

С.А.Калоеров, А.В.Петренко

ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПОЛОСЫ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

*Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, 83055, Донецк, Украина;
e-mail:kaloerov@matfak.dongu.donetsk.ua*

Abstract. Using the methods of complex potentials, conformal mappings, Cauchy integrals and least-squares, a method of determination of electromagnetoelastic state (EMES) is proposed for the multi-connected half-plane. The method satisfies exactly the boundary conditions over the rectilinear boundary. Basing on the method, the approximate method of determination of EMES is built for the strip with arbitrary arranged holes and cracks. For the strip with one circular hole, the study of basic characteristics of EMES in dependence on the strip geometrical parameters is carried out.

Key words: electromagnetoelasticity; complex potential; plane problem; half-plane; strip, least-square method.

Введение.

В последние десятилетия большое внимание уделяется исследованиям электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) тел из пьезоматериалов, находящихся под действием различных электрических и магнитных полей [1, 9 – 16]. В работах [1, 10] изложены основы электро- и магнитоупругости, приведены решения частных задач. В монографии [3] предложены методы решения двумерных и плоских задач электро- и магнитоупругости для тел из пьезоматериалов с отверстиями, трещинами и включениями, даны решения задач электроупругости (магнитоупругости) для многосвязных полуплоскости и полосы.

В данной статье указанные методы решения задач распространены на случай многосвязных электромагнитоупругих полуплоскости и полосы, когда одновременно учитываются и электрические, и магнитные свойства материала [7, 8].

1. Задача для полуплоскости.

Рассмотрим многосвязную анизотропную нижнюю полуплоскость S , ограниченную прямолинейной границей L^+ и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 1). Контур отверстия могут переходить в трещины, пересекаться между собой (но не с прямолинейной границей), образовывать контуры отверстий любой формы. Отнесем полуплоскость к прямоугольной системе координат Ox с началом в произвольной точке полуплоскости и осью Oy , перпендикулярной к прямолинейной границе. Обозначим расстояния от начала координат до прямолинейной границы через h^+ . Граница полуплоскости свободна от внешних усилий, на ней индукции электрического и магнитного полей равны нулю; на бесконечности заданы растягивающие усилия $\sigma_x^\infty = p$, индукции или напряженности электрического и магнитного полей; на контурах отверстий заданы уравновешенные внешние усилия, индукции электрического и магнитного полей.

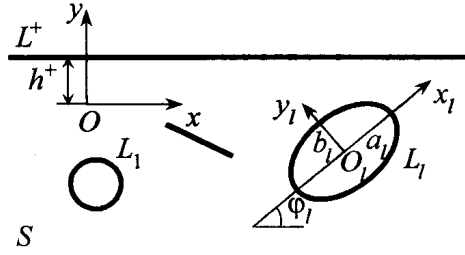


Рис. 1

Определение ЭМУС рассматриваемой полуплоскости сводится к определению комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из граничных условий [3, 7]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ki}^0 \Phi_k(t_k) = f_i(t) \text{ на } L^+, L_l \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (1)$$

где g_{ki}^0 – постоянные, зависящие от физико-механических свойств материала; $f_i(t)$ – функция, зависящая от заданных граничных условий на контурах.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в нижних полуплоскостях S_k , получаемых из полуплоскости S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$, где μ_k – корни известного характеристического уравнения [7]. В этих областях границе L^+ и контурам отверстий L_l соответствуют прямолинейные границы L_k^+ и контуры эллиптических отверстий L_{kl} .

Для данного случая комплексные потенциалы имеют вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}^+(z_k) + \Phi_{kl}(z_k), \quad (2)$$

в котором Γ_k – постоянные, определяемые из условий на бесконечности; $\Phi_{k0}^+(z_k)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях S_k ; $\Phi_{kl}(z_k)$ – функции, голоморфные вне эллипсов L_{kl} , включая бесконечно удаленные точки.

Выберем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l нижней полуплоскости S и направлениями осей вдоль полуосей a_l, b_l эллиптических отверстий. Параметрическое уравнение эллипса L_l в локальной системе координат записывается так:

$$x_l = a_l \cos \theta; \quad y_l = b_l \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

а в системе Oxy будет иметь вид

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l; \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь x_{0l}, y_{0l} – координаты центра L_l в системе Oxy ; φ_l – угол между осями Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки.

Отобразим конформно внешность единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [6]

$$z_k = z_{kl}^0 + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}), \quad (3)$$

где

$$z_{kl}^0 = x_{0l} + \mu_k y_{0l}; \quad R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2};$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

Тогда функции $\Phi_{kl}(z_k)$, голоморфные вне L_{kl} , в отображенных областях будут голоморфными вне круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ и их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{kl} , т.е.

$$\Phi_{kl}(z_k) = \sum_{l=1}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}. \quad (4)$$

Учитывая (2) и (4) из граничных условий на прямолинейной границе методом интегралов типа Коши, получаем [3, 4]

$$\Phi_{k0}^+(z_k) = - \sum_{l=1}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{r}_k \bar{a}_{kln}}{(\bar{\zeta}_{kl}^+)^n} + \frac{\bar{s}_{k+1} \bar{a}_{k+1ln}}{(\bar{\zeta}_{k+1l}^+)^n} + \frac{\bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2ln}}{(\bar{\zeta}_{k+2l}^+)^n} + \frac{\bar{m}_{k+3} \bar{a}_{k+3ln}}{(\bar{\zeta}_{k+3l}^+)^n} \right], \quad (5)$$

где $\bar{\zeta}_{k+j,l}^+$ – переменные, вычисляемые из конформных отображений внешности единичного круга на внешности эллипсов L_{kl}^+ в верхних полуплоскостях S_k^+ с границей L_k^+ [3 – 5]:

$$z_k = \bar{z}_{k+j,l}^0 + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+ + \bar{R}_{k+j,l} (\bar{\zeta}_{k+j,l}^+ + \bar{m}_{k+j,l} / \bar{\zeta}_{k+j,l}^+); \quad (6)$$

$\bar{r}_k, \bar{s}_{k+1}, \bar{e}_{k+2}, \bar{m}_{k+3}$ – величины, зависящие от постоянных g_{kl}^0 .

Тогда для функций (2) и их производных найдем выражения

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n} - \frac{\bar{r}_k \bar{a}_{kln}}{(\bar{\zeta}_{kl}^+)^n} - \frac{\bar{s}_{k+1} \bar{a}_{k+1ln}}{(\bar{\zeta}_{k+1l}^+)^n} - \frac{\bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2ln}}{(\bar{\zeta}_{k+2l}^+)^n} - \frac{\bar{m}_{k+3} \bar{a}_{k+3ln}}{(\bar{\zeta}_{k+3l}^+)^n} \right]; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Phi_k'(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \{ & a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k) - \bar{r}_k \bar{a}_{kln} \bar{\varphi}'_{kln}(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{a}_{k+1ln} \bar{\varphi}'_{k+1ln}(z_k) - \\ & - \bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2ln} \bar{\varphi}'_{k+2ln}(z_k) - \bar{m}_{k+3} \bar{a}_{k+3ln} \bar{\varphi}'_{k+3ln}(z_k) \}, \end{aligned} \quad (8)$$

в которых на основе конформных отображений (3) и (6) имеем

$$\varphi'_{kln} = - \frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}; \quad (9)$$

$$\bar{\varphi}'_{k+jln}(z_k) = - \frac{n}{(\bar{\zeta}_{k+j,l}^+)^{n-1} \bar{R}_{k+j,l} \left[(\bar{\zeta}_{k+j,l}^+)^2 - \bar{m}_{k+j,l} \right]}; \quad (10)$$

a_{kln} – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах отверстий. Наиболее удобным для удовлетворения этим условиям является метод наименьших квадратов. Из граничных условий для производных функций, используя указанный метод, получаем систему линейных алгебраических уравнений, после решения которой можно вычислять в любой точке основные характеристики ЭМУС (напряжения, перемещения, индукции и напряженности электромагнитного поля).

Описанное выше решение точно удовлетворяет граничным условиям на прямолинейной границе, но оно справедливо, когда контуры отверстий L_1 не пересекают гра-

ницу полуплоскости S . Если хотя бы один из контуров L_l пересекает границу полуплоскости, то воспользоваться методом интегралов типа Коши, а значит и приведенным выше решением, невозможно, т.к. функции на линии интегрирования будут иметь особые точки. Кроме того, линия интегрирования в этом случае будет разрывной прямой. Но и в этом случае можно сохранять вид комплексных потенциалов (7), разлагая функции (5) в соответствующие ряды с коэффициентами, не связанными с коэффициентами разложения $\Phi_{k1}(z_k)$. Обозначая коэффициенты разложения (5) через новые постоянные \bar{b}_{kln} , а не через \bar{a}_{kln} , для производной функции (8) найдем [3]

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k) - \bar{r}_k \bar{b}_{kln} \bar{\varphi}'_{kln}(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{b}_{k+1ln} \bar{\varphi}'_{k+1ln}(z_k) - \right. \\ \left. - \bar{e}_{k+2} \bar{b}_{k+2ln} \bar{\varphi}'_{k+2ln}(z_k) - \bar{n}_{k+3} \bar{b}_{k+3ln} \bar{\varphi}'_{k+3ln}(z_k) \right\}. \quad (11)$$

Но в отличие от (8), функции (11) не удовлетворяют автоматически граничным условиям на прямолинейной границе. Этим условиям теперь следует удовлетворять дополнительно. Это можно сделать приближенно, например, методом наименьших квадратов, выбирая «коллокационные точки» не только на контурах отверстий L_l , но и на отрезке прямолинейной границы L^+ , где влияние отверстий на ЭМУС значительно.

Для полуплоскости с отверстиями, не выходящими на границу, проведены численные исследования ЭМУС с использованием обоих приведенных выше методов удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе. Как показывают расчеты, значения величин, получаемые по методу приближенного удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе, практически совпадают с аналогичными результатами при точном удовлетворении этим условиям. Но метод приближенного удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе позволяет решать более широкие классы задач. На основе этого метода можно построить решение задачи и для полосы.

2. Задача для полосы.

Рассмотрим многосвязную полосу S с прямолинейными границами L^+ , L^- и эллиптическими отверстиями L_l ($l = \overline{1, L}$) (рис. 2). Контур отверстия могут переходить в трещины, пересекаться друг с другом и с прямолинейными границами. Обозначим расстояния от начала выбранной системы координат Oxy до прямолинейных границ L^+ и L^- , соответственно, через h^+ и h^- . Прямолинейные границы свободны от внешних усилий, на них индукции электрического и магнитного полей равны нулю; на бесконечности заданы растягивающие усилия $\sigma_x^\infty = p$, индукции или напряженности электрического и магнитного полей; на контурах отверстий заданы уравновешенные внешние усилия, индукции электрического и магнитного полей.

Для рассматриваемого случая функции $\Phi'_k(z_k)$ определены и голоморфны в областях S_k , получаемых из заданной полосы S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$. В этих областях границам L^+ , L^- и контурам отверстий L_l соответствуют прямолинейные границы L_k^+ , L_k^- и контуры отверстий L_{kl} . Учитывая представление (9), производные комплексных потенциалов запишем в виде

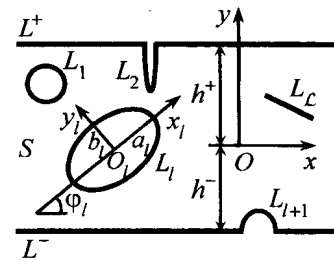


Рис. 2

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) = & \Gamma_k + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k) - \bar{r}_k \bar{b}_{kln} \bar{\varphi}'_{kln}{}^+(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{b}_{k+1ln} \bar{\varphi}'_{k+1ln}{}^+(z_k) - \\ & - \bar{e}_{k+2} \bar{b}_{k+2ln} \bar{\varphi}'_{k+2ln}{}^+(z_k) - \bar{m}_{k+3} \bar{b}_{k+3ln} \bar{\varphi}'_{k+3ln}{}^+(z_k) - \bar{r}_k \bar{c}_{kln} \bar{\varphi}'_{kln}{}^-(z_k) - \\ & - \bar{s}_{k+1} \bar{c}_{k+1ln} \bar{\varphi}'_{k+1ln}{}^-(z_k) - \bar{e}_{k+2} \bar{c}_{k+2ln} \bar{\varphi}'_{k+2ln}{}^-(z_k) - \bar{m}_{k+3} \bar{c}_{k+3ln} \bar{\varphi}'_{k+3ln}{}^-(z_k) \}, \end{aligned}$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из условий на бесконечности; $\bar{r}_k, \bar{s}_{k+1}, \bar{e}_{k+2}, \bar{m}_{k+3}$ – известные постоянные; $\varphi'_{kln}, \bar{\varphi}'_{k+jln}{}^+$ – функции, вычисляемые по формулам (9), (10);

$$\bar{\varphi}'_{k+jln}{}^-(z_k) = - \frac{n}{(\bar{\zeta}_{k+j,l}^-)^{n-1} \bar{R}_{k+j,l} \left[(\bar{\zeta}_{k+j,l}^-)^2 - \bar{m}_{k+j,l} \right]};$$

$\bar{\zeta}_{k+j,l}^-$ – переменные, вычисляемые из конформных отображений внешности единичного круга на внешности эллипсов L_{kl}^- , расположенных ниже границ L_k^- , по формулам

$$z_k = \bar{z}_{k+j,l}^0 - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^- + \bar{R}_{k+j,l} (\bar{\zeta}_{k+j,l}^- + \bar{m}_{k+j,l} / \bar{\zeta}_{k+j,l}^-);$$

$a_{kln}, b_{kln}, c_{kln}$ – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах отверстий и прямолинейных границах методом наименьших квадратов.

Выберем на «коллокационных отрезках» границ L^+, L^- и на контурах L_l систему точек t_m ($m = \overline{1, M}$). Исходя из дифференциальных граничных условий, получаемых дифференцированием (1) по дуге, составим функционал

$$J = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left| \sum_{k=1}^4 \left[g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_k(t_{km}) + \bar{g}_{ki}^0 \bar{\delta}_k \bar{\Phi}'_k(t_{km}) \right] \right|^2, \quad (12)$$

в котором $\delta_k = dt_k / ds$.

Удовлетворяя условиям минимума функционала (12), получаем систему линейных алгебраических уравнений, после решения которой комплексные потенциалы (10) станут известными и по ним можно будет вычислять основные характеристики ЭМУС в любых точках полосы [7] и коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей поля (КИНИН) для вершин трещин [2, 8].

3. Анализ результатов численных исследований.

Численные исследования ЭМУС получены для полосы с одним круговым отверстием (рис. 3, а) и полосы с одной поперечной трещиной (рис. 3, б) при растяжении усилиями $\sigma_x^\infty = p$.

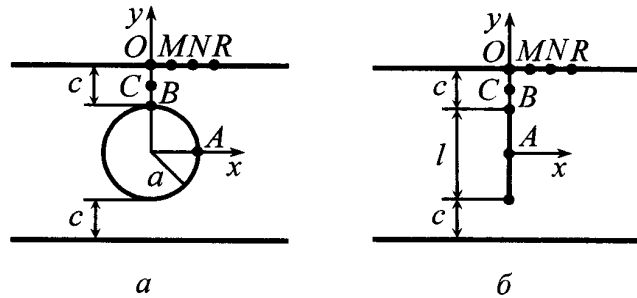


Рис. 3

При проведении исследований для обеспечения достаточной точности удовлетворения граничным условиям изменялось количество членов в рядах (9) и точек на контуре отверстия и на «коллокационных отрезках» прямолинейных границ. Значения этих параметров увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контуре отверстия и прямолинейных границах не удовлетворялись с достаточной степенью точности. «Коллокационный отрезок» выбирался так, чтобы его центр располагался в ближайшей к отверстию точке прямолинейной границы. Длина этого отрезка регулировалась таким образом, чтобы за этим отрезком можно было пренебречь влиянием отверстия на ЭМУС.

Ниже описаны некоторые из полученных результатов для полосы из феррит-пьезоактивного композита $\text{BaTiO}_2\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ [7]. При этом все значения величин даны с точностью до приложенной нагрузки p как множителя, причем значения величин приведены в мегадолях, т.е. напряжения в МПа, индукции и напряженности электрического поля – в МКл/м² и МВ/м, индукции и напряженности магнитного поля – в МТл и МА/м, КИН k_1 – в МПа $\sqrt{\text{м}}$, плотность внутренней энергии – в МДж/м³. При таком подходе растягивающее усилие p задается в МПа.

Таблица 1

Точки	Величина	c/a				
		10,0	2,0	1,0	0,5	0,1
A	σ_s	-0,978	-1,217	-1,446	-1,636	-1,389
	$D_s \cdot 10^2$	-0,007	-0,011	-0,013	-0,014	-0,012
	$E_y \cdot 10^2$	-0,050	-0,047	-0,043	-0,024	0,013
	$B_s \cdot 10^2$	-0,189	-0,221	-0,256	-0,274	-0,306
B	σ_s	3,134	3,501	4,177	5,588	12,938
	$E_y \cdot 10^2$	1,549	1,730	2,064	2,779	6,398
	$H_y \cdot 10^2$	-0,002	-0,002	-0,002	-0,003	-0,008
	$U \cdot 10^2$	0,004	0,004	0,006	0,011	0,060
C	σ_x	1,019	1,280	1,686	2,430	6,179
	σ_y	0,031	0,186	0,226	0,220	0,146
	$D_y \cdot 10^2$	0,000	0,002	0,002	0,002	0,001
	$E_y \cdot 10^2$	0,505	0,645	0,857	1,229	3,083
	$B_y \cdot 10^2$	0,004	0,036	0,059	0,080	0,091
O	σ_x	0,986	0,830	0,665	0,491	0,136
	$E_y \cdot 10^2$	0,492	0,406	0,307	0,181	0,075
M	σ_x	0,986	0,910	1,027	1,664	6,175
	$E_y \cdot 10^2$	0,491	0,454	0,519	0,772	3,053
	$B_x \cdot 10^2$	-0,001	-0,028	-0,063	-0,074	0,035
N	σ_x	0,988	1,086	1,577	2,528	3,619
	$E_y \cdot 10^2$	0,491	0,534	0,781	1,277	1,787
	$B_x \cdot 10^2$	-0,001	-0,033	-0,028	0,051	0,117
R	σ_x	0,990	1,237	1,747	2,220	1,905
	$E_y \cdot 10^2$	0,490	0,611	0,862	1,093	0,950
	$B_x \cdot 10^2$	-0,002	-0,016	0,037	0,117	0,039

В табл. 1 для полосы с центральным круговым отверстием при ее растяжении усилиями $\sigma_x^\infty = p$ приведены значения основных характеристик ЭМУС и плотности внутренней энергии в зависимости от отношения c/a (длин перемычек между контуром отверстия и прямолинейными границами c к радиусу отверстия a). Значения величин даны в точках: $A(a, 0)$, $B(0, a)$, $C(0, a+c/2)$, $O(0, a+c)$, $M(a/2, a+c)$, $N(a, a+c)$, $R(3a/2, a+c)$.

Как видно (табл. 1), при уменьшении ширины полосы значения основных характеристик и плотности внутренней энергии в зонах перемычек между отверстием и прямолинейными границами резко возрастают, достигая максимальных значений в точках перемычек, близких к контуру отверстия. Исключение составляют точки перемычек на прямолинейных границах O , в которых эти величины с уменьшением ширины убывают.

Таблица 2

Точки	Величина	c/l			
		2,0	1,0	0,5	0,1
A	σ_s	-0,968	-0,991	-1,030	-1,060
	$D_s \cdot 10^2$	0,008	0,007	0,004	0,001
	$E_y \cdot 10^2$	0,000	0,227	0,657	2,638
	$B_s \cdot 10^2$	0,207	0,234	0,291	0,415
B	k_1	0,713	0,727	0,756	0,940
C	σ_x	1,071	1,186	1,427	2,993
	σ_y	0,047	0,112	0,232	0,869
	$E_y \cdot 10^2$	0,577	0,870	1,381	3,841
	$B_y \cdot 10^2$	-0,023	0,000	0,007	0,127
O	σ_x	0,993	0,976	0,942	0,738
	$E_y \cdot 10^2$	0,394	1,323	2,051	7,984
M	σ_x	1,011	1,107	1,383	1,344
	$E_y \cdot 10^2$	0,444	0,501	2,552	8,374
	$B_x \cdot 10^2$	-0,011	-0,034	-0,057	-0,451
N	σ_x	1,041	1,152	1,156	1,000
	$E_y \cdot 10^2$	0,563	0,393	3,057	0,494
	$B_x \cdot 10^2$	-0,014	-0,043	-0,184	0,000
R	σ_x	1,052	1,080	1,000	1,000
	$E_y \cdot 10^2$	0,668	1,593	0,494	0,494
	$B_x \cdot 10^2$	-0,015	-0,083	0,000	0,000

В табл. 2 для растяжения полосы с центральной поперечной трещиной усилиями $\sigma_x^\infty = p$ приведены значения основных характеристик ЭМУС и КИНН в зависимости от отношения c/l (длин перемычек между трещиной и прямолинейными границами c к длине трещины l).

Как видно из данных табл. 2, закономерности изменения основных характеристик ЭМУС для полосы с трещиной остаются такими же, как и для полосы с круговым отверстием.

Заклучение.

Таким образом, в данной работе предложен метод определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) многосвязной полуплоскости, который точно удовлетворяет граничным условиям на прямолинейной границе. При этом использованы методы: комплексных потенциалов, конформных отображений, интегралов типа Коши и наименьших квадратов. На их основе построен приближенный метод определения ЭМУС полосы с произвольно расположенными отверстиями и трещинами. Для полосы с одним круговым отверстием или трещиной исследовано изменения основных характеристик ЭМУС в зависимости от ее геометрических параметров.

Р Е З Ю М Е . З використанням методів комплексних потенціалів, конформних відображень, інтегралів типу Коші та найменших квадратів запропоновано метод визначення електромагнітопружного стану (ЕМПС) багатозв'язної півплощини, який точно задовольняє граничним умовам на прямолинійній границі. На його основі побудовано наближений метод визначення ЕМПС смуги з довільно розташованими отворами та тріщинами. Для смуги з одним круговим отвором чи тріщиною досліджено зміни основних характеристик ЕМПС в залежності від її геометричних параметрів.

1. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5).
2. *Калоеров С.А.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих сред // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 6. – С. 56 – 62.
3. *Калоеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
4. *Калоеров С.А., Бороненко О.И., Авдюшина Е.В.* Приближенный метод определения магнитоупругого состояния пьезомагнитного полупространства и слоя с полостями и трещинами // Матем. методы та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 96 – 105.
5. *Калоеров С.А., Глуценко Ю.А.* Приближенный метод определения электроупругого состояния слоя и полосы с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 115 – 126.
6. *Калоеров С.А., Горянская Е.С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 10 – 26. – (Механика композитов: В 12 т. Т.7).
7. *Калоеров С.А., Петренко А.В.* Двумерная задача электромагнитоупругости для многосвязных сред // Матем. методы та фіз.-мех. поля. – 2008. – Вып. 51. – С. 208 – 221.
8. *Калоеров С.А., Петренко А.В.* Двумерная и плоская задачи электромагнитоупругости для тел с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 50 – 62.
9. *Калоеров С.А., Хорошев К.Г.* Термоэлектроупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 11. – С. 116 – 126.
10. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
11. *Хома И.Ю.* Об одном способе построения уравнений магнитоупругости нетонких пластин // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 3 – 7.
12. *Шульга Н.А.* Эффективные магнитоупругие свойства слоистых композитов // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 8. – С. 36 – 43.
13. *Kaloerov S.A., Sorochan O.A.* Plane Problem of Thermoelctromagnetoelasticity for Multiply Connected Bodies // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 4. – P. 413 – 423.
14. *Kirilyuk V.S.* Stress State of a Piezoelectric Ceramic Body with a Plane Crack under Antisymmetric Loads // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 2. – P. 152 – 161.
15. *Kirilyuk V.S.* Stress State of a Piezoceramic Body with a Plane Crack Opened by a Rigid Inclusion // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 7. – P. 757 – 768.
16. *Kirilyuk V.S.* Stress State of a Transversely Isotropic Magnetoelctroelastic Body with a Plane Crack under Antisymmetric Loads // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1106 – 1118.

Поступила 29.12.2009

Утверждена в печать 21.10.2010