial A_{(c,l_1m_1),(c,l_2m_2)}}{\partial\beta_\mu}+\\&+\frac{1}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2}F_{s,l_1m_1}F_{s,l_2m_2}\times\\&\times\frac{\partial A_{(s,l_1m_1),(s,l_2m_2)}}{\partial\beta_\mu}+\frac{\partial \mathrm{TS}}{\partial\beta_\mu}=0,\quad \mu\geq 1,\end{aligned}\tag{48a}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial A_n}{\partial\beta_{c,\mu\nu}}\dot F_n+\\&+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{\partial A_{c,lm}}{\partial\beta_{c,\mu\nu}}\dot F_{c,lm}+\frac{\partial A_{c,lm}}{\partial\beta_{c,\mu\nu}}\dot F_{c,lm}\right)+\\&+\frac{1}{2}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{\partial A_{n,k}}{\partial\beta_{c,\mu\nu}}F_nF_k+\sum_{n,l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}F_n\times\\&\times\left(\frac{\partial A_{n,(c,lm)}}{\partial\beta_{c,\mu\nu}}F_{c,lm}+\frac{\partial A_{n,(s,lm)}}{\partial\beta_{c,\mu\nu}}F_{s,lm}\right)+\\&+\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2}F_{c,l_1m_1}F_{s,l_2m_2}\times\\&\qquad\times\frac{\partial A_{(c,l_1m_1),(s,l_2m_2)}}{\partial\beta_{c,\mu\nu}}+\\&+\frac{1}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2}F_{c,l_1m_1}F_{c,l_2m_2}\times\\&\qquad\times\frac{\partial A_{(c,l_1m_1),(c,l_2m_2)}}{\partial\beta_{c,\mu\nu}}+\\&+\frac{1}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2}F_{s,l_1m_1}F_{s,l_2m_2}\times\\&\qquad\times\frac{\partial A_{(s,l_1m_1),(s,l_2m_2)}}{\partial\beta_{c,\mu\nu}}+\frac{\partial \mathrm{TS}}{\partial\beta_{c,\mu\nu}}=0,\\&\qquad\mu\geq 1,\quad n=1,\ldots,\mu,\end{aligned}\tag{48b}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial A_n}{\partial\beta_{s,\mu\nu}}\dot F_n+\\&+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{\partial A_{c,lm}}{\partial\beta_{s,\mu\nu}}\dot F_{c,lm}+\frac{\partial A_{c,lm}}{\partial\beta_{s,\mu\nu}}\dot F_{c,lm}\right)+\\&+\frac{1}{2}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{\partial A_{n,k}}{\partial\beta_{s,\mu\nu}}F_nF_k+\sum_{n,l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}F_n\times\\&\times\left(\frac{\partial A_{n,(c,lm)}}{\partial\beta_{s,\mu\nu}}F_{c,lm}+\frac{\partial A_{n,(s,lm)}}{\partial\beta_{s,\mu\nu}}F_{s,lm}\right)+\\&+\textstyle\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2}F_{c,l_1m_1}F_{s,l_2m_2}\times\\&\qquad\times\frac{\partial A_{(c,l_1m_1),(s,l_2m_2)}}{\partial\beta_{s,\mu\nu}}+\\&+\frac{1}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2}F_{c,l_1m_1}F_{c,l_2m_2}\times\\&\qquad\times\frac{\partial A_{(c,l_1m_1),(c,l_2m_2)}}{\partial\beta_{s,\mu\nu}}+\\&+\frac{1}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{\infty}\sum_{m_1,m_2=1}^{l_1,l_2}F_{s,l_1m_1}F_{s,l_2m_2}\times\\&\qquad\times\frac{\partial A_{(s,l_1m_1),(s,l_2m_2)}}{\partial\beta_{s,\mu\nu}}+\frac{\partial \mathrm{TS}}{\partial\beta_{s,\mu\nu}}=0,\\&\qquad\mu\geq 1,\quad n=1,\ldots,\mu,\end{aligned}\tag{48c}$$

Важно, что дифференцирование по β-координатам проводится с учетом представления свободной границы в виде (41), которое предполагает наличие членов, появившихся в результате удовлетворения условия сохранения объема. В частности, формулы дифференцирования члена TS, отвечающего за поверхностное натяжение, имеют вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{TS}}{\partial \beta_\mu} &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}(k_1+k_2)\zeta^2\times\\
&\times\left[f_\mu-\frac{1}{2\pi}\beta_\mu-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G_3}{\partial \beta_\mu}\right]\sin\theta d\theta d\varphi=\\
&=\int\limits_{\Sigma(t)}\frac{\zeta(k_1+k_2)}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}\times\\
&\times\left[f_\mu-\frac{1}{2\pi}\beta_\mu-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G_3}{\partial \beta_\mu}\right]dS,\\
\frac{\partial \mathrm{TS}}{\partial \beta_{c,\mu\nu}} &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}(k_1+k_2)\zeta^2\times\\
&\times\Bigg[f_{\mu\nu}\cos(\nu\varphi)-\frac{1}{2\pi}\beta_{c,\mu\nu}-\\
&-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G_3}{\partial \beta_{c,\mu\nu}}\Bigg]\sin\theta d\theta d\varphi=\\
&=\int\limits_{\Sigma(t)}\frac{\zeta(k_1+k_2)}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}\times\\
&\times\left[f_{\mu\nu}\cos(\nu\varphi)-\frac{1}{2\pi}\beta_{c,\mu\nu}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G_3}{\partial \beta_{c,\mu\nu}}\right]dS,\\
\frac{\partial \mathrm{TS}}{\partial \beta_{s,\mu\nu}} &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}(k_1+k_2)\zeta^2\times\\
&\times\Bigg[f_{\mu\nu}\sin(\nu\varphi)-\frac{1}{2\pi}\beta_{s,\mu\nu}-\\
&-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G_3}{\partial \beta_{s,\mu\nu}}\Bigg]\sin\theta d\theta d\varphi=\\
&=\int\limits_{\Sigma(t)}\frac{\zeta(k_1+k_2)}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2+(\zeta_\varphi/\sin\theta)^2}}\times\\
&\times\left[f_{\mu\nu}\sin(\nu\varphi)-\frac{1}{2\pi}\beta_{s,\mu\nu}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G_3}{\partial \beta_{s,\mu\nu}}\right]dS.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Здесь учет членов, отвечающих за сохранение объема, приводит в нелинейным выражениям (в квадратных скобках). Сумма главных кривизн вычисляется по формуле (14). В нее, опять таки, нужно подставить представление свободной границы в виде (41), что будет порождать дополнительные нелинейные члены.

5. ЛИНЕЙНАЯ МОДАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

В рамках построенной общей нелинейной системы модальных уравнений рассмотрим малые линейные колебания капли относительно сферического положения равновесия. Для вывода линеаризованных модальных кинематических уравнений нужно выделить линейные компоненты для левых и правых частей уравнений (46). При этом справа достаточно знать нулевое (порядка $O(1)$) приближение для выражений $A_{n,k}$, которое вычисляется из формул (44) в случае нулевых возмущений свободной границы $\zeta=1$. Воспользовавшись формулой Грина (7), запишем его в виде

$$
\begin{aligned}
A_{n,k}|_0 &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{1}(\nabla\phi_n\cdot\nabla\phi_k)\times\\
&\times r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi=\\
&=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{\partial\phi_n}{\partial r}\phi_k\right]_{r=1}\sin\theta\ d\theta d\varphi=\\
&=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} l f_n f_k\sin\theta\ d\theta d\varphi=\delta_{nk}l,
\end{aligned}
\tag{50}
$$

где δ_{kn} – символ Кронекера. Аналогично, используя формулу Грина и ортогональность функционального базиса на невозмущенной сферической поверхности, получаем для остальных нулевых приближений (44):

$$
\begin{aligned}
&A_{(c,l_1m_1),(c,l_2m_2)}|_0 =\\
&\quad= A_{(s,l_1m_1),(s,l_2m_2)}|_0 = l\delta_{l_1l_2}\delta_{m_1m_2},\\
&A_{n,(c,lm)}|_0 = A_{n,(s,lm)}|_0 =\\
&\qquad= A_{(s,lm),(c,lm)}|_0 = 0.
\end{aligned}
$$

Для вывода линейных частей слева можно воспользоваться формулами (47), в которых требуется найти нулевое приближение β-производных. На основании соотношений (43) последние принимают вид

$$
\begin{gathered}
\left.\frac{\partial A_n}{\partial \beta_i}\right|_0 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \phi_n|_{r=1} f_i \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{in}, \\
\left.\frac{\partial A_{c,l_1 m_1}}{\partial \beta_{c,l_2 m_2}}\right|_0 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \phi_{l_1 m_1}|_{r=1} f_{l_2 m_2} \times \\
\times \cos(m_1\varphi)\cos(m_2\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{l_1 l_2}\delta_{l_2 m_2}, \\
\left.\frac{\partial A_{s,l_1 m_1}}{\partial \beta_{s,l_2 m_2}}\right|_0 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \phi_{l_1 m_1}|_{r=1} f_{l_2 m_2} \times \\
\times \sin(m_1\varphi)\sin(m_2\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{l_1 l_2}\delta_{l_2 m_2},
\end{gathered}
\tag{51}
$$

причем остальные (перекрестные по индексам) производные дают нули в приближении $O(1)$ относительно обобщенных координат.

Использование формул (47) и (51) дает в линейном приближении

$$
\begin{gathered}
\frac{dA_n}{dt} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f_n \Biggl(\sum_{i=1}^{\infty} \dot\beta_i f_i + \\
+ \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l} \Bigl(\cos m\varphi \dot\beta_{c,lm} + \sin m\varphi \dot\beta_{s,lm} \Bigr) \Biggr) \times \\
\times \sin\theta \; d\theta d\varphi = \dot\beta_n, \\
\frac{dA_{c,lm}}{dt} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(m\varphi) f_{lm} \Biggl(\sum_{i=1}^{\infty} \dot\beta_i f_i + \\
+ \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{l} \Bigl(\cos n\varphi \dot\beta_{c,ln} + \sin n\varphi \dot\beta_{s,ln} \Bigr) \Biggr) \times \\
\times \sin\theta \; d\theta d\varphi = \dot\beta_{c,lm}, \\
\frac{dA_{s,lm}}{dt} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin(m\varphi) f_{lm} \Biggl(\sum_{i=1}^{\infty} \dot\beta_i f_i + \\
+ \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{l} \Bigl(\cos n\varphi \dot\beta_{c,ln} + \sin n\varphi \dot\beta_{s,ln} \Bigr) \Biggr) \times \\
\times \sin\theta \; d\theta d\varphi = \dot\beta_{c,lm}.
\end{gathered}
\tag{52}
$$

Таким образом, линеаризованные кинематические модальные уравнения (46) принимают вид

$$
\begin{gathered}
F_l = \frac{\dot\beta_l}{l}, \quad F_{c,lm} = \frac{\dot\beta_{c,lm}}{l}, \quad F_{s,lm} = \frac{\dot\beta_{s,lm}}{l}, \\
l = 1, \ldots, \quad m = 1, \ldots, l.
\end{gathered}
\tag{53}
$$

Поскольку из формул (51) нам уже известны нулевые приближения для β-производных от A_n, $A_{(c,lm)}$ и $A_{(s,lm)}$, то наибольший интерес при выводе линейных динамических модальных уравнений представляет линеаризация выражений (49). Исключив из суммы кривизн нелинейную компоненту, имеем

$$
\begin{gathered}
(k_1 + k_2) = 2 - \Biggl(2\xi + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right) + \\
+ \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi} \Biggr) + O(\xi^2),
\end{gathered}
\tag{54}
$$

где $\xi = \zeta - 1$. Очевидно, что величиной порядка $O(1)$ здесь будет постоянная 2. Аналогично, постоянную и линейную компоненты имеет множитель в квадратных скобках выражения (49), причем линейная компонента возникает из-за квадратичных членов в условии сохранения объема. Таким образом, несмотря на то, что в линейном приближении можно пренебречь связанными с выполнением нелинейного условия сохранения объема квадратичными членами в первых скобках представления (41), в квадратных скобках подынтегральных выражений (49) появляются связанные с ними линейные слагаемые

$$
-\frac{1}{2\pi}\beta_\mu, \qquad -\frac{1}{2\pi}\beta_{c,\mu\nu}, \qquad -\frac{1}{2\pi}\beta_{s,\mu\nu},
$$

которыми в линейной модальной теории пренебречь нельзя.

Окончательно, при использовании формулы (22) линейные динамические модальные уравнения (48a) – (48c) примут вид

$$
\begin{gathered}
\dot F_l + (l-1)(l+2)\beta_l = 0, \\
\dot F_{c,lm} + (l-1)(l+2)\beta_{c,lm} = 0, \\
\dot F_{s,lm} + (l-1)(l+2)\beta_{s,lm} = 0, \\
l = 1, \ldots, \quad m = 1, \ldots, l.
\end{gathered}
\tag{55}
$$

Комбинируя соотношения (55) и (53), приходим к следующим модальным уравнениям для описания линейных колебаний капли:

$$
\begin{gathered}
\ddot\beta_l + \sigma_{l0}^2 \beta_l = 0, \\
\ddot\beta_{c,lm} + \sigma_{lm}^2 \beta_{c,lm} = 0, \\
\ddot\beta_{s,lm} + \sigma_{lm}^2 \beta_{s,lm} = 0, \\
l = 1, \ldots, \quad m = 1, \ldots, l,
\end{gathered}
$$

где безразмерные собственные частоты даются формулами (32).

Заметим, что при $l=1$ собственные значения – нулевые, а, значит, соответствующие модальные уравнения принимают вид $\ddot{\beta}_1=\ddot{\beta}_{c,11}=\ddot{\beta}_{s,11}=0$, что описывает поступательное движение капли как твердого тела с постоянной скоростью. Заметим, что колебания капли могут рассматриваться в произвольной инерциальной системе координат (в том числе и связанной с поступательным движением). Поэтому, если ставится задача описания колебательных движений капли, такие уравнения можно исключить из рассмотрения.

Для случая же осесимметричных колебаний модальные уравнения могут быть переписаны в виде

$$\ddot{\beta}_l+\sigma_{l0}^2\beta_l=0, \qquad l\geq 1.$$

6. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КАПЛИ

Как показывают исследования [6], наблюдаемые экспериментально осесимметричные установившиеся колебания капли могут быть описаны в рамках асимптотических теорий третьего порядка. Следовательно, как и в нелинейной теории плескания жидкости в сосудах, нелинейные осесимметричные колебания капли могут быть достаточно эффективно промоделированы в рамках асимптотических модальных систем. Построим такую асимптотическую теорию, ограничиваясь полиномиальными членами до третьего порядка в терминах обобщенных координат.

6.1. Модальное решение и условие сохранения объема

В случае осесимметричных колебаний капли модальное решение (38), (41) упрощается, поскольку исчезают обобщенные координаты, связанные с несимметричными возмущениями свободной поверхности. Кроме того, как будет показано позднее, предполагая асимптотический характер для обобщенных координат

$$\beta_l\sim F_l=O(\epsilon^{1/3}), \qquad \epsilon\ll 1, \tag{56}$$

и пренебрегая членами $o(\epsilon)$ в модальных уравнениях, можно прийти к дифференциальным уравнениям с достаточно простой структурой.

Отдельно следует проанализировать условие сохранения объема. Так как $\beta_0=O(\epsilon^{2/3})$, то с использованием уравнения (39) можно достаточно легко выделить кубическую компоненту функции G в выражении (40). Это позволяет, совместно с условием симметричности колебаний капли относительно вертикальной оси, привести асимптотическое с точностью до $O(\epsilon)$ модальное решение к виду

$$\zeta(\theta,\varphi,t)=1-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^2+\frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{\infty}\Lambda_{ijk}^{(3)}\beta_i\beta_j\beta_k+\right. \tag{57}$$
$$\left.+G_4\right)+\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l(t)f_l(\theta).$$

В уравнении (57) коэффициенты тензора $\Lambda_{ijk}^{(3)}$ определены посредством интеграла

$$\Lambda_{ijm}^{(3)}=2\pi\int_0^{\pi}f_if_jf_m\sin\theta d\theta, \tag{58}$$

который можно найти аналитически, используя результаты работы [21]:

$$\Lambda_{ijm}^{(3)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2i+1)(2j+1)}{\pi(2m+1)}}\left(C_{i0,j0}^{m0}\right)^2. \tag{59}$$

Здесь $C_{i0,j0}^{m0}$ – коэффициенты Клебша – Гордана, возникающие в квантовой механике (их определение можно найти, например, в монографии [22]).

Как было замечено при выводе линейных модальных уравнений, формулы (49) вовлекают в расчеты производную по β-коэффициентам от остаточной функции G_4 из соотношения (57). Вследствие этого формально порождаются члены третьего полиномиального порядка, которые должны быть учтены в асимптотической модальной теории. Фактически, это означает, что для корректного построения теории третьего порядка формула (49) обязана включать компоненты четвертого порядка остаточной функции G_4. Однако поскольку $\Lambda_{0ij}^{(3)}=\delta_{ij}/2\sqrt{\pi}$, то удается аналитически показать, что искомые компоненты четвертого порядка равны нулю и остаточная функция начинается уже с компонент пятого порядка в смысле обобщенных координат (т. е. $G_4=G_5$).

Упрощения в представлении потенциала скоростей (38) связаны лишь с отсутствием двойной суммы, отвечающей за неосесимметричные колебания:

$$\Phi(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{l=1}^{\infty}F_l(t)\phi_l(r,\theta).$$

6.2. Кинематические модальные уравнения

С учетом формулы дифференцирования (47), кинематические модальные уравнения для осесимметричных колебаний в (46) принимают вид

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial A_n}{\partial\beta_i}\dot{\beta}_i=\sum_{k=1}^{\infty}A_{nk}F_k, \qquad n\geq 1. \tag{60}$$

Из уравнений (60) становится понятным, что при выполнении условия (56) процедура построения асимптотических выражений в пренебрежении членами $o(\epsilon)$ сводится к разложению в ряд Тейлора по β_k интегральных выражений для $\partial A_n/\partial\beta_i$ и A_{nk} до второго полиномиального порядка в терминах обобщенных координат. Такая процедура упрощается, если воспользоваться соотношениями (36), позволяющими записать искомые выражения так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_n}{\partial\beta_i}=&2\pi\int\limits_0^{\pi}f_n\zeta^{n+2}\Big\{f_i-\\&-\frac{1}{4\pi}\Big[2\beta_i+\sum_{j,k=1}^{\infty}\Lambda_{ijk}^{(3)}\beta_j\beta_k\Big]\Big\}\sin\theta d\theta,\\A_{nk}=&2\pi\int\limits_0^{\pi}[nkf_nf_k+f_{n\theta}f_{k\theta}]\frac{\zeta^{n+k+1}}{n+k+1}\sin\theta d\theta.\end{aligned} \tag{61}$$

Подставляя выражение для представления свободной границы (57) в (61) и раскладывая в ряд Тейлора по β_i, получаем с точностью до квадратичных компонент:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_n}{\partial\beta_i}=&\delta_{ni}+(2+n)\sum_{j=1}^{\infty}\Lambda_{nij}^{(3)}\beta_j+\\&+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\sum_{j,k=1}^{\infty}\Lambda_{nijk}^{(4)}\beta_j\beta_k-\\&-\frac{2+n}{4\pi}\left[\delta_{ni}\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^2+2\beta_i\beta_n\right]=\\&=\delta_{ni}+\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{n,i,j}^{(1)}\beta_j+\sum_{j,k=1}^{\infty}\chi_{n,i,jk}^{(2)}\beta_j\beta_k,\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}A_{nk}=&n\delta_{nk}+\sum_{j=1}^{\infty}\Big[nk\Lambda_{knj}^{(3)}+\Lambda_{nk,j}^{(-3)}\Big]\beta_j+\\&+\frac{n+k}{2}\sum_{i,j=1}^{\infty}\Big[nk\Lambda_{knij}^{(4)}+\Lambda_{nk,ij}^{(-4)}\Big]\beta_i\beta_j-\\&-\frac{n(n+k+1)}{4\pi}\delta_{nk}\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^2=\\&=n\delta_{nk}+\sum_{j=1}^{\infty}\Pi_{nk,j}^{(1)}\beta_j+\sum_{i,j=1}^{\infty}\Pi_{nk,ij}^{(2)}\beta_i\beta_j.\end{aligned} \tag{63}$$

Здесь $\Lambda_{ijk}^{(3)}$ определено формулами (58) и (59), а коэффициент $\Lambda_{ijkm}^{(4)}$ можно явно выразить через коэффициенты Клебша – Гордана [21]:

$$\begin{aligned}\Lambda_{ijkm}^{(4)}=&2\pi\int\limits_0^{\pi}f_if_jf_kf_m\sin\theta d\theta=\\=&\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2m+1)}}{4\pi}\times\\&\times\sum_{n=\max(|i-j|,|k-m|)}^{\min(i+j,k+m)}\frac{1}{2n+1}\left(C_{i0,j0}^{n0}C_{k0,m0}^{n0}\right)^2.\end{aligned} \tag{64}$$

Далее воспользуемся тем, что

$$\Lambda_{nk}^{(-2)}=2\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial f_n}{\partial\theta}\frac{\partial f_k}{\partial\theta}\sin\theta d\theta=n(n+1)\delta_{nk}.$$

Кроме того, введем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}\Lambda_{in,k}^{(-3)}=&2\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial f_i}{\partial\theta}\frac{\partial f_n}{\partial\theta}f_k\sin\theta d\theta=\\=&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{i(i+1)(2i+1)n(n+1)(2n+1)}{\pi(2k+1)}}\times\\&\times C_{i0,n0}^{k0}C_{i(-1),n1}^{k0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{in,kj}^{(-4)}=&2\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial f_i}{\partial\theta}\frac{\partial f_n}{\partial\theta}f_kf_j\sin\theta d\theta=\\=&\frac{1}{4\pi}\sqrt{i(i+1)(2i+1)n(n+1)(2n+1)}\times\\&\times\sqrt{k(k+1)(2k+1)j(j+1)(2j+1)}\times\\&\times\sum_{m=\max(|i-n|,|k-j|)}^{\min(i+n,k+j)}\frac{1}{2m+1}C_{i0,n0}^{m0}C_{i(-1),n1}^{m0}\times\\&\times C_{k0,j0}^{m0}C_{k(-1),j1}^{m0}.\end{aligned}$$

Как видно, они также даются явными формулами, использующими коэффициенты Клебша–Гордана.

Для упрощения последующих выкладок мы ввели в (62), (63) коэффициенты χ и Π, записываемые как

$$\chi^{(1)}_{n,i,j} = (n+2)\Lambda^{(3)}_{nij},$$

$$\chi^{(2)}_{n,i,jk} = \frac{n+2}{2}\left[(n+1)\Lambda^{(4)}_{nijk} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2\pi}(\delta_{in}\delta_{jk} + 2\delta_{ij}\delta_{kn})\right],$$

$$\Pi^{(1)}_{nk,j} = nk\Lambda^{(3)}_{nkj} + \Lambda^{(-3)}_{nk,j},$$

$$\Pi^{(2)}_{nk,ij} = \frac{n+k}{2}\left(nk\Lambda^{(4)}_{nkij} + \Lambda^{(-4)}_{nk,ij}\right) -$$
$$-\frac{(n+k+1)n\delta_{nk}\delta_{ij}}{4\pi}.$$

Основываясь на выражениях (62) и (63), кинематические модальные уравнения (60) можно рассматривать как линейные алгебраические уравнения относительно обобщенных координат F_k, причем равенство должно выполняться с точностью до их кубов. Тогда решение системы кинематических уравнений примет вид

$$F_l = \frac{\dot\beta_l}{l} + \sum_{i,j=1}^{\infty} V^{(2)}_{l,i,j}\dot\beta_i\beta_j + \sum_{i,j,k=1}^{\infty} V^{(3)}_{l,i,j,k}\dot\beta_i\beta_j\beta_k, \qquad (65)$$
$$l \geq 1,$$

с заранее неизвестными коэффициентами $V^{(2)}_{l,i,j}$ и $V^{(3)}_{l,i,j,k}$. Подставляя соотношения (65) в формулу (60) и собирая подобные полиномиальные члены в терминах обобщенных координат, приходим к следующим выражениям для подсчета $V^{(2)}_{l,i,j}$ и $V^{(3)}_{l,i,j,k}$:

$$V^{(2)}_{n,i,j} = \frac{1}{n}\left(\chi^{(1)}_{n,i,j} - \Pi^{(1)}_{ni,j}/i\right),$$

$$V^{(3)}_{n,i,j,k} = \frac{1}{n}\left(\chi^{(2)}_{n,i,j,k} - \Pi^{(2)}_{ni,jk}/i - \sum_{l=1}^{\infty} V^{(2)}_{l,i,j}\Pi^{(1)}_{nl,k}\right).$$

Таким образом, результатом асимптотического модального анализа кинематических уравнений будет выражение (65), которое дает явную зависимость обобщенных координат F_k через β_i и ее первую производную. Подчеркнем, что эта зависимость понимается в асимптотическом смысле, сохраняющем лишь члены до третьего порядка малости в смысле обобщенных координат.

6.3. Динамические модальные уравнения

Для осесимметричных колебаний динамические модальные уравнения упрощаются и принимают вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial A_n}{\partial\beta_\mu}\dot F_n + \frac{1}{2}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{\partial A_{n,k}}{\partial\beta_\mu}F_nF_k + \frac{\partial \mathrm{TS}}{\partial\beta_\mu} = 0, \qquad (66)$$
$$\mu \geq 1.$$

Формулы (65) дают нам с точностью до $O(\epsilon)$ выражения для обобщенных координат F_k через обобщенные координаты β_l. Они же позволяют вычислить с необходимой асимптотической точностью $\dot F_l$:

$$\dot F_l = \frac{\ddot\beta_l}{l} + \sum_{i,j=1}^{\infty} V^{(2)}_{l,i,j}\ddot\beta_i\beta_j + \sum_{i,j,k=1}^{\infty} V^{(3)}_{l,i,j,k}\ddot\beta_i\beta_j\beta_k +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{\infty} V^{(2)}_{l,i,j}\dot\beta_i\dot\beta_j + \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \bar V^{(3)}_{l,i,j,k}\dot\beta_i\dot\beta_j\beta_k, \qquad (67)$$

$$\bar V^{(3)}_{l,i,j,k} = V^{(3)}_{l,i,j,k} + V^{(3)}_{l,i,k,j}, \quad l \geq 1.$$

Далее, необходимо знать с точностью до $O(\epsilon^{2/3})$ значение $\partial A_n/\partial\beta_\mu$, которое дается формулой (62). Продифференцировав по β_μ формулу (63), подсчитаем выражение для $\partial A_{n,k}/\partial\beta_\mu$ до линейных членов включительно:

$$\frac{\partial A_{n,k}}{\partial\beta_\mu} = \Pi^{(1)}_{nk,\mu} + 2\sum_{i=1}^{\infty}\Pi^{(2)}_{nk,i\mu}\beta_i. \qquad (68)$$

Выведем с точностью до $O(\epsilon)$ аналитические выражения для $\partial \mathrm{TS}/\partial\beta_\mu$. С учетом соотношений (14), разложив первое уравнение формулы (49) в ряд Тейлора по $\xi = \zeta - 1$ и обобщенным координатам β_i до членов порядка $O(\epsilon)$ и применив дифференцирование по частям, придем к следующему выражению:

$$\frac{\partial \mathrm{TS}}{\partial\beta_\mu} = 2\pi\int_0^\pi \zeta^2\sin\theta\Bigg(\frac{2+(\zeta_\theta/\zeta)^2}{\sqrt{\zeta^2\zeta_\theta^2}} - \\ -\frac{1}{\zeta^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\zeta\zeta_\theta\,\sin\theta}{\sqrt{\zeta^2\zeta_\theta^2}}\right)\Bigg)\times \\ \times\left[f_\mu - \frac{1}{2\pi}\beta_\mu - \frac{1}{4\pi}\sum_{i,j=1}^\infty \Lambda_{ij\mu}\beta_i\beta_j\right]d\theta = \\ = 2\pi\int_0^\pi (2+2\xi)\times \\ \times\left[f_\mu - \frac{1}{2\pi}\beta_\mu - \frac{1}{4\pi}\sum_{i,j=1}^\infty \Lambda_{ij\mu}\beta_i\beta_j\right]\sin\theta d\theta + \\ +2\pi\int_0^\pi\left[\xi_\theta - \frac{1}{2}\xi_\theta^3\right]\frac{\partial f_\mu}{\partial\theta}\sin\theta d\theta. \qquad (69)$$

Подставив сюда модальное представление из формулы (57) и сохраняя слагаемые до порядка $O(\epsilon)$, получим из соотношения (69):

$$\frac{\partial \mathrm{TS}}{\partial\beta_\mu} = (\mu+2)(\mu-1)\beta_\mu + \\ +\sum_{i,j=1}^\infty T_{ij}^{(2\mu)}\beta_i\beta_j + \sum_{i,j,k=1}^\infty T_{i,j,k}^{(3\mu)}\beta_i\beta_j\beta_k, \qquad (70)$$

где

$$T_{ij}^{(2\mu)} = -2\Lambda_{ij\mu}^{(3)},$$

$$T_{i,j,k}^{(3\mu)} = -\frac{1}{2}\Lambda_{ijk\mu}^{(-4\theta)} + \frac{1}{\pi}\delta_{i\mu}\delta_{jk},$$

$$\Lambda_{ijk\mu}^{(-4\theta)} = 2\pi\int_0^\pi \frac{\partial f_i}{\partial\theta}\frac{\partial f_j}{\partial\theta}\frac{\partial f_k}{\partial\theta}\frac{\partial f_\mu}{\partial\theta}\sin\theta d\theta.$$

Окончательно, подставив соотношения (62), (65), (67), (68) и (70) в уравнение (66) и опустив члены $o(\epsilon)$, придем к следующим асимптотическим нелинейным модальным уравнениям относительно обобщенных координат β_n:

$$\sum_{i=1}^\infty\left[\delta_{\mu i} + \sum_{j=1}^\infty d_{i,j}^{1,\mu}\beta_j + \sum_{j,k=1}^\infty d_{i,j,k}^{2,\mu}\beta_j\beta_k\right]\ddot\beta_i + \\ +\sum_{n,k=1}^\infty\left[t_{n,k}^{0,\mu} + \sum_{m=1}^\infty t_{n,k}^{1,\mu}\beta_m\right]\dot\beta_n\dot\beta_k + \sigma_\mu^2\beta_\mu + \\ +\sum_{i,j=1}^\infty\left[\mu T_{ij}^{2\mu}\right]\beta_i\beta_j + \sum_{i,j,k=1}^\infty\left[\mu T_{i,j,k}^{3\mu}\right]\beta_i\beta_j\beta_k = \\ = 0, \qquad \mu\geq 1, \qquad (71)$$

где $\sigma_\mu = \sigma_{\mu 0} = \sqrt{\mu(\mu-1)(\mu+2)}$ – безразмерные частоты осесимметричных колебаний, определяемые по формуле (32). Значения безразмерных гидродинамических коэффициентов даются следующими выражениями:

$$d_{i,j}^{1,\mu} = \mu\left[\frac{\chi_{i,\mu,j}^{(1)}}{i} + V_{\mu,i,j}^{(2)}\right],$$

$$d_{i,j,k}^{2,\mu} = \mu\left[\frac{\chi_{i,\mu,j,k}^{(2)}}{i} + \sum_{\alpha=1}^\infty \chi_{\alpha,\mu,j}^{(1)}V_{\alpha,i,k}^{(2)} + V_{\mu,i,j,k}^{(3)}\right],$$

$$t_{n,k}^{0,\mu} = \mu\left[V_{\mu,n,k}^{(2)} + \frac{\Pi_{nk,\mu}^{(1)}}{nk}\right],$$

$$t_{n,k,m}^{1,\mu} = \mu\Bigg[\bar V_{\mu,n,k,m}^{(3)} + \frac{\Pi_{nk,\mu m}^{(2)}}{nk} + \\ +\sum_{\alpha=1}^\infty\Bigg(\chi_{\alpha,\mu,m}^{(1)}V_{\alpha,n,k}^{(2)} + \\ +\frac{\Pi_{\alpha k,\mu}^{(1)}V_{\alpha,n,m}^{(2)}}{k} + \frac{\Pi_{\alpha n,\mu}^{(1)}V_{\alpha,k,m}^{(2)}}{n}\Bigg)\Bigg].$$

7. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ВБЛИЗИ ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ

7.1. Асимптотические модальные уравнения конечной размерности

Асимптотические нелинейные модальные уравнения (71) представляют собой бесконечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат β_n, которая не разрешена относительно старшей производной. Чтобы свести эту систему к конечномерному виду, необходимо сделать дополнительные допущения. Одним из них может быть поиск решения для периодических или почти периодических колебаний капли с частотой, близкой к одной из ее линейных собственных частот.

Рассмотрим периодические колебания капли с частотой σ, близкой к первой собственной частоте σ_{20}. Тогда соответствующая ей обобщенная координата будет доминирующей. В соответствии с асимптотикой третьего порядка типа Дюффинга, предположим, что $\beta_2=O(\epsilon^{1/3})$.

Чтобы определить обобщенные координаты второго порядка, исследуем возможность появления в модальных уравнениях (71) квадратичных членов (в терминах доминантной обобщенной координаты β_2). Алгебра гидродинамических коэффициентов нелинейных уравнений (71) такова, что такие квадратичные члены имеются лишь при β_2 и β_4. Заметим, что обобщенная координата β_4 имеет второй порядок (т. е. $\beta_4=O(\epsilon^{2/3})$), в то время как β_2 имеет компоненты и первого (с $O(\epsilon^{1/3})$), и второго порядков. Дальнейший анализ гидродинамических коэффициентов позволяет выделить лишь одну обобщенную координату порядка $O(\epsilon)$ – β_6. Таким образом, предположение о доминантном характере основного тона и выполнении асимптотики типа Дюффинга приводит к соотношениям

$$\beta_2 = O(\epsilon^{1/3}), \quad \beta_4 = O(\epsilon^{2/3}), \quad \beta_6 = O(\epsilon), \qquad \beta_l = o(\epsilon), \quad l \neq 2,4,6. \tag{72}$$

Следовательно, искомые нелинейные асимптотические модальные уравнения связывают лишь три обобщенные координаты, в то время, как остальные описываются в рамках линейной теории. Указанные нелинейные модальные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}
\ddot\beta_2 + \sigma_2^2\beta_2 + d_1\ddot\beta_2\beta_4 + d_2\ddot\beta_4\beta_2 + d_3\dot\beta_2\dot\beta_4 + \\
+d_4\ddot\beta_2\beta_2^2 + d_5\dot\beta_2^2\beta_2 + t_1\beta_2^2 + t_2\beta_2\beta_4 + \\
+t_3\beta_2^3 + c_1\ddot\beta_2\beta_2 + c_2\dot\beta_2^2 = 0, \\
\ddot\beta_4 + \sigma_4^2\beta_4 + d_6\ddot\beta_2\beta_2 + d_7\dot\beta_2^2 + t_4\beta_2^2 + \\
+t_5\beta_2\beta_4 + c_3\ddot\beta_4\beta_2 + c_4\dot\beta_4\dot\beta_2 = 0, \\
\ddot\beta_6 + \sigma_6^2\beta_6 + d_8\ddot\beta_2\beta_4 + d_9\ddot\beta_4\beta_2 + d_{10}\dot\beta_4\dot\beta_2 + \\
+d_{11}\ddot\beta_2\beta_2^2 + d_{12}\dot\beta_2^2\beta_2 + t_6\beta_2\beta_4 + t_7\beta_2^3 = 0,
\end{gathered} \tag{73}$$

где

$$d_1 = \frac{24}{4\sqrt{\pi}}; \qquad d_2 = \frac{15}{14\sqrt{\pi}}; \qquad d_3 = \frac{75}{14\sqrt{\pi}};$$

$$d_4 = -\frac{67}{98\pi}; \qquad d_5 = -\frac{585}{196\pi}; \qquad d_6 = \frac{15}{7\sqrt{\pi}};$$

$$d_7 = -\frac{9}{7\sqrt{\pi}}; \qquad d_8 = \frac{105\sqrt{65}}{286\sqrt{\pi}}; \qquad d_9 = \frac{30\sqrt{65}}{143\sqrt{\pi}};$$

$$d_{10} = -\frac{75\sqrt{65}}{143\sqrt{\pi}}; \quad d_{11} = \frac{135\sqrt{65}}{1001\pi}; \quad d_{12} = \frac{135\sqrt{65}}{2002\pi};$$

$$t_1 = -\frac{4\sqrt{5}}{7\sqrt{\pi}}; \quad t_2 = -\frac{24}{7\sqrt{\pi}}; \qquad t_3 = -\frac{76}{7\pi};$$

$$t_4 = -\frac{24}{7\sqrt{\pi}}; \quad t_5 = -\frac{160\sqrt{5}}{77\sqrt{\pi}}; \quad t_6 = -\frac{180\sqrt{65}}{143\sqrt{\pi}};$$

$$t_7 = \tfrac{540\sqrt{65}}{143\pi};$$

$$c_1 = \frac{9\sqrt{5}}{14\sqrt{\pi}}; \qquad c_2 = \frac{4\sqrt{5}}{7\sqrt{\pi}};$$

$$c_3 = \frac{75\sqrt{5}}{154\sqrt{\pi}}; \quad c_4 = \frac{185\sqrt{5}}{154\sqrt{\pi}}.$$

По сравнению с модальными уравнениями, возникающими в задаче о плескании жидкости в сосудах, система уравнений (73) содержит принципиально новые члены, связанные с коэффициентами t_i и c_i. Первый набор коэффициентов t_i порождается квадратичной компонентой, связанной с поверхностным натяжением. Коэффициенты c_i связаны с нелинейной алгеброй полиномов Лежандра, которая отличается от тригонометрической, возникающей при анализе слабонелинейных поверхностных волн и плескания жидкости в прямоугольных и осесимметричных вертикальных сосудах.

7.2. **“Собственные нелинейные” колебания**

Построим нетривиальное периодическое решение системы (73) в рамках асимптотической процедуры редукции Ляпунова – Шмидта [23, 24], предполагающей выполненным асимптотическое соотношение типа (72), а также условие близости σ к линейной собственной частоте σ_2:

$$\frac{\sigma - \sigma_2}{\sigma_2} = O(\epsilon^{2/3}), \tag{74}$$

где σ – искомая собственная частота нелинейных свободных колебаний.

Соотношение (72) и модальная система уравнений (73) приводят к асимптотическому периодическому решению вида

$$\begin{aligned} \beta_2 &= A\cos(\sigma t)+A^2(E_1+E_2\cos(2\sigma t))+O(A^3),\\ \beta_4 &= A^2(E_3+E_4\cos(2\sigma t))+O(A^3), \\ \beta_6 &= O(A^3), \qquad A=O(\epsilon^{1/3}), \end{aligned} \tag{75}$$

где доминантная амплитуда A подлежит определению.

Подставляя соотношения (75) в первые два уравнения (73), учитывая (74) и собирая члены порядка A^2, находим:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{-t_1+(c_1-c_2)\sigma^2}{2\sigma_2^2} = \\ &= \frac{-t_1+(c_1-c_2)\sigma_2^2}{2\sigma_2^2}+O(A^2),\\ E_2 &= \frac{-t_1+(c_1+c_2)\sigma^2}{2(\sigma_2^2-4\sigma^2)} = \\ &= \frac{t_1-(c_1+c_2)\sigma_2^2}{6\sigma_2^2}+O(A^2),\\ E_3 &= \frac{-t_4+(d_6-d_7)\sigma^2}{2\sigma_4^2} = \\ &= \frac{-t_4+(d_6-d_7)\sigma_2^2}{2\sigma_4^2}+O(A^2),\\ E_4 &= \frac{-t_4+(d_6+d_7)\sigma^2}{2(\sigma_4^2-4\sigma_2^2)} = \\ &= \frac{-t_4+(d_6+d_7)\sigma_2^2}{2(\sigma_4^2-4\sigma_2^2)}+O(A^2). \end{aligned} \tag{76}$$

Далее, собирая члены при A^3 в первом уравнении (73) с использованием условия (74) для частоты σ и сохраняя лишь члены $O(1)$ в выражениях (76), получаем "секулярное уравнение" для определения доминантной амплитуды A:

$$A\left(\frac{\sigma-\sigma_2}{\sigma_2}-m_1^{(0)}A^2\right)=0, \tag{77}$$

где

$$m_1^{(0)} = -\frac{6347}{7840\pi}.$$

Ненулевое асимптотическое решение в окрестности основной частоты задается входящим в (77) квадратичным выражением:

$$\frac{\sigma-\sigma_2}{\sigma_2} = m_1^{(0)}A^2 \tag{78}$$

и приводит к зависимости между безразмерной частотой $(\sigma-\sigma_2)/\sigma_2=O(\epsilon^{2/3})$ и квадратом безразмерной амплитуды $A^2=O(\epsilon^{2/3})$. Поскольку величина $m_1^{(0)}$ отрицательна, то уравнение (78) указывает на так называемую "мягкую" нелинейность, когда амплитуда A растет с уменьшением нелинейной собственной частоты σ.

7.3. Сравнение с экспериментом и результатами других авторов

Сравним наш асимптотический результат с экспериментальными данными из работы [25] (см. также [9]). В ней описаны эксперименты, проведенные для капли из смеси силиконового масла и тетрахлорметана, находящейся в подвешенном (невесомом) состоянии в дистиллированной воде. Получена зависимость между $(\sigma-\sigma_2)/\sigma_2$ и максимальным отношением длины (или высоты) капли к ее ширине, обозначенным H/W (см. рис. 2). Замеры для капли радиусом $R_0=0.49$ см обозначены темным кружком, для капли радиусом $R_0=0.62$ см – светлым.

Как видно из графика, для капель разных размеров экспериментальные результаты различны. В то же время, модель идеальной несжимаемой жидкости дает независимые от радиуса безразмерные частотные и амплитудные величины. В рамках этого подхода поверхностное натяжение и радиус влияют на абсолютные значения этих величин, но не на их отношение. В первом приближении, используя свойства полиномов Лежандра, мы получаем с точностью до членов более высокого порядка:

$$H/W = \frac{1+\sqrt{5/(4\pi)}A}{1-\frac{1}{2}\sqrt{5/(4\pi)}A}, \tag{79}$$

где A – задается уравнением (78).

Рис. 2 показывает, что наше асимптотическое приближение амплитудно-частотной характеристики (формула (79), сплошная кривая) хорошо согласуется с расчетными величинами из работ [9] (штриховая кривая), [17] (△) и [18] (▲). Эти теоретические данные также вполне удовлетворительно коррелируют с экспериментальными величинами для капли больших размеров. С уменьшения размера капли нарастает количественное (но не качественное) рассогласование. В работе [9] высказано предположение, что это может быть связано с влиянием различных диссипативных факторов.

Можно грубо оценить влияние объемной вязкости жидкости, используя результат статьи [7], в которой с использованием частных решений На-

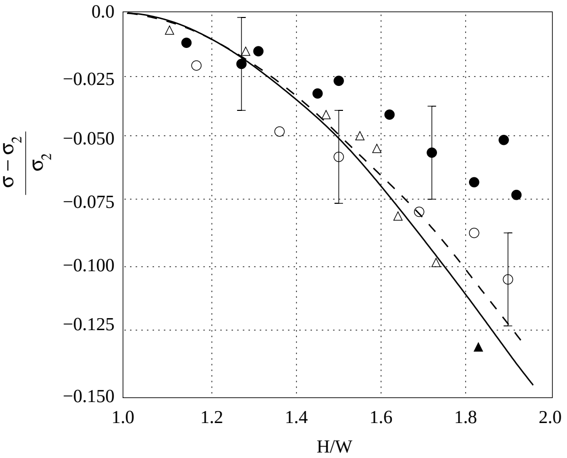

Рис. 2. Зависимость между отклонением частоты колебаний капли от линейного значения σ_2 и максимальным отношением ее длины и ширины при осесимметричных колебаниях

вье–Стокса, полученных в [26], найдены аналитические выражения для осесимметричных форм и соответствующих частот и логарифмических декрементов затухания для вязкой жидкой капли. В предельном случае больших значений параметра $\sigma_l(R_0^2/\nu)$ (ν – кинематическая вязкость жидкости), собственные формы колебаний капли совпадают с собственными формами (24), (25), а сами колебания происходят по закону

$$\exp(-\delta_l \pm i\sqrt{\sigma_{l0}^2 - \delta_l^2}), \qquad i^2 = -1,$$

где

$$\delta_l = \frac{(2l+1)(l-1)\nu}{R_0^2},$$

т. е. логарифмический декремент малых собственных осесимметричных колебаний вязкой жидкости вычисляется по формуле

$$\alpha_l = \frac{\nu}{R_0}\sqrt{\frac{\rho R_0}{T_s}}\sqrt{\frac{(l-1)(2l+1)^2}{l(l+1)}}. \qquad (80)$$

Исходя из формулы (80), можно предположить, что незначительное изменение радиуса капли мало влияет на результаты рис. 2. В работах [8, 25] даны экспериментальная величина кинематической вязкости капли (здесь 3.2 сСт) и соответствующий коэффициент поверхностного натяжения (37 дин/см), дающие $\alpha_2=0.048$ (для меньшей капли) и 0.038 (для большей капли). Отношение этих величин равно 0.89, а значит, добавление в модальные уравнения (73) соответствующих диссипативных членов $2\alpha_l\sigma_l\dot{\beta}_l$, $l=2,4,6$ практически не влияет на результаты расчетов на промежутках времени, соизмеримых с несколькими периодами собственных колебаний.

ВЫВОДЫ

С использованием нелинейного модального метода, который был ранее развит для задачи о колебании жидкости в баках, выведены наиболее общие нелинейные модальные уравнения в форме Луковского–Майлса, описывающие немалые колебания левитирующей капли в невесомости. Для их вывода, а также вывода дифференциальных уравнений и соответствующих краевых условий задачи использовался вариационный принцип Бейтмена–Люка. Полученные нелинейные модальные уравнения связывают обобщенные координаты, ассоциирующиеся с возмущением собственных форм колебания капли.

К особенностями задачи следует отнести нелинейное условие сохранения объема, возникающее как дополнительная геометрическая связь между обобщенными координатами, а также необходимость включения в нелинейный модальный анализ не только собственных форм колебания капли, но и четырех собственных функций (объемных сферических функций). Последние, вообще говоря, не являются собственными формами колебания капли в линейном приближении и их возбуждение связано с нелинейностью задачи.

При выводе нелинейной краевой задачи использовался вариационный принцип Бейтмена–Люка с дополнительным членом, перед которым стоит множитель Лагранжа. Наличие указанного члена связывается с геометрическим ограничением на допустимые конфигурации свободной поверхности – условием сохранения объема. Однако при выводе общих нелинейных модальных уравнений, которые базируются на объемных сферических функциях, с использованием теоремы о неявной функции удается разрешить условие сохранения объема относительно одной из обобщенных координат и, тем самым, исключить из рассмотрения дополнительный член в функционале действия.

Особое внимание уделено задаче описания нелинейных осесимметричных колебаниях капли, для которой имеются экспериментальные результаты, а также численные результаты других авторов. Для этого случая построена нелинейная асимптотическая система модальных уравнений, связывающая бесконечное число обобщенных координат. Эти уравнения содержат полиномиальные (до третьего порядка) соотношения между обобщенными координатами. В частном случае нелинейных собственных колебаний капли с частотой, близкой к первой собственной частоте, построена конечномерная система из трех модальных уравнений. При ее выводе использовались асимптотические соотношения типа Дюффинга. Асимптотическое периодическое решение этой системы (нелинейные собственные колебания) описывает амплитудно-частотные характеристики, которые хорошо согласуются с расчетными результатами других авторов и с экспериментальными замерами [25] для капли большего радиуса.

1. *Brandt E. H.* Suspended by sound // Nature.– 2001.– **413**.– P. 474–475.
2. *Eberhardt R., Neidhart B.* Acoustic levitation device for sample pretreatment in microanalysis and trace analysis // Fresenius J. Anal. Chemie.– 1999.– **365**.– P. 475–479.
3. *Priego-Capote F., de Castro L.* Ultrasound-assisted levitation: Lab-on-a-drop // Trends Analyt. Chem.– 2006.– **25**.– P. 856–867.
4. *Natarajan R., Brown R. A.* Third-order effects and the nonlinear stability of drop oscillations // J. Fluid Mech.– 1987.– **183**.– P. 95–121.
5. *Prosperetti A.* Free oscillations of drops and bubbles: The initial-value problem // J. Fluid Mech.– 1980.– **100**.– P. 333–347.
6. *Becker E., Hiller W. J., Kowalewski T. A.* Experimental and theoretical investigation of large-amplitude oscillations of liquid droplets // J. Fluid Mech.– 1991.– **231**.– P. 189–210.
7. *Becker E., Hiller W.J., Kowalewski T.A.* Nonlinear dynamics of viscous droplets // J. Fluid Mech.– 1994.– **258**.– P. 191–216.
8. *Trinh E., Wang T. G.* Large-amplitude free and driven drop-shape oscillations: Experimental observations // J. Fluid Mech.– 1982.– **122**.– P. 315–338.
9. *Tsamopoulos J. A., Brown R. A.* Nonlinear oscillations of inviscid drops and bubbles // J. Fluid Mech.– 1983.– **127**.– P. 519–537.
10. *Basaran O. A.* Nonlinear oscillations of viscous liquid drops // J. Fluid Mech.– 1992.– **241**.– P. 169–198.
11. *Liu Y., Zhu Da-M., Strayer D. M., Israelsson U. E.* Magnetic levitation of large water droplets and mice // Adv. Space Res.– 2010.– **45**.– P. 208–213.
12. *Shen C. L., Xie W. J., Wei B.* Parametrically excited sectorial oscillation of liquid drops floating in ultrasound // Phys. Rev. E.– 2010.– **81**Art. 046305.
13. *Lord Rayleigh* On the capillary phenomena of jets // Proc. Roy. Soc. Lond.– 1879.– **29**.– P. 71–97.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика.– М.: Наука, 1986.– 736 p.
15. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику тел с полостями, частично заполненными жидкостью.– К.: Наук. думка, 1990.– 296 с.
16. *Faltinsen O. M., Timokha A. N.* Sloshing.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009.– 608 p.
17. *Foote G. B.* A numerical method for studying simple drop behavior: simple oscillation // J. Comput. Phys..– 1973.– **11**.– P. 507–530.
18. *Alonso C. T.* The dynamics of colliding and oscillating drops // Proc. Int. Colloq. on Drops and Bubbles.– Pasadena, CA: Jet Propuls. Lab, 1974.– P. 139.
19. *Beyer K., Guenther M., Gawrilyuk I., Lukovsky I., Timokha A.* Compressible potential flows with free boundaries. Part I: Vibrocapillary equilibria // ZAMM.– 2001.– **81**.– P. 261–271.
20. *Myshkis A. D., Babskii V. G., Kopachevskii N. D., Slobozhanin L. A., Tiuptsov A. D.* Low-gravity fluid mechanics: Mathematical theory of capilary phenomena.– Berlin/New York: Springer Verlag, 1987.– 356 p.
21. *Жаров Ф. Н., Григорьев Ф. И., Ширяева С. О.* О некоторых свойствах разложения по производным от полиномов Лежандра, появляющихся при исследовании нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости // ЖТФ.– 2005.– **75**.– С. 131–140.
22. *Юцис Ф. П., Бандзайтис Ф. Ф.* Теория момента количества движения в квантовой механике.– Вильнюс: Институт физики и математики, 1965.– 96 с.
23. *Hermann M., Timokha A.* Modal modelling of the nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank. I: A single-dominant model // Math. Model. Meth. Appl. Sci.– 2005.– **15**.– P. 1431–1458.
24. *Hermann M., Timokha A.* Modal modelling of the nonlinear resonant fluid sloshing in a rectangular tank. II: Secondary resonance // Math. Model. Meth. Appl. Sci.– 2008.– **18**.– P. 1845–1867.
25. *Trinh E., Wang T. G.* Large amplitude drop shape oscillations // Proc. 2nd Int. Colloq. on Drops and Bubbles.– Pasadena: JPL Publ, 1982.– P. 82–87.
26. *Brosa U.* Linear analysis of the current in a pipe // Z. Naturforschung.– 1986.– **41a**.– P. 1141–1153.