КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том **21** № **5** **2005**

УДК 521.93

М. В. Лубков

Полтавская гравиметрическая обсерватория Национальной академии наук Украины
36029, г. Полтава, ул. Мясоедова 27/29

Комбинированный метод определения параметров вращения Земли

Демонстрируется комбинированный метод определения параметров вращения Земли, который на основе итерационной процедуры позволяет сопрягать конечно-элементное решение с точным решением уравнения Лапласа. Это дает возможность более адекватно учитывать геометрические и реологические неоднородности структуры внутреннего строения Земли. В рамках метода определяется вынужденная нутация для упрощенной динамической модели Земли и проводится сравнение с соответствующими результатами Молоденского и Вара.

КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ОБЕРТАННЯ ЗЕМЛІ, Лубков М. В. — Демонструється комбінований метод визначення параметрів обертання Землі, який на основі ітераційної процедури дозволяє сполучати скінченно-елементний розв'язок із точним розв'язком рівняння Лапласа. Це дає можливість адекватніше врахувати геометричні та реологічні неоднорідності структури внутрішньої будови Землі. В рамках методу визначається збурена нутація для спрощеної динамічної моделі Землі та проводиться порівняння із відповідними результатами Молоденського і Вара.

COUPLED FINITE ELEMENT METHOD FOR THE EARTH'S ORIENTATION PARAMETER PROBLEMS, by Lubkov M. V. — We describe the combined approach to the Earth's orientation parameter problems. The approach allows one to couple the finite element method with the solution of the Laplace equation on the basis of iteration procedure. This makes possible to calculate heterogeneties of both geometrical and rheological characters into the Earth's structure. In the framework of this approach, forced nutation of the simplified dynamical Earth's model is determined and a comparison with the corresponding results of Molodensky and Wahr is carried out.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время предложено достаточно много процедур определения параметров вращения Земли (прецессии, нутации, движения полюса, всемирного времени). Однако лучших результатов достигли полуаналитические теории [1, 11, 12], в основе которых лежит подход [15]. В то же время некоторые параметры внутреннего строения Земли определяются из условия наилучшего согласия предвычисленных нутационных амплитуд с наблюдаемыми. В связи с этим актуальными являются подходы, позволяющие сделать бóльший акцент на детальный учет структуры внутреннего строения Земли. Одним из таких подходов является вариационный конечно-элементный метод, который имеет ряд преимуществ перед традиционными методами конечных разностей и спектральным методом. Известно, что метод конечных разностей, основанный на аппроксимации низкого порядка, и спектральный метод, основанный на аппроксимации полиномами высокой степени, эффективны только в регулярных областях правильной геометрической формы с достаточно гладкими граничными условиями. В то же время использование полиномиальной интерполяции низкого порядка вместе с изопараметрическим преобразованием делает метод конечных элементов мощным средством для решения задач с границами сложной формы и разрывными граничными условиями [7]. Это позволяет более детально учитывать неоднородности геометрического и реологического характера в структуре внутреннего строения Земли.

С другой стороны, метод конечных элементов гибок и универсален. Его модульная структура позволяет легко адаптировать программы к любому изменению условий задачи.

Перечисленные выше соображения могут служить мотивацией для применения вариационной конечно-элементной методики в задачах определения параметров вращения Земли. Однако метод конечных элементов в чистом виде не позволяет определять релаксацию гравитационного поля Земли, связанную с ее деформированием. С другой стороны, как было показано в работе [17], данная проблема может быть преодолена в ходе итерационной процедуры, где на каждом шаге итерации конечно-элементное решение определяется на основе уточненного изменения гравитационного потенциала деформируемой Земли. В то же время указанные изменения гравитационного потенциала определяются на основе точного решения уравнения Лапласа по параметрам, определяемым конечно-элементной задачей на соответствующем шаге итерации.

Ниже с помощью комбинированного метода приводится расчет вынужденной нутации вращающейся самогравитирующей Земли, состоящей из упругой мантии, жидкого внешнего ядра и твердого внутреннего ядра, без учета океанической и атмосферной нагрузок.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что Земля является двухосным эллипсоидом вращения с главными моментами инерции A и C, имеет твердое внутреннее ядро, жидкое внешнее ядро с геометрическим сжатием e, а также упругую изотропную неоднородную мантию и земную кору в форме оболочки, мало отличающейся от сферической, с главными моментами инерции A_m и C_m. При этом жидкое ядро может изменять свое положение относительно мантии. Земля в целом является самогравитирующим телом, которое можно считать находящимся в состоянии гидростатического равновесия. Она вращается вокруг собственной оси со скоростью Ω, испытывая нутацию и приливные воздействия со стороны Луны и Солнца. Влияние океанических и атмосферных нагрузок нами не учитывается. Инерциальное взаимодействие между ядром и мантией существенным образом зависит только от эллиптичности жидкого ядра и практически не зависит от эллиптичности мантии [5]. С другой стороны, приливные силы относительно постоянны во времени и медленно изменяются по сравнению со свободными упругими колебаниями в мантии. В связи с этим будем пренебрегать сжатием и динамическими эффектами в упругой оболочке и будем учитывать действия относительного эйлеровского, кориолисовского и центробежного ускорений на жидкое эллиптическое ядро. Далее, применяя аппарат, позволяющий исключить статические значения тензора напряжений в упругой оболочке и жидком ядре, определяемые условием гидростатического равновесия Земли [14], приходим к уравнению равновесия в оболочке и уравнению движения в жидком ядре относительно приливных воздействий, представленных в тиссерановой системе отсчета (X, Y, Z) [14]:

$$0 = \mathrm{grad}\,[V_e + V_1 + u_R\, g(R)] - \mathrm{div}\mathbf{u}\,\mathrm{grad}W + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\mathbf{P}_1\,, \tag{1}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} + 2\Omega\times\dot{\mathbf{u}} = \mathrm{grad}\left[V_e + V_1 + u_R\, g(R) + \left(1 + \frac{\sigma}{\Omega}\right)\varphi\right] - 2\,\frac{\sigma}{\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,e_z + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\mathbf{P}_2\,. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещения, $V_e = k(xz\cos\sigma t + yz\sin\sigma t)$ — тессеральная часть приливного потенциала волны, k — амплитуда суточной волны, $\varphi = -\Omega^2\tau_P(xz\cos\sigma t + yz\sin\sigma t)$ — изменение центробежного потенциала, вызванное нутацией, $\tau_P = \tau_r[e + (\sigma + \Omega)/\Omega]/[e + A_m(\sigma + \Omega)/(A\Omega)]$ — амплитуда суточного движения полюса для модели Пуанкаре [3] жесткой оболочки с жидким ядром, $\tau_r = k(C - A)/[\Omega^2 C - A\Omega(\sigma + \Omega)]$ — амплитуда суточного движения полюса абсолютно твердой Земли, $V_1 = k_1(xz\cos\sigma t + yz\sin\sigma t)$ — изменение гравитационного потенциала, вызванное деформированием Земли, k_1 — релаксационная амплитуда гравитационного потенциала соответствующей суточной волны, W — самогравитирующий потенциал, ρ — плотность, σ — частота приливной суточной волны, R — расстояние от центра Земли, u_R — радиальная составляющая перемещения, $g(R)$ — ускорение свободного падения, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ — изменения тензоров напряжений, вызванные приливными деформациями в упругой оболочке и жидком ядре соответственно.

Полагая, что колебания в жидком ядре происходят с частотой σ вынуждающей приливной волны, и принимая во внимание твердость внутреннего ядра и отсутствие нагрузок на поверхности Земли, составим функционалы Лагранжа, выражающие полную энергию упругой оболочки и жидкого ядра в форме перемещений [10], в цилиндрической системе координат (z, r, φ), где ось r совпадает с тиссерановой осью Z:

$$\begin{aligned}Э_1 = \pi \iint_{F_S} [c_1(\varepsilon_{zz}^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2) + 4c_2\varepsilon_{zr}^2 + 2c_3(\varepsilon_{zz}\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi})]r\,dz\,dr - \\ - \pi\iint_{F_S} \Bigg\{2(k + k_1)rw + w\left(\frac{\partial w}{\partial z}\cos\alpha + 2\,\frac{\partial u}{\partial z}\sin\alpha\right) g(R) + \\ + 2w(w\cos\alpha + 2u\sin\alpha)g_R'\cos\alpha - 2w\left[\frac{\partial w}{\partial z} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right)\right]g(R)\cos\alpha + \\ + 2(k + k_1)zu + u\left(2\,\frac{\partial w}{\partial r}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial r}\sin\alpha\right)g(R) + \\ + 2u(2w\cos\alpha + u\sin\alpha)g_R'\sin\alpha - 2u\left(2\,\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) g(R)\sin\alpha\Bigg\}\rho\,r\,dz\,dr,\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}Э_2 = \pi\iint_{F_S} [c_4(\varepsilon_{zz}^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2) + 2c_4(\varepsilon_{zz}\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi})]r\,dz\,dr - \\ - \pi\iint_{F_S} [\sigma(\sigma + 2\Omega)w^2 + \sigma^2u^2]\,\rho\,r\,dz\,dr - \\ - 2\pi \iint_{F_S} [\Omega(\Omega + \sigma)\tau_P w + \Omega(\Omega - \sigma)\tau_P u]\rho\,r\,dz\,dr +\end{aligned}$$

$$+ \pi \iint\limits_{F_s} \left[2(K + K_1) r w + w \left(\frac{\partial w}{\partial z} \cos\alpha + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \sin\alpha \right) g(R) + \right.$$

$$+ 2w(w\cos\alpha + 2u\sin\alpha) g_R' \cos\alpha + 2(k + k_1) z u + u \left(2 \frac{\partial w}{\partial r} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial r} \sin\alpha \right) g(R) +$$

$$\left. + 2u(2w\cos\alpha + u\sin\alpha) g'_R \sin\alpha \right] \rho r dz dr. \qquad (4)$$

Здесь $c_1 = (\lambda + 4\mu)/3$, $c_2 = \mu$, $c_3 = (\lambda - 2\mu)/3$, $c_4 = \lambda_1/3$, λ, μ — параметры Ламе упругой оболочки, λ_1 — параметр Ламе жидкого ядра, ε_{ij} — компоненты тензора деформации, w, u — компоненты перемещений вдоль осей z и r соответственно, F_s — меридиональная площадь сечения Земли, $\cos\alpha = z/R$, $\sin\alpha = r/R$.

МЕТОДИКА КОМБИНИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для решения системы уравнений (1), (2) при жестком внутреннем ядре и отсутствии внешних нагрузок на поверхности Земли применяется метод конечных элементов в форме перемещений, основанный на минимуме полной энергии системы (вариационный принцип Лагранжа [6]), который сводится к решению системы вариационных уравнений для упругой оболочки и жидкого ядра:

$$\delta Э_1(\mathbf{u}_i) = 0, \qquad \delta Э_2(\mathbf{u}_i) = 0. \qquad (5)$$

При решении системы уравнений (5) используется восьмиузловой изопараметрический четырехугольный криволинейный конечный элемент [6]. В качестве глобальной системы координат, где объединяются все конечные элементы, на которые разбивается Земля, используется цилиндрическая система координат (z, r, φ). В качестве локальной системы координат, в которой определяются аппроксимирующие функции элемента и проводится численное интегрирование, используется нормализованная система координат (ξ, η).

В качестве функций аппроксимации в пределах восьмиузлового элемента используются функции формы вида [6]

$$\varphi_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1), \quad \varphi_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1),$$
$$\varphi_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1), \quad \varphi_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1),$$
$$\varphi_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \qquad \varphi_6 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi), \qquad (6)$$
$$\varphi_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \qquad \varphi_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi).$$

Меридиональные координаты области сечения z, r, соответствующие компоненты перемещений w, u, компоненты деформаций ε_{zz}, ε_{rr}, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, ε_{zr} в пределах конечного элемента аппроксимируются функциями (6):

$$z = \sum_{i=1}^{8} z_i \varphi_i, \quad r = \sum_{i=1}^{8} r_i \varphi_i, \quad w = \sum_{i=1}^{8} w_i \varphi_i, \quad u = \sum_{i=1}^{8} u_i \varphi_i,$$
$$\varepsilon_{zz} = \sum_{i=1}^{8} \Phi_i w_i, \quad \varepsilon_{rr} = \sum_{i=1}^{8} \Psi_i u_i, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\varphi_i}{r} u_i, \quad \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} (\Psi_i w_i + \Phi_i u_i), \qquad (7)$$

где

$$\Phi_i = \frac{1}{|J|}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}\frac{\partial r}{\partial \xi} \right), \qquad \Psi_i = \frac{1}{|J|}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} \right),$$

а $J = \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\dfrac{\partial r}{\partial \eta} - \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\dfrac{\partial r}{\partial \xi}$ — якобиан перехода $(z, r) \to (\xi, \eta)$.

Исходя из соотношений (3)—(7), приходим к системам линейных алгебраических уравнений, записанным для каждого конечного элемента p в нормализованной системе координат ξ, η:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial Э_{\mathrm{p}1,2}}{\partial w_1} = A_{11}^{\mathrm{p}1,2} w_1 + B_{11}^{\mathrm{p}1,2} u_1 + A_{12}^{\mathrm{p}1,2} w_2 + B_{12}^{\mathrm{p}1,2} u_2 + \ldots \\
+ A_{18}^{\mathrm{p}1,2} w_8 + B_{18}^{\mathrm{p}1,2} u_8 - L_1^{\mathrm{p}1,2} = 0, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\frac{\partial Э_{\mathrm{p}1,2}}{\partial u_8} = C_{81}^{\mathrm{p}1,2} w_1 + D_{81}^{\mathrm{p}1,2} u_1 + C_{82}^{\mathrm{p}1,2} w_2 + D_{82}^{\mathrm{p}1,2} u_2 + \ldots + \\
+ C_{88}^{\mathrm{p}1,2} w_8 + D_{88}^{\mathrm{p}1,2} u_8 - M_8^{\mathrm{p}1,2} = 0.
\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $A_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}1}$, $B_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}1}$, $C_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}1}$, $D_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}1}$, $L_{\mathrm{j}}^{\mathrm{p}1}$, $M_{\mathrm{j}}^{\mathrm{p}1}$ — постоянные коэффициенты для упругой оболочки, $A_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}2}$, $B_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}2}$, $C_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}2}$, $D_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}2}$, $L_{\mathrm{j}}^{\mathrm{p}2}$, $M_{\mathrm{j}}^{\mathrm{p}2}$ — постоянные коэффициенты для жидкого ядра. Общий вид выражений для таких коэффициентов приведен в работе [2]. Суммируя системы уравнений (8) по всем конечным элементам, формируем глобальную систему алгебраических уравнений вида

$$\frac{\partial Э_{1,2}}{\partial w_{\mathrm{m}}} = \sum_{\mathrm{p}=1}^{\mathrm{K}} \frac{\partial Э^{\mathrm{p}1,2}}{\partial w_{\mathrm{m}}} = 0, \qquad \frac{\partial Э_{1.2}}{\partial u_{\mathrm{m}}} = \sum_{\mathrm{p}=1}^{\mathrm{K}} \frac{\partial Э^{\mathrm{p}1,2}}{\partial u_{\mathrm{m}}} = 0,$$

где K — количество конечных элементов, индекс m изменяется от 1 до 8.

В системе (9) интегрирование по площади меридионального сечения Земли заменено суммой интегралов, которые берутся по площадям отдельных конечных элементов.

Решение глобальной системы комплексных линейных алгебраических уравнений (9) осуществляется при помощи метода Гаусса без выбора главного элемента [6], вследствие чего определяются компоненты перемещений во всех узловых точках конечно-элементной сетки. По найденным узловым значениям перемещений определяются компоненты перемещений и другие интересующие величины в произвольной точке конечного элемента, т. е. в любой точке Земли.

Однако, как было указано выше, метод конечных элементов в чистом виде не позволяет учитывать релаксацию гравитационного поля Земли, связанную с ее деформированием. Для решения этой проблемы воспользуемся подходом, предложенным Ву [17]. Поскольку потенциал V_1, возникающий вследствие деформирования Земли, является гармонической функцией [14], то он должен удовлетворять уравнению Лапласа. С другой стороны, точное решение уравнения Лапласа может быть найдено из радиальных перемещений u_{R} на границах неоднородности слоев Земли [17], которые могут быть определены методом конечных элементов. Следуя примеру Ву, ограничимся рассмотрением однородного жидкого ядра и упругой оболочки, состоящей из N однородных радиальных слоев. Воспользовавшись формализмом [17], представим коэффициенты k_1 тессеральных гармоник внутри каждого однородного слоя в следующем виде:

$$k_1(N) = \frac{4\pi G}{5\beta}\left[\rho(\beta)u_{\mathrm{R}}(\beta) + \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{N}-1} u_{\mathrm{R}}(R_{\mathrm{i}})(\rho_{\mathrm{i}} - \rho_{\mathrm{i}+1})(R_{\mathrm{i}}/\beta)^4\right] \tag{10}$$

— в поверхностном слое;

$$k_1(0) = \frac{4\pi G}{5\beta}\left[\rho(\beta)u_{\mathrm{R}}(\beta)(R_0/\beta)^2 + \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{N}-1} u_{\mathrm{R}}(R_{\mathrm{i}})(\rho_{\mathrm{i}} - \rho_{\mathrm{i}+1})(R_0^2/R_{\mathrm{i}}\,\beta)\right] \tag{11}$$

— внутри жидкого ядра;

$$k_1(s) = \frac{4\pi G}{5\beta}\left[\rho(\beta)u_R(\beta)(R_s/\beta)^2 + \sum_{i=s+1}^{N-1} u_R(R_i)(\rho_i - \rho_{i+1})(R_s^2/R_i\beta) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{s} u_R(R_i)(\rho_i - \rho_{i+1})(R_i^4/R_s^3\beta)\right] \qquad (12)$$

— в s-м слое. Здесь G — гравитационная постоянная, R_i, ρ_i — внешний радиус и плотность i-го радиального слоя соответственно, β — радиус Земли.

Комбинированное решение задачи осуществляется на протяжении итерационного процесса:

1) вначале путем решения конечно-элементной задачи при условии $V_1 = 0$ определяются радиальные перемещения $u_R(R_i)$ на границах однородных слоев;

2) по значениям $u_R(R_i)$ и формулам (10)—(12) определяются значения потенциала V_1 внутри каждого слоя, отвечающие за деформирование Земли;

3) процедура 1—2 повторяется с учетом найденных значений потенциала V_1 вплоть до сходимости результатов (обычно 4—6 итераций).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫНУЖДЕННОЙ НУТАЦИИ ЗЕМЛИ

Обратная и прямая круговые суточные нутации, следуя Вару [16], определялись по формулам

$$\eta^+ = \eta_r^+(\eta^+/\eta_r^+) = -\frac{1}{2}(\varepsilon_r + \Psi_r \sin\varepsilon_0)(\eta^+/\eta_r^+),$$
$$\eta^- = \eta_r^-(\eta^-/\eta_r^-) = -\frac{1}{2}(\varepsilon_r - \Psi_r \sin\varepsilon_0)(\eta^-/\eta_r^-), \qquad (13)$$

где ε_0 — угол наклонения эклиптики. Относительные амплитуды обратных η^+/η_r^+ и прямых η^-/η_r^- круговых суточных нутаций вычислялись на основе комбинированной конечно-элементной методики, в результате процедуры расщепления матрицы деформационных градиентов на симметричную (деформационную) и антисимметричную (вращательную) части [14]. При вычислении в качестве стандартной модели Земли была использована

Обратная и прямая круговые суточные нутации, а также нутации в наклонности и долготе для основного, годового, полугодового и двухнедельного членов

Метод	η^+	η^-	ε	$\Psi\sin\varepsilon_0$
		Основная нутация		
Комбинированный метод	−8.0250″	−1.1765″	9.2015″	−6.8485″
Молоденский	−8.0243	−1.1802	9.2044	−6.8441
Вар	−8.0221	−1.1804	9.2025	−6.8417
		Годовая нутация		
Комбинированный метод	−0.0319	0.0261	0.0058	0.0580
Молоденский	−0.0317	0.0261	0.0056	0.0578
Вар	−0.0311	0.0257	0.0054	0.0568
		Полугодовая нутация		
Комбинированный метод	−0.5498	−0.0237	0.5735	−0.5261
Молоденский	−0.5476	−0.0244	0.5719	−0.5232
Вар	−0.5491	−0.0245	0.5736	−0.5246
		Двухнедельная нутация		
Комбинированный метод	−0.0935	−0.0039	0.0974	−0.0896
Молоденский	−0.0936	−0.0037	0.0972	−0.0899
Вар	−0.0941	−0.0036	0.0977	−0.0905

PREM-модель Дзивонского и Андерсона [8], а также закон распределения плотности Булларда [4], значения нутации для твердой Земли в наклонности ε_r и в долготе Ψ_r были взяты из теории Киношиты [9].

Нутации в наклонности и долготе определялись согласно [16] из формул

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_r \frac{1}{2}\left[(\eta^+/\eta_r^+) + (\eta^-/\eta_r^-)\right] - \Psi_r \sin\varepsilon_0 \frac{1}{2}\left[(\eta^+/\eta_r^+) - (\eta^-/\eta_r^-)\right], \\ \Psi_{\sin}\varepsilon_0 &= \varepsilon_r \frac{1}{2}\left[(\eta^+/\eta_r^+) - (\eta^-/\eta_r^-)\right] + \Psi_r \sin\varepsilon_0 \frac{1}{2}\left[(\eta^+/\eta_r^+) + (\eta^-/\eta_r^-)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Вычисленные в рамках восьмислойной PREM-модели значения обратных и прямых круговых суточных нутаций, а также нутаций в наклонности и долготе для основного, годового, полугодового и двухнедельного членов приведены в таблице. Для сравнения приведены значения, полученные Молоденским (модель 2) [13] и Варом (модель 1066А) [16], также соотнесенные с результатами Киношиты [9]. Видно, что все результаты вполне сопоставимы по точности. Для ее увеличения необходимо увеличивать количество слоев, а также использовать более мелкую конечно-элементную сетку.

1. *Жаров В. Е., Пасынок С. Л.* Теория нутации неупругой Земли // Астрон. журн.—2001.—**78**, № 11.—С. 1—15.
2. *Лубков М. В.* Определение статических чисел Лява и Шида методом конечных элементов // Геофиз. журн.—2004.—**26**, № 6.—С. 147—150.
3. *Молоденский С. М.* Приливы, нутация и внутреннее строение Земли. — М.: Наука, 1984.—214 с.
4. *Мориц Г.* Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли. — Киев, 1994.—240 с.
5. *Мориц Г., Мюллер А.* Вращение Земли: теория и наблюдения. — Киев: Наук. думка, 1992.—512 с.
6. *Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. — М.: Высшая школа, 1985.—329 с.
7. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. — М.: Мир, 1988.—352 с.
8. *Dziewonski A. M., Anderson D. L.* Preliminary reference Earth mode // Phys. Earth planet. Inter.—1981.—**25**.—P. 297—356.
9. *Kinoshita H.* Theory of the rotation of the rigid Earth // Celest. Mech.—1977.—**15**.—P. 277—326.
10. *Lubkov M. V.* The definition of the forced nutations by the finite element method // Proc. of the inter. conference JOURNEES—2003 / Eds A. Finkilstein, N. Capitaine. — Saint Petersburg, 2003.—P. 213—214.
11. *Mathews P. M., Buffet B. A., Herring T. A.* Forced nutations of the Earth: influence of inner core dynamics. I. Theory // J. Geophys. Res.—1991.—**96**, N B5.—P. 8219—8242.
12. *Mathews P. M., Herring T. A., Buffet B. A.* Improved models precession and nutation // Proc. IAU Colloquium 180 / Eds K. J. Johnston, D. D. McCarthy, B. J. Luzum, G. H. Kaplan. — Washington, DC, 2000.—P. 212—222.
13. *Melchior P.* The Tides of the Planet Earth: 2 nd. ed. — Oxford: Pergamon Press, 1983.—641 p.
14. *Moritz H.* Theories of nutation and polar motion II. — Columbus: Ohio State Univ., 1981.—176 p.—(Rept. 318. Dept. of Geodet. Sci. and Surveying).
15. *Sasao T., Okubo S., Saito M.* A simple theory on the dynamical effects of stratified fluid core upon nutational motion of the Earth // Proc. IAU Symp. 78 / Eds E. P. Fedorov, M. L. Smith, P. L. Bender. — Dordrecht: Reidel, 1980.—P. 165—183.
16. *Wahr J. M.* The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth // Geophys. J. Roy. Astron. Soc.—1981.—**64**, N 3.—P. 705—727.
17. *Wu P.* Using commercial finite element packges for the study of Earth deformations, sea levels and the state of stress // Geophys. J. Int.—2004.—**158**, N 2.—P. 401—408.

Поступила в редакцию 03.03.05