

УДК 539.3

## ДИФРАКЦІЯ НОРМАЛЬНИХ SH-ХВИЛЬ У ХВИЛЕВОДІ З РОЗРІЗОМ

М. Я. СЕМКІВ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Одержано 20.06.2011

Розглянуто поширення нормальних SH-хвиль у пружному хвилеводі з півнескінченною тріщиною й вільними від напружень стінками. Проведено повний аналіз дифракції пружних хвиль на півнескінченному розрізі. Для розв'язання задачі використовувалася метод часткових областей, який призводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь для невідомих амплітуд. Цю систему було розв'язано методом лишків аналітичної функції. Отримано точний розв'язок задачі. Обчислені енергетичні коефіцієнти відбиття й проникнення нормальних SH-хвиль на розрізі хвилеводу. Всі результати отримані для різних довжин падаючої хвилі. Побудовано графіки залежності коефіцієнтів відбиття й проникнення від частоти. Оцінено нев'язку при заміні нескінченних добуток у виразах для амплітуд скінченними.

Рассмотрено распространение нормальных SH-волн в упругом волноводе с полубесконечным разрезом и свободными от напряжений стенками. Проведен полный анализ дифракции упругих волн на полубесконечном разрезе. Для решения задачи использовался метод частичных областей, приводящий к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд. Эта система была решена методом вычетов аналитической функции. Получено точное решение задачи. Вычислены энергетические коэффициенты отражения и прохождения нормальной SH-волны на разрезе волновода. Все результаты получены для разных длин падающей волны. Построены графики зависимости коэффициентов отражения и прохождения от частоты. Проведена оценка невязки при замене бесконечных произведений в выражениях для амплитуд конечными.

The paper deals with propagation of SH-waves in an elastic waveguide with a semi-infinite crack and free boundaries. A complete analysis of elastic wave diffraction on the semi-infinite crack is performed. The problem is solved by the method of partial domains that yields the infinite system of algebraic equations for unknown amplitudes. This system is solved by the method of residues of analytical function. The exact solution of the problem is obtained. The reflection and transmission coefficients are calculated for the normal SH-wave traveling through the crack of waveguide. All results are obtained for different lengths of the incident wave. The dependencies of the reflection and transmission coefficients versus the dimensionless frequency are plotted. The discrepancy occurring due to substitution of the infinite products in the amplitudes by finite ones is estimated.

### ВСТУП

Строгі аналітичні методи розв'язку крайових задач посідають особливе місце у математичній фізиці. Хоча вони й придатні для відносно вузького класу задач, отримані з їхньою допомогою розв'язки являють собою велику цінність, оскільки можуть служити надійною платформою для розвитку чисельних чи наближених методів розрахунку.

Серед аналітичних методів розв'язку крайових задач теорії хвилеводів широко поширений метод часткових областей. Він дозволяє отримати розв'язок задачі для області, що складається з простих (канонічних) підобластей, для кожної з яких можна отримати розв'язок методом розділення змінних. Це дає змогу представити поля у кожній з підобластей у вигляді розкладу по її власних функціях, які є взаємно ортогональними.

У процесі побудови розв'язку крайової задачі, використовуючи вирази для звукових полів у часткових областях, записуються умови їх спряження на межах підобластей. Це призводить до запису відповідної функціональної системи рів-

нянь. Властивість ортогональності використовуваних власних функцій дозволяє провести алгебраїзацію функціональної системи й отримати при цьому нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для невідомих амплітуд  $\{A_n\}$  нормальних хвиль хвилеводу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} A_n = b_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

У зв'язку зі зрозумілими труднощами, звичай обмежуються отриманням наближеного розв'язку нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1). Проте існує цілий клас крайових задач, для яких можна отримати точний розв'язок нескінченних алгебраїчних систем. Саме такі задачі будуть розглянуті у даній роботі.

Завдяки численным дослідженням, проведеним у минулому сторіччі, питання вивчення властивостей хвильових полів у ізотропному шарі вичерпане практично повністю. Розгляд таких задач можна знайти, наприклад, у монографіях [1–3]. У [2] за допомогою методу часткових областей наведені задачі поширення звуку в нерегулярних хвилеводах (з вигином, з розгалуженням). У пра-

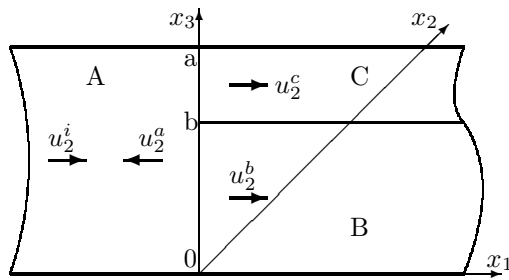


Рис. 1. Геометрія задачі

пях [4, 7–9] досліджено ряд аналітичних методів, які виявились дуже ефективними для розв’язування широкого класу крайових задач для відкритих і замкнутих хвилеводних областей.

У даній роботі побудовано точні розв’язки для задачі поширення нормальних SH-хвиль у пружному хвилеводі з півнескінченим розрізом. При цьому використовувався метод часткових областей, який призвів до появи нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Отриману систему розв’язано методом лишків, суть якого буде викладена нижче.

### 1. ДИФРАКЦІЯ НОРМАЛЬНИХ SH-ХВИЛЬ НА ПІВНЕСКІНЧЕННОМУ РОЗРІЗІ У ХВИЛЕВОДІ З ВІЛЬНИМИ ВІД НАПРУЖЕНЬ СТІНКАМИ

У цьому розділі розглянуто дифракцію гармонічної з частотою  $\omega$  нормальної SH-хвилі на півнескінченному розрізі у хвилеводі з вільними від напружень стінками. Побудовано точний розв’язок задачі. Отримано формули для енергетичних коефіцієнтів відбиття і проникнення падаючої хвилі.

#### 1.1. Постановка задачі. Виведення нескінченної системи рівнянь

Розглядається однорідний пружний хвилевід  $x_1 \in R, x_3 \in [0, a]$  з півнескінченим розрізом  $x_1 \geq 0, x_3 = b$ . Його стінки, а також береги розрізу, вважаємо вільними від напружень. Середовище хвилеводу характеризується густиною  $\rho$  і швидкістю поперечної хвилі  $c_t$ .

Нехай в області  $A$  поширюється нормальна SH-хвиля (рис. 1), яка викликає зміщення уздовж осі  $Ox_2$  й задається у вигляді

$$u_2^i = \cos \frac{q\pi x_3}{a} e^{-\gamma_{qa} x_1}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

де  $q$  – номер нормальної хвилі. Стала поширення

задається виразом

$$\gamma_{qa} = \begin{cases} +\sqrt{(q\pi/a)^2 - k_t^2}, & (q\pi/a)^2 > k_t^2, \\ -i\sqrt{k_t^2 - (q\pi/a)^2}, & (q\pi/a)^2 < k_t^2, \end{cases}$$

де  $k_t = \omega/c_t$ . Тут і надалі часовий множник  $\exp\{-i\omega t\}$  не пишемо. Переміщення в областях  $A, B, C$  дифрагованого поля позначимо через  $u_2^i, u_2^a$  й  $u_2^c$  відповідно.

Переміщення  $u_2^i, u_2^a$  (в області  $A$ ) й  $u_2^b, u_2^c$  (в областях  $B$  і  $C$ ) задовольняють рівняння Гельмгольца:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k_t^2 \right] u_2^s = 0, \quad s = i, a, b, c \quad (3)$$

та граничну умову на вільних межах хвилеводу і розрізу, а саме  $\sigma_{32} = \mu \partial u_2 / \partial x_3 = 0$  ( $u_2$  відповідає зміщенню в кожній з підобластей;  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона):

- a)  $\frac{\partial(u_2^i + u_2^a)}{\partial x_3} = 0, \quad x_3 = \{0, a\}, \quad x_1 < 0;$
- b)  $\frac{\partial u_2^b}{\partial x_3} = 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_3 = \{0, b\};$
- c)  $\frac{\partial u_2^c}{\partial x_3} = 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_3 = \{b, a\}.$

Умови спряження на межі поділу підобластей  $x_1 = 0, x_3 = [0, a]$ , які встановлюють рівність зміщень і напружень  $\sigma_{12} = \mu \partial u_2 / \partial x_1$  на зазначеній межі у суміжних областях мають вигляд

- d)  $u_2^i + u_2^a = u_2^b, \quad x_1 = 0, \quad x_3 = [0, b];$
- e)  $\frac{\partial(u_2^i + u_2^a)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2^b}{\partial x_1}, \quad x_1 = 0, \quad x_3 = [0, b];$
- f)  $u_2^i + u_2^a = u_2^c, \quad x_1 = 0, \quad x_3 = [b, a];$
- g)  $\frac{\partial(u_2^i + u_2^a)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2^c}{\partial x_1}, \quad x_1 = 0, \quad x_3 = [b, a].$

Додатково переміщення й напруження у падаючій і дифрагованих хвилях задовольняють умову на гострому ребрі, тобто  $u \sim r^{1/2}; \partial u / \partial x_1$  і  $\partial u / \partial x_3 \sim r^{-1/2}$  при  $x_1 = 0, x_3 = b$ .

Запишемо поля відбитої хвилі  $u_2^a$  й прониклих у підобласті  $B, C$  хвиль  $u_2^b, u_2^c$  у вигляді суперпозиції

нормальних SH-хвиль відповідних підобластей: де

$$\begin{aligned} u_2^a &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x_3}{a} e^{\gamma_{na} x_1}, \\ u_2^b &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi x_3}{b} e^{-\gamma_{nb} x_1}, \\ u_2^c &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi(x_3 - b)}{c} e^{-\gamma_{nc} x_1}, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\gamma_{ns} = \begin{cases} +\sqrt{(n\pi/s)^2 - k_t^2}, & (n\pi/s)^2 > k_t^2, \\ -i\sqrt{k_t^2 - (n\pi/s)^2}, & (n\pi/s)^2 < k_t^2, \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad s = a, b, c.$$

Таке представлення полів задовольняє граничні умови а–с.

Умови зшивання d–g призводять до системи функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} \cos \frac{q\pi x_3}{a} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x_3}{a} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi x_3}{b}, \\ \gamma_{qa} \cos \frac{q\pi x_3}{a} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \gamma_{na} \cos \frac{n\pi x_3}{a} &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \gamma_{nb} \cos \frac{n\pi x_3}{b} \end{aligned} \quad (5)$$

при  $x_3 \in [0, b]$  і

$$\begin{aligned} \cos \frac{q\pi x_3}{a} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x_3}{a} &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi(x_3 - b)}{c}, \\ \gamma_{qa} \cos \frac{q\pi x_3}{a} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \gamma_{na} \cos \frac{n\pi x_3}{a} &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \gamma_{nc} \cos \frac{n\pi(x_3 - b)}{c} \end{aligned} \quad (6)$$

при  $x_3 \in [b, a]$ .

Використавши властивість ортогональності функцій, що входять в (5) і (6), після певних математичних перетворень отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} -\frac{2ab}{\pi} i k_t A_0 \delta_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mb}} &= \frac{A'}{\gamma_{qa} + \gamma_{mb}}, \\ \frac{2ac}{\pi} i k_t A_0 \delta_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mc}} &= \frac{A'}{\gamma_{qa} + \gamma_{mc}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$A' = q \sin \frac{q\pi b}{a}, \quad A'_n = A_n n \sin \frac{n\pi b}{a}, \quad (8)$$

$$q = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Відзначимо, що перше рівняння системи (7) отримане з функціональної системи (5), а друге – з системи (6). Таким чином, система (7) є парною нескінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь, які потрібно розв'язувати спільно.

Коефіцієнти  $\{B_n\}$  і  $\{C_n\}$  виражаються через коефіцієнти  $\{A_n\}$  наступним чином:

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{(-1)^m \pi}{2a \delta_{mb} \gamma_{mb}} \left( \frac{A'}{\gamma_{qa} - \gamma_{mb}} - \right. \\ &\quad \left. - (\gamma_{ma} - \gamma_{mb}) \frac{ab}{\pi} A_0 \delta_m^0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mb}} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{-\pi}{2a \delta_{mc} \gamma_{mc}} \left( \frac{A'}{\gamma_{qa} - \gamma_{mc}} + \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_{ma} - \gamma_{mc}) \frac{ac}{\pi} A_0 \delta_m^0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mc}} \right), \end{aligned}$$

$$\delta_m^n = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n; \end{cases} \quad \delta_{ms} = \begin{cases} s, & m = 0, \\ s/2, & m > 0, \end{cases}$$

$$s = b, c, \quad q = 1, 2, 3, \dots, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Перш ніж перейти до опису розв'язання отриманої нескінченної системи рівнянь (7), зробимо деякі зауваження. Звернемо увагу на те, що до цього часу ми використовували граничні умови а–g і не застосовували умову на нескінченності. Остання потрібна для забезпечення єдиності розв'язку нескінченної системи рівнянь, оскільки системи (7) і (9) допускають нескінченно багато розв'язків, кожен з яких математично коректний. Проте тільки один із них задовольняє умову на нескінченності, а отже, є істинним розв'язком даної фізичної задачі [4].

## 1.2. Метод лишків для розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Ключовий момент методу лишків полягає у зведенні інтеграла по контуру в комплексній площині від мероморфної функції  $f(w)$  до суми лишків [5]. Властивості функції  $f(w)$  визначаються положенням її нулів та полюсів, вибраних так, щоб ряд лишків співпадав з системою рівнянь, яку ми розв'язуємо. Можна ототожнити невідомі в системі (7) з лишками функції  $f(w)$  і тим самим виділити шуканий розв'язок.

Для розв'язання системи рівнянь (7) розглянемо інтеграли

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(w)}{w - \gamma_{mb}} dw, \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(w)}{w - \gamma_{mc}} dw, \end{aligned} \quad (10)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $C_R$  – коло радіуса  $R$  у комплексній площині змінної  $w$ , яке проходиться в напрямку проти годинникової стрілки. Функція  $f(w)$  задовольняє такі умови:

- 1)  $f(w)$  – аналітична функція змінної  $w$  у всіх точках області  $C_R$ , за винятком полюсів першого порядку  $w = \gamma_{na}$  і  $w = -\gamma_{qa}$ , ( $n, q = 1, 2, \dots$ );
- 2)  $f(w)$  має прості нулі в точках  $w = \gamma_{mb}$  і  $w = \gamma_{mc}$  ( $m = 1, 2, \dots$ );
- 3) лишок функції  $f(w)$  у точці  $w = -\gamma_{qa}$  буде  $\operatorname{res}_{w \rightarrow -\gamma_{qa}} f(w) = A' = q \sin(q\pi b/a)$ ;
- 4) поведінка функції  $f(w)$  на нескінченності має алгебраїчний характер:  $f(w) = O(w^{-1/2})$  при  $|w| \rightarrow \infty$ ;
- 5)  $f(-ik_t) = 0$ .

Спрямуємо радіус  $R$  контура  $C_R$  до нескінченності, так щоб він охоплював собою всі нулі і полюси зазначені у властивостях функції  $f(w)$ . Виражаючи інтеграли (10) у вигляді сум лишків у полюсах функції  $f(w)$  і прирівнюючи результати до нуля, отримуємо:

$$\begin{aligned} & f(-ik_t)\delta_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{na} - \gamma_{mb}} \operatorname{res}_{w \rightarrow \gamma_{na}} f(w) - \\ & - \frac{A'}{\gamma_{qa} + \gamma_{mb}} = 0, \\ & f(-ik_t)\delta_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{na} - \gamma_{mc}} \operatorname{res}_{w \rightarrow \gamma_{na}} f(w) - \\ & - \frac{A'}{\gamma_{qa} + \gamma_{mc}} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут враховано, що згідно з умовою 3  $\operatorname{res}_{w \rightarrow -\gamma_{qa}} f(w) = A'$  і  $\gamma_{0b} = \gamma_{0c} = -ik_t$ .

Порівнявши співвідношення (7) і (11), отримаємо:

$$\begin{aligned} & A_n n \sin \frac{n\pi b}{a} = \operatorname{res}_{w \rightarrow \gamma_{na}} f(w), \\ & -\frac{2ab}{\pi} ik_t A_0 = f(-ik_t) = \frac{2ac}{\pi} ik_t A_0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

З другого рівняння (12) випливає, що  $A_0 = 0$ , тобто амплітуда нульової моди у відбитій хвилі  $u_2^a$  дорівнює нулю.

Сформульовані вище умови 1–5 визначають функцію  $f(w)$  єдиним чином, а саме:

$$\begin{aligned} & f(w) = \frac{q \sin(q\pi b/a)}{\gamma_{qa} + w} \frac{1 + w/ik_t}{1 - \gamma_{qa}/ik_t} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{w + \gamma_{qa}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - w/\gamma_{nb}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nb}} e^{(w + \gamma_{qa})b/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - w/\gamma_{nc}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nc}} e^{(w + \gamma_{qa})c/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{na}}{1 - w/\gamma_{na}} e^{-(w + \gamma_{qa})a/n\pi}, \end{aligned} \quad (13)$$

Виведення функції  $f(w)$  дано у додатку А до статті.

Зі співвідношень (12) знайдемо невідомі амплітуди  $\{A_n\}$ :

$$\begin{aligned} & A_m = -\frac{q \sin(q\pi b/a)}{m \sin(m\pi b/a)} \frac{1 + \gamma_{ma}/ik_t}{1 - \gamma_{qa}/ik_t} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{\gamma_{ma} + \gamma_{qa}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} - \frac{a}{m} \right] \right\} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \gamma_{ma}/\gamma_{nb}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nb}} e^{(\gamma_{ma} + \gamma_{qa})b/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \gamma_{ma}/\gamma_{nc}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nc}} e^{(\gamma_{ma} + \gamma_{qa})c/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \binom{(m)}{n} \frac{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{na}}{1 - \gamma_{ma}/\gamma_{na}} e^{-(\gamma_{ma} + \gamma_{qa})a/n\pi}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$q, m = 1, 2, 3, \dots,$$

де верхній індекс  $\binom{(m)}{n}$  в останньому добутку вказує на те, що в ньому опущений множник при  $n = m$ .

Визначивши амплітуди власних мод для розсіяного поля в області  $A$ , отримуємо розв'язки для

коефіцієнтів  $\{B_n\}$  і  $\{C_n\}$ . Для цього розглянемо інтеграли

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(w)}{w + \gamma_{mb}} dw, \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(w)}{w + \gamma_{mc}} dw, \end{aligned} \quad (15)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

де функція  $f(w)$  визначена формулою (13). Виразивши контурні інтеграли (15) у вигляді сум лисків, отримуємо

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{res}_{w \rightarrow \gamma_{na}} f(w)}{\gamma_{na} + \gamma_{mb}} - \frac{\operatorname{res}_{w \rightarrow -\gamma_{qa}} f(w)}{\gamma_{qa} - \gamma_{mb}} + \\ & \quad + f(-\gamma_{mb}) = 0, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{res}_{w \rightarrow \gamma_{na}} f(w)}{\gamma_{na} + \gamma_{mc}} - \frac{\operatorname{res}_{w \rightarrow -\gamma_{qa}} f(w)}{\gamma_{qa} - \gamma_{mc}} + \\ & \quad + f(-\gamma_{mc}) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Приймаючи до уваги, що

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{w \rightarrow \gamma_{na}} f(w) &= A_n n \sin \frac{n\pi b}{a}, \\ \operatorname{res}_{w \rightarrow -\gamma_{qa}} f(w) &= A', \end{aligned}$$

й порівнюючи (9) з (16), отримуємо шуканий результат:

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{(-1)^m \pi}{2a\delta_{mb}\gamma_{mb}} f(-\gamma_{mb}), \\ C_m &= \frac{-\pi}{2a\delta_{mc}\gamma_{mc}} f(-\gamma_{mc}), \\ m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Явні вирази для коефіцієнтів  $B_m$  і  $C_m$  будуть такими:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\pi}{ab} \frac{q \sin q\pi b/a}{\gamma_{qa}^2 + k_t^2} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{\gamma_{qa} + ik_t}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - ik_t/\gamma_{nb}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nb}} e^{(\gamma_{qa} + ik_t)b/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - ik_t/\gamma_{nc}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nc}} e^{(\gamma_{qa} + ik_t)c/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{na}}{1 - ik_t/\gamma_{na}} e^{-(\gamma_{qa} + ik_t)a/n\pi}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{\pi}{ac} \frac{q \sin q\pi b/a}{\gamma_{qa}^2 + k_t^2} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{\gamma_{qa} + ik_t}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - ik_t/\gamma_{nb}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nb}} e^{(\gamma_{qa} + ik_t)b/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - ik_t/\gamma_{nc}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nc}} e^{(\gamma_{qa} + ik_t)c/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{na}}{1 - ik_t/\gamma_{na}} e^{-(\gamma_{qa} + ik_t)a/n\pi}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{(-1)^m \pi}{ab\gamma_{mb}} \frac{q \sin q\pi b/a}{\gamma_{qa} - \gamma_{mb}} \frac{1 - \gamma_{mb}/ik_t}{1 - \gamma_{qa}/ik_t} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{\gamma_{qa} - \gamma_{mb}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{mb}/\gamma_{nb}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nb}} e^{(\gamma_{qa} - \gamma_{mb})b/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{mb}/\gamma_{nc}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nc}} e^{(\gamma_{qa} - \gamma_{mb})c/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{na}}{1 + \gamma_{mb}/\gamma_{na}} e^{-(\gamma_{qa} - \gamma_{mb})a/n\pi}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{-\pi}{ac\gamma_{mc}} \frac{q \sin q\pi b/a}{\gamma_{qa} - \gamma_{mc}} \frac{1 - \gamma_{mc}/ik_t}{1 - \gamma_{qa}/ik_t} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{\gamma_{qa} - \gamma_{mc}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{mc}/\gamma_{nb}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nb}} e^{(\gamma_{qa} - \gamma_{mc})b/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{mc}/\gamma_{nc}}{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{nc}} e^{(\gamma_{qa} - \gamma_{mc})c/n\pi} \times \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{qa}/\gamma_{na}}{1 + \gamma_{mc}/\gamma_{na}} e^{-(\gamma_{qa} - \gamma_{mc})a/n\pi}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Таким чином, ми отримали вирази для амплітуд дифрагovanого поля в усіх областях хвильоводу. Відзначимо також, що амплітуди дифрагovanого поля мають порядок  $O(n^{-1/2})$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

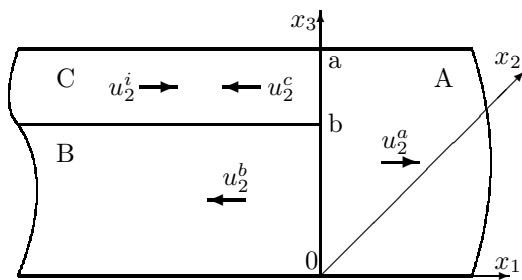


Рис. 2. Геометрія модифікованої задачі

**2. ВИПАДОК ПАДІННЯ SH-ХВИЛІ З БОКУ ПІВНЕСКІНЧЕННОГО РОЗРІЗУ**

Розглянемо модифіковану задачу, змінивши геометрію хвилеводу.

Отже, маємо однорідний пружний хвилевід ( $(x_1 \in R, x_3 \in [0, a])$ ), послаблений півнескінченим розрізом ( $x_1 < 0, x_3 = b$ ), так як показано на рис. 2. В області  $C$  поширюється нормальна SH-хвиля:

$$u_2^i = \cos \frac{q\pi(x_3 - b)}{c} e^{-\gamma_{qc}x_1}, \quad (22)$$

$$q = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\gamma_{qc} = \begin{cases} +\sqrt{(q\pi/c)^2 - k_t^2}, & (q\pi/c)^2 > k_t^2, \\ -i\sqrt{k_t^2 - (q\pi/c)^2}, & (q\pi/c)^2 < k_t^2. \end{cases}$$

Переміщення в областях  $A, B, C$  дифрагованого поля позначимо через  $u_2^a, u_2^b, u_2^c$  відповідно.

Переміщення  $u_2^i, u_2^e$  (в області  $C$ ) і  $u_2^a, u_2^b$  (в областях  $A, B$  відповідно) задовольняють рівняння Гельмгольца (3) й граничні умови:

- стінки хвилеводу й береги тріщини вільні від напружень;
- переміщення у кожній з областей задовольняють умови спряження полів підобластей;
- переміщення падаючого і дифрагованого полів задовольняють умову на ребрі.

Ця задача не приводить викладок, принципово відмінних проведених у першому розділі. Тому обмежимося лише основними моментами при розв'язанні.

Умови спряження приводять до системи функціональних рівнянь

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi x_3}{b} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x_3}{a}, \quad (23)$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} B_n \gamma_{nb} \cos \frac{n\pi x_3}{b} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \gamma_{na} \cos \frac{n\pi x_3}{a}$$

при  $x_3 \in [0, b]$  і

$$\cos \frac{q\pi(x_3 - b)}{c} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi(x_3 - b)}{c} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x_3}{a}, \quad (24)$$

$$\gamma_{qc} \cos \frac{q\pi(x_3 - b)}{c} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \gamma_{nc} \cos \frac{n\pi(x_3 - b)}{c} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \gamma_{na} \cos \frac{n\pi x_3}{a}$$

при  $x_3 \in [b, a]$ .

Ортогональність власних функцій, що входять у (23), (24), дає змогу отримати нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих амплітудних коефіцієнтів:

$$(\gamma_{ma} + \gamma_{mb}) \frac{ab}{\pi} \delta_m^0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mb}} = 0,$$

$$(\gamma_{qc} + \gamma_{mc}) \frac{a\delta_{mc}}{\pi} \delta_m^q - (\gamma_{ma} + \gamma_{mc}) \frac{ac}{\pi} \delta_m^0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mc}} = 0, \quad (25)$$

$$-(\gamma_{ma} - \gamma_{mb}) \frac{ab}{\pi} \delta_m^0 A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mb}} = \frac{(-1)^m 2a\delta_{mb}}{\pi} \gamma_{mb} B_m, \quad (26)$$

$$(\gamma_{ma} - \gamma_{mc}) \frac{ac}{\pi} \delta_m^0 A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mc}} = \frac{-2a\delta_{mc}}{\pi} \gamma_{mc} C_m,$$

де

$$\delta_m^n = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

$$\delta_{ms} = \begin{cases} s, & m = 0, \\ s/2, & m > 0, \end{cases}$$

$$q, m = 0, 1, 2, \dots$$

Звідси

$$-\frac{2ab}{\pi} ik_t \delta_m^0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mb}} = 0,$$

$$(\gamma_{qc} + \gamma_{mc}) \frac{a \delta_{mc}}{\pi} \delta_m^q + \frac{2ac}{\pi} ik_t \delta_m^0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mc}} = 0,$$

$$\gamma_{mb} B'_m = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mb}},$$

$$\gamma_{mc} C'_m = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mc}},$$

де

$$B'_m = \frac{(-1)^m 2a \delta_{mb}}{\pi} B_m;$$

$$C'_m = \frac{-2a \delta_{mc}}{\pi} C_m.$$

Розв'язання, як і раніше, проведемо методом лишків, для цього розглянемо інтеграли (10). Функція  $f(w)$  задовольняє наступні умови:

- 1)  $f(w)$  – аналітична функція змінної  $w$  у всіх точках області  $C_R$ , за винятком полюсів першого порядку  $w = \gamma_{na}$  і  $w = \gamma_{qc}$ , ( $q, n = 1, 2, \dots$ );
- 2)  $f(w)$  має прості нулі в точках  $w = \gamma_{mb}$  ( $m = 1, 2, \dots$ );
- 3)  $f(w)$  має прості нулі в точках  $w = \gamma_{mc}$  ( $m = 1, 2, q-1, q+1, \dots$ );
- 4) лишок функції  $f(w)$  в точці  $w = -\gamma_{qc}$  буде  $\operatorname{res}_{w \rightarrow -\gamma_{qc}} f(w) = -(\gamma_{qc} + \gamma_{mc})(a \delta_{mc} / \pi) \delta_m^q$ ;
- 5) поведінка функції  $f(w)$  на нескінченності має алгебраїчний характер:  $f(w) = O(w^{-1/2})$  при  $|w| \rightarrow \infty$ .

$$6) f(-ik_t) = 0.$$

Після процедури, аналогічної до описаної у першому розділі, отримуємо явний вигляд функції

ції  $f(w)$ :

$$f(w) = \frac{2a \delta_{mc}}{\pi} \frac{w + ik_t}{\gamma_{qc} + ik_t} \times \exp \left\{ \frac{w - \gamma_{qc}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} + c \right] \right\} \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - w/\gamma_{nb}}{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{nb}} e^{(w - \gamma_{qc})b/n\pi} \times \prod_{n=1}^{\infty} (q) \frac{1 - w/\gamma_{nc}}{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{nc}} e^{(w - \gamma_{qc})c/n\pi} \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{na}}{1 - w/\gamma_{na}} e^{-(w - \gamma_{qc})a/n\pi}.$$

За допомогою цього виразу неважко знайти амплітуди дифрагованого поля:

$$A_0 = 0,$$

$$A_m = -\frac{ac \gamma_{ma}}{\pi} \frac{\gamma_{ma} + ik_t}{\gamma_{qc} + ik_t} \times \exp \left\{ \frac{\gamma_{ma} - \gamma_{qc}}{\pi} \times \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} + c - \frac{a}{m} \right] \right\} \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \gamma_{ma}/\gamma_{nb}}{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{nb}} e^{(\gamma_{ma} - \gamma_{qc})b/n\pi} \times \prod_{n=1}^{\infty} (q) \frac{1 - \gamma_{ma}/\gamma_{nc}}{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{nc}} e^{(\gamma_{ma} - \gamma_{qc})c/n\pi} \times \prod_{n=1}^{\infty} (m) \frac{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{na}}{1 - \gamma_{ma}/\gamma_{na}} e^{-(\gamma_{ma} - \gamma_{qc})a/n\pi},$$

$$q, m = 1, 2, 3, \dots$$

Амплітуди власних мод для розсіяного поля в областях  $B$  і  $C$  можна визначити за такими формулами:

$$B_m = \frac{(-1)^m \pi}{2a \gamma_{mb} \delta_{mb}} f(-\gamma_{mb}),$$

$$C_m = \frac{\pi}{2a \gamma_{mc} \delta_{mc}} f(-\gamma_{mc}),$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Наведемо явні вирази для коефіцієнтів  $B_m$  і  $C_m$ :

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{2c}{b(\gamma_{qc} + ik_t)} \times \\
 &\times \exp \left\{ \frac{ik_t - \gamma_{qc}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} + c \right] \right\} \times \\
 &\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + ik_t/\gamma_{nb}}{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{nb}} e^{(ik_t - \gamma_{qc})b/n\pi} \times \\
 &\times \prod_{n=1}^{\infty} (q) \frac{1 + ik_t/\gamma_{nc}}{1 + \gamma_{qc}/\gamma_{nc}} e^{(ik_t - \gamma_{qc})c/n\pi} \times \\
 &\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{na}}{1 + ik_t/\gamma_{na}} e^{-(ik_t - \gamma_{qc})a/n\pi},
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \exp \left\{ \frac{ik_t - \gamma_{qc}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} + c \right] \right\} \times \\
 &\times \frac{2}{\gamma_{qc} + ik_t} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + ik_t/\gamma_{nb}}{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{nb}} e^{(ik_t - \gamma_{qc})b/n\pi} \times \\
 &\times \prod_{n=1}^{\infty} (q) \frac{1 + ik_t/\gamma_{nc}}{1 + \gamma_{qc}/\gamma_{nc}} e^{(ik_t - \gamma_{qc})c/n\pi} \times \\
 &\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{na}}{1 + ik_t/\gamma_{na}} e^{-(ik_t - \gamma_{qc})a/n\pi},
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 B_m &= \frac{(-1)^m c ik_t - \gamma_{mb}}{b\gamma_{mb} ik_t + \gamma_{qc}} \times \\
 &\times \exp \left\{ \frac{-\gamma_{mb} - \gamma_{qc}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} + c \right] \right\} \times \\
 &\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{mb}/\gamma_{nb}}{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{nb}} e^{-(\gamma_{mb} + \gamma_{qc})b/n\pi} \times \\
 &\times \prod_{n=1}^{\infty} (q) \frac{1 + \gamma_{mb}/\gamma_{nc}}{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{nc}} e^{-(\gamma_{mb} + \gamma_{qc})c/n\pi} \times \\
 &\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{na}}{1 + \gamma_{mb}/\gamma_{na}} e^{(\gamma_{mb} + \gamma_{qc})a/n\pi},
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
 C_m &= \frac{1}{\gamma_{mc}} \frac{ik_t - \gamma_{mc}}{ik_t + \gamma_{qc}} \times \\
 &\times \exp \left\{ \frac{-\gamma_{qc} - \gamma_{mc}}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} + c \right] \right\} \times \\
 &\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{mc}/\gamma_{nb}}{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{nb}} e^{-(\gamma_{mc} + \gamma_{qc})b/n\pi} \times \\
 &\times \prod_{n=1}^{\infty} (q) \frac{1 + \gamma_{mc}/\gamma_{nc}}{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{nc}} e^{-(\gamma_{mc} + \gamma_{qc})c/n\pi} \times \\
 &\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \gamma_{qc}/\gamma_{na}}{1 + \gamma_{mc}/\gamma_{na}} e^{(\gamma_{mc} + \gamma_{qc})a/n\pi}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Таким чином, отримано остаточні вирази для амплітуд у всіх областях хвилеводу.

### 3. АНАЛІЗ РОЗ'ЯЗКІВ

Насамперед, відзначимо, що, хоча розв'язання задач проводилося в припущенні ірраціональності  $b/a$ , але кінцевий результат справедливий для будь-якого випадку [4].

Важливою складовою дослідження отриманих розв'язків є кількісний аналіз величин коефіцієнтів у виразах (14), (19)–(21), і (31), (34)–(36). При виконанні практичних обчислень нескінченні добутки замінюються скінченними, а тому виникає очевидна необхідність оцінити зумовлену редукцією похибку. З цією метою розглянемо типовий для нашої задачі скінченний добуток

$$P_N = \prod_{n=1}^N \left( 1 - \frac{\alpha}{\gamma_{nb}} \right) e^{b\alpha/n\pi}. \tag{37}$$

Визначимо відносну похибку, зумовлену редукцією, за допомогою співвідношення

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_N &= \left| \frac{P_\infty - P_N}{P_N} \right| = \\
 &= \left| \left[ \prod_{n=N+1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\alpha}{\gamma_{nb}} \right) e^{b\alpha/n\pi} \right] - 1 \right|.
 \end{aligned} \tag{38}$$

При великих  $N$  цей вираз спрощується, якщо знехтувати членами, що мають порядок, менший за  $O(\alpha b/N\pi)$  і  $O(kb/N\pi)$ :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_N &\approx \left| \left\{ \prod_{n=N+1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha b}{n\pi} \right)^2 \right] \right\} - 1 \right| \approx \\
 &\approx \left| \frac{\alpha b}{\pi} \right|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Суму (39) можна оцінити мажорантою:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_N^{\infty} \frac{1}{n^2} dx = \frac{1}{N}. \tag{40}$$

У результаті отримуємо, що відносна похибка  $\varepsilon_N$  редукції скінченного добутку (37) не перевищує величини  $|\alpha b/\pi|^2/N$ , якщо тільки  $|\alpha b/\pi|^2/N \ll 1$ . Таким чином, для невеликих значень  $|\alpha b|$  нескінченні добутки у виразі для  $\{A_m\}$  можна швидко обчислити за допомогою комп'ютера.



Отриманий розв'язок дозволяє провести аналіз звукового поля у хвилеводі. Важливе значення мають енергетичні характеристики відбиття й проникнення пружної хвилі в окремі підобласті. Природно визначити коефіцієнт відбиття  $V_a$  як відношення середнього потоку потужності відбитої хвилі  $u_2^a$  в області  $A$  до середнього потоку потужності  $q$ -ої моди, що набігає в області  $A$  на межу поділу підобластей  $x_1=0$ ,  $x_3=[0, a]$ , див. рис. 1:

$$V_a^{(q)} = \frac{\int_0^a \operatorname{Re} \left[ \sigma_{12} \left( \frac{\partial u_2^a}{\partial t} \right)^* \right] dx_3}{\int_0^a \operatorname{Re} \left[ \sigma_{12} \left( \frac{\partial u_2^i}{\partial t} \right)^* \right] dx_3} = \frac{\int_0^a \operatorname{Re} [i\sigma_{12} (u_2^a)^*] dx_3}{\int_0^a \operatorname{Re} [i\sigma_{12} (u_2^i)^*] dx_3}. \quad (41)$$

Провівши очевидні перетворення, отримуємо таку формулу для коефіцієнтів відбиття:

$$V_a = \sum_{n=0}^{N_a} V_n, \quad V_n = \frac{|\gamma_{na}|}{|\gamma_{qa}|} |A_n|^2. \quad (42)$$

Згідно з виразом (42),  $V_a^{(q)}$  подано у вигляді суми енергетичних коефіцієнтів збурення  $V_n^{(q)}$  нормальних SH-хвиль для області  $A$ .

Аналогічно, коефіцієнти проникнення хвилі в підобласті  $B$  і  $C$  визначаються як відношення середнього потоку потужності прониклої хвилі в підобластях  $B$  або  $C$  до середнього потоку потужності  $q$ -ої нормальної хвилі, що набігає на розріз у підобласті  $A$ :

$$W_s = \sum_{n=0}^{N_s} W_n^s \quad (s = b, c), \quad (43)$$

$$W_n^b = \frac{b}{a} \frac{|\gamma_{nb}|}{|\gamma_{qa}|} |B_n|^2, \quad W_n^c = \frac{c}{a} \frac{|\gamma_{nc}|}{|\gamma_{qa}|} |C_n|^2.$$

Тут  $N_a, N_b, N_c$  – кількість біжучих мод в областях  $A, B$  і  $C$  відповідно.

Чисельні розрахунки проведемо для хвилеводу, зображеного на рис. 1. Геометрія розрізу задається величинами  $b=3a/4$ ,  $c=a/4$ .

Результат падіння нульової нормальної хвилі на розріз очевидний: згідно з властивостями поверхонь хвилеводу й розрізу потік енергії падаючої

нульової моди проходить в області  $B$  і  $C$ , розділившись на дві частини, пропорційно до розмірів  $b$  і  $c$ . Відбита хвиля відсутня.

Нехай на розріз набігає перша нормальна хвиля ( $q=1$ ). Хвильовий розмір області  $A$  змінюється в межах  $\pi < k_t a < 2\pi$ , тобто в цій області однорідними є тільки перша й нульова нормальні хвилі. Згідно зі структурою побудованого розв'язку, весь діапазон зміни хвильового розміру області  $A$  природно розділити на два інтервали.

- На першому інтервалі в областях  $B$  і  $C$  однорідні лише нульові нормальні хвилі. Тому хвильові розміри цих областей не можуть перевищувати  $k_t b < \pi$  й  $k_t c < \pi$  відповідно. Оскільки  $b=3a/4$ ,  $c=a/4$ , то для хвильового розміру області  $A$  одержуємо умови  $k_t a < 4\pi/3$  або  $k_t a < 4\pi$  (у наших припущеннях величина  $k_t a$  не перевищує  $2\pi$ ). Отже перший інтервал визначається так:  $\pi < k_t a < 4\pi/3$ .
- На другому інтервалі в області  $B$  однорідними будуть нульова й перша моди (в області  $C$ , як і раніше, однорідна тільки нульова нормальна мода). Тому діапазон зміни  $ka$  визначається нерівністю  $4\pi/3 < k_t a < 2\pi$ .

Розписуючи загальні формули (41)–(43) й використовуючи вирази для амплітудних коефіцієнтів для даних інтервалів (див. додаток Б), отримуємо розрахункові формули, наведені нижче.

- Перший інтервал ( $\pi < k_t a < 4\pi/3$ ):

$$V_a = |A_1|^2 = \left( \frac{1 - |ik_t|/|\gamma_{1a}|}{1 + |ik_t|/|\gamma_{1a}|} \right)^2,$$

$$W_b = \frac{b}{a} \frac{|\gamma_{0b}|}{|\gamma_{1a}|} |B_0|^2 = \frac{c}{a} \frac{|\gamma_{0b}|}{|\gamma_{1a}|} \frac{4}{(1 + |\gamma_{0b}|/|\gamma_{1a}|)^2},$$

$$W_c = \frac{c}{a} \frac{|\gamma_{0c}|}{|\gamma_{1a}|} |C_0|^2 = \frac{b}{a} \frac{|\gamma_{0c}|}{|\gamma_{1a}|} \frac{4}{(1 + |\gamma_{0c}|/|\gamma_{1a}|)^2}.$$

Цікаво відзначити, що для нульової моди  $A_0=0$ .

- Другий інтервал ( $4\pi/3 < k_t a < 2\pi$ ):

$$V_a = |A_1|^2 = \left( \frac{1 - |ik_t|/|\gamma_{1a}|}{1 + |ik_t|/|\gamma_{1a}|} \right)^2 \times \left( \frac{1 - |\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|}{1 + |\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|} \right)^2,$$

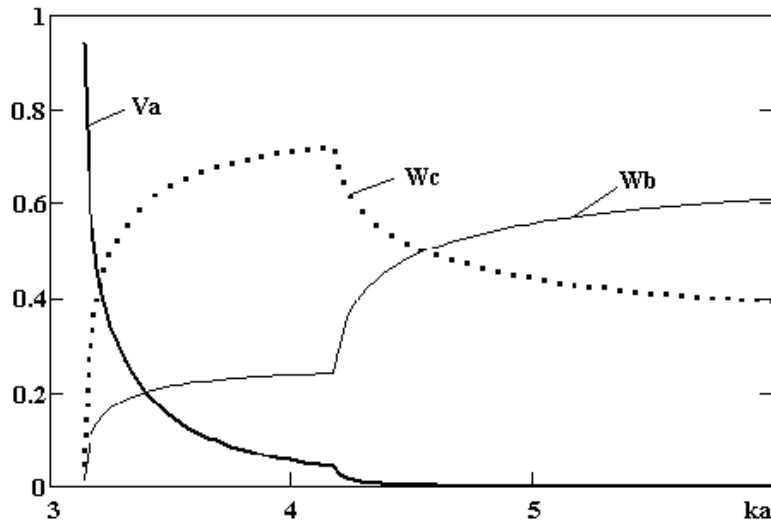


Рис. 3. Енергетичні коефіцієнти відбиття й проникнення

$$\begin{aligned}
 W_b &= \frac{b}{a} \frac{|\gamma_{0b}|}{|\gamma_{1a}|} |B_0|^2 + \frac{b}{a} \frac{|\gamma_{1b}|}{|\gamma_{1a}|} |B_1|^2 = \\
 &= \frac{c}{a} \frac{|\gamma_{0b}|}{|\gamma_{1a}|} \frac{4(1-|\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|)^2}{(1+|\gamma_{0b}|/|\gamma_{1a}|)^2(1+|\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|)^2} + \\
 &+ \frac{|\gamma_{1b}|}{|\gamma_{1a}|} \frac{4}{(1+|\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|)^2}, \\
 W_c &= \frac{c}{a} \frac{|\gamma_{0c}|}{|\gamma_{1a}|} |C_0|^2 = \\
 &= \frac{b}{a} \frac{|\gamma_{0c}|}{|\gamma_{1a}|} \frac{4(1-|\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|)^2}{(1+|\gamma_{0c}|/|\gamma_{1a}|)^2(1+|\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|)^2}.
 \end{aligned}$$

На рис. 3 зображені залежності коефіцієнтів  $V_a$ ,  $W_b$ ,  $W_c$  від хвильового розміру  $k_t a = \omega a / c_t$ . При значенні  $k_t a = \pi$ , яке відповідає зародженню однорідної першої моди в області  $A$ , коефіцієнт  $V_a$  наближається до одиниці, а коефіцієнти  $W_b$  і  $W_c$  прямують до нуля. Таким чином, на цій частоті відбувається повне відбиття першої моди й потік енергії в областях  $B$  і  $C$  відсутній.

На інтервалі  $\pi < k_t a < 4\pi/3$  коефіцієнт відбиття  $V_a$  зменшується, а коефіцієнти проникнення  $W_b$  і  $W_c$  зростають. При цьому від початку зазначеного інтервалу до його кінця абсолютна величина тангенса кута нахилу дотичної до кривих на рис. 3 суттєво зменшується (вони стають більш пологими). Цікаво відзначити, що тут коефіцієнт  $W_c > W_b$ , незважаючи на те, що область  $B$  ширша за область  $C$ . Очевидно, що це обумовлено просторовою структурою першої моди області  $A$

уздовж координати  $x_3$ . На межі області  $B$  перша мода утворює знакозмінний розподіл зміщення, а на межі області  $C$  знак зміщення залишається постійним. Такий результат стає зрозумілим, якщо взяти до уваги, що на інтервалі  $\pi < k_t a < 4\pi/3$  в областях  $B$  і  $C$  однорідними будуть тільки нульові моди.

На інтервалі  $4\pi/3 < k_t a < 2\pi$  коефіцієнт відбиття продовжує зменшуватись. Спадає також і  $W_c$ , натомість величина  $W_b$  зростає. При  $k_t a \approx 4.5$  коефіцієнти  $W_b$  і  $W_c$  зрівнюються і надалі маємо  $W_b > W_c$ . Така залежність коефіцієнтів проходження від ширини хвилеводу  $k_t a$  пояснюється тим, що при  $k_t a > 4\pi/3$  в області  $B$  однорідними стають нульова й перша моди. Знакозмінність зміщення на межі області  $B$  сприяє ефективному збудженню першої моди в ній. Наприклад, при  $k_t a = 5$  маємо  $|B_1|/|B_0| \approx 3.2$ .

При подальшому збільшенні  $k_t a$  відбиття й проходження коефіцієнти мають невеликі осциляції й асимптотично наближаються до значень  $V_a \rightarrow 0$ ,  $W_b \rightarrow 0.59$ ,  $W_c \rightarrow 0.41$ . Як і слід було очікувати, на обох розглянутих інтервалах частот закон збереження енергії виконується.

## ВИСНОВКИ

Розглянуто задачу поширення нормальних SH-хвиль у хвилеводі з півнескінченим розрізом. Методом лишків аналітичної функції отримано точний аналітичний розв'язок. Вирази для амплітуд дифрагованих полів представлено у вигляді збі-

жних нескінченних рядів. Оцінено похибку редуції при заміні нескінченних добутків, що входять у вирази для амплітуд, на скінченні. Така процедура важлива для контролю якості отриманих чисельних результатів. Знайдений розв'язок дозволив визначити енергетичний коефіцієнт відбиття від півнескінченного розрізу й енергетичні коефіцієнти проникнення в області, розділені розрізом, і провести аналіз їхньої залежності від хвильових розмірів хвилеводу.

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
2. Гринченко В. Т., Вовк І. В., Маципура В. Т. Основы акустики.– К.: Наук. думка, 2007.– 640 с.
3. Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Релея и Лэмба в технике.– М.: Наука, 1966.– 168 с.
4. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов.– М.: МИР, 1974.– 328 с.
5. Титчмарш Е. Теория функций.– М.: Наука, 1980.– 463 с.
6. Сторожев В. И., Павлюшина Е. Ю. Нормальные упругие волны в волноводе из состыкованных под углом анизотропных полуслоев // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі.– К.: Наук. думка, 2007.– С. 331–338.
7. Marcuritz N. Waveguide handbook.– New York: Dover, 1964.– 423 p.
8. Marcuritz N., Felsen L. Radiation and scattering of waves.– New York: IEEE Press, 1972.– 888 p.
9. Hurd R. A., Gruenberg H. H-plane bifurcation of rectangular waveguides // Can. J. Phys.– 1954.– 32.– P. 694–701.
10. Buyukaksoy A., Polat B. A bifurcated waveguide problem // Springer-Verlag.– 1999.– 51.– P. 196–202.

**ДОДАТОК А**

Сформульовані в першому розділі умови для функції  $f(w)$  визначають її єдиним чином. Так, умови 1 і 2 визначають положення нулів та полюсів і будуть виконуватись, якщо функцію  $f(w)$  записати у вигляді

$$f(w) = f_0(w) \left(1 + \frac{w}{ik}\right) \times \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{wb}{\gamma nb}\right) e^{wb/n\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{wc}{\gamma nc}\right) e^{wc/n\pi}}{\left(1 + \frac{w}{\gamma qa}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{wa}{\gamma na}\right) e^{wa/n\pi}},$$

де  $f_0(w)$  – ціла функція змінної  $w$ .

З умов 3 й 4 визначимо функцію  $f_0(w)$ . Для цього подамо  $f(w)$  у вигляді

$$f(w) = \zeta(w) f_0(w) \left(1 + \frac{w}{ik}\right) \times \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{wb}{n\pi}\right) e^{wb/n\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{wc}{n\pi}\right) e^{wc/n\pi}}{\left(1 + \frac{w}{\gamma qa}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{wa}{n\pi}\right) e^{wa/n\pi}}.$$

Функція  $\zeta(w)$  обмежена при  $|w| \rightarrow \infty$ .

Виходячи з міркувань, викладених в [4, с. 24], справедливим буде таке твердження: якщо

$$F(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{an + b}\right) e^{-\alpha/an},$$

де  $a$  і  $b$  – деякі сталі, а  $\text{Re } \alpha > 0$ , то функцію  $F(\alpha)$  при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  можна представити в асимптотичному вигляді

$$F(\alpha) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma[b/a + 1]}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-[1/2+b/a]} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{\alpha}{a} \left(1 - C - \ln \frac{\alpha}{a}\right) \right\}, \\ \quad -\pi < \text{Arg } \alpha < \pi, \\ \\ \frac{\sqrt{2} \Gamma[b/a + 1]}{\sqrt{\pi}} \sin \left( \frac{\alpha\pi}{a} - \frac{b\pi}{a} \right) \times \\ \times \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-[1/2+b/a]} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{\alpha}{a} \left(1 - C - \ln \frac{\alpha}{a}\right) \right\}, \\ \quad \alpha = -|\alpha|. \end{cases}$$

Отже, при  $|w| \rightarrow \infty$

$$f(w) \sim \begin{cases} \zeta(w) f_0(w) \sqrt{\frac{-a}{2bc}} \frac{1}{w^{1/2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{bw}{\pi} \ln \frac{a}{b} - \frac{cw}{\pi} \ln \frac{a}{c} \right\}, \quad w \neq |w|, \\ \\ \zeta(w) f_0(w) \sqrt{\frac{2a}{bc}} \frac{1}{w^{1/2}} \frac{\sin(bw) \sin(cw)}{\sin(aw)} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{bw}{\pi} \ln \frac{a}{b} - \frac{cw}{\pi} \ln \frac{a}{c} \right\}, \quad w = |w|. \end{cases}$$

Згідно з умовою 4, потрібно покласти

$$f_0(w) = h \exp \left\{ \frac{bw}{\pi} \ln \frac{a}{b} + \frac{cw}{\pi} \ln \frac{a}{c} \right\}.$$

Стала  $h$  визначається з умови 3:

$$h = q \sin \frac{q\pi b}{a} \exp \left\{ \frac{\gamma_{qa}}{\pi} \left( b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right) \right\} \times \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{\gamma_{qa}}{\gamma_{nb}} \right) e^{-\gamma_{qa}b/n\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{\gamma_{qa}}{\gamma_{nc}} \right) e^{-\gamma_{qa}c/n\pi}}{\gamma_{qa} \left( 1 - \frac{\gamma_{qa}}{ik} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{\gamma_{qa}}{\gamma_{na}} \right) e^{-\gamma_{qa}a/n\pi}}.$$

Підставивши останні два вирази у вихідну форму для  $f(w)$ , отримаємо остаточний вираз для невідомої функції.

### ДОДАТОК Б

У розглянутих у третьому розділі двох діапазонах частот  $\pi \leq k_t a \leq 4\pi/3$  й  $4\pi/3 \leq k_t a \leq 2\pi$  при заданих геометричних параметрах  $b = 3a/4$ ,  $c = a/4$ ,  $a = b + c$  підобластей  $A$ ,  $B$ ,  $C$  хвилеводу амплітудні коефіцієнти  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  для них набудуть такого вигляду:

- перший діапазон:

$$A_1 = \frac{1 - |ik_t|/|\gamma_{1a}|}{1 + |ik_t|/|\gamma_{1a}|} \times \exp \left[ 2i \left( \frac{|\gamma_{1a}|}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_{nb}^2 \arctan |\gamma_{1a}|/\gamma_{nb}}{\gamma_{nb}^2 + |\gamma_{1a}|^2} - \frac{b}{n\pi} |\gamma_{1a}| \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_{nc}^2 \arctan |\gamma_{1a}|/\gamma_{nc}}{\gamma_{nc}^2 + |\gamma_{1a}|^2} - \frac{c}{n\pi} |\gamma_{1a}| \right\} - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_{na}^2 \arctan |\gamma_{1a}|/\gamma_{na}}{\gamma_{na}^2 + |\gamma_{1a}|^2} - \frac{a}{n\pi} |\gamma_{1a}| \right\} \right] \right],$$

$$B_0 = \sqrt{\frac{c}{b}} \frac{2}{1 + |\gamma_{0b}|/|\gamma_{1a}|} \times \exp \left( i \frac{|\gamma_{1a}| - |\gamma_{0b}|}{\pi} \left[ \left( b \ln \frac{1}{b} + c \ln \frac{1}{c} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{0b}|}{\gamma_{nb}} - \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{nb}} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{0b}|}{\gamma_{nc}} - \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{nc}} \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{na}} - \arctan \frac{|\gamma_{0b}|}{\gamma_{na}} \right\} \right] \right),$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{b}{c}} \frac{2}{1 + |\gamma_{0c}|/|\gamma_{1a}|} \times \exp \left( i \frac{|\gamma_{1a}| - |\gamma_{0c}|}{\pi} \left[ \left( b \ln \frac{1}{b} + c \ln \frac{1}{c} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{0c}|}{\gamma_{nb}} - \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{nb}} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{0c}|}{\gamma_{nc}} - \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{nc}} \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{na}} - \arctan \frac{|\gamma_{0c}|}{\gamma_{na}} \right\} \right] \right);$$

- другий діапазон:

$$A_1 = \frac{1 - |ik_t|/|\gamma_{1a}|}{1 + |ik_t|/|\gamma_{1a}|} \frac{1 - |\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|}{1 + |\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|} \times \exp \left[ 2i \left( \frac{|\gamma_{1a}|}{\pi} \left[ b \ln \frac{a}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_{nb}^2 \arctan |\gamma_{1a}|/\gamma_{nb}}{\gamma_{nb}^2 + |\gamma_{1a}|^2} - \frac{b}{n\pi} |\gamma_{1a}| \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_{nc}^2 \arctan |\gamma_{1a}|/\gamma_{nc}}{\gamma_{nc}^2 + |\gamma_{1a}|^2} - \frac{c}{n\pi} |\gamma_{1a}| \right\} - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_{na}^2 \arctan |\gamma_{1a}|/\gamma_{na}}{\gamma_{na}^2 + |\gamma_{1a}|^2} - \frac{a}{n\pi} |\gamma_{1a}| \right\} \right] \right],$$

$$B_0 = \sqrt{\frac{c}{b}} \frac{2(1 - |\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|)}{(1 + |\gamma_{0b}|/|\gamma_{1a}|)(1 + |\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|)} \times \exp \left( i \frac{|\gamma_{1a}| - |\gamma_{0b}|}{\pi} \left[ \left( b \ln \frac{1}{b} + c \ln \frac{1}{c} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{0b}|}{\gamma_{nb}} - \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{nb}} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{0b}|}{\gamma_{nc}} - \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{nc}} \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{na}} - \arctan \frac{|\gamma_{0b}|}{\gamma_{na}} \right\} \right] \right),$$

$$\begin{aligned}
C_0 = & \sqrt{\frac{b}{c}} \frac{2(1 - |\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|)}{(1 + |\gamma_{0c}|/|\gamma_{1a}|)(1 - |\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|)} \times \\
& \times \exp\left(i \frac{|\gamma_{1a}| - |\gamma_{0c}|}{\pi} \left[ \left( b \ln \frac{1}{b} + c \ln \frac{1}{c} \right) + \right. \right. \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{0c}|}{\gamma_{nb}} - \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{nb}} \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{0c}|}{\gamma_{nc}} - \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{nc}} \right\} + \\
& \left. \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{na}} - \arctan \frac{|\gamma_{0c}|}{\gamma_{na}} \right\} \right] \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = & \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{2}{1 + |\gamma_{1b}|/|\gamma_{1a}|} \times \\
& \times \exp\left(i \frac{|\gamma_{1a}| - |\gamma_{1b}|}{\pi} \left[ \left( b \ln \frac{1}{b} + c \ln \frac{1}{c} \right) + \right. \right. \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{1b}|}{\gamma_{nb}} - \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{nb}} \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{1b}|}{\gamma_{nc}} - \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{nc}} \right\} + \\
& \left. \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \arctan \frac{|\gamma_{1a}|}{\gamma_{na}} - \arctan \frac{|\gamma_{1b}|}{\gamma_{na}} \right\} \right] \right).
\end{aligned}$$