



УДК 536.12:539.377

© 2009

А. П. Слесаренко

Моделирование и управление нестационарными температурными режимами при ограничениях на управление и скорость нагрева

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

Пропонується підхід до побудови багатоступінчастого оптимального за швидкодією керування нагріванням тіл. Цей підхід ґрунтується на побудові для кожного етапу керування наближених аналітичних структур розв'язання завдань теплопровідності, які точно задовольняють нестационарні граничні умови з невизначеними функціями керування у вигляді невизначеної на кожному етапі керування температури зовнішнього середовища.

Застосування методу ортогональних проєкцій і системи обмежень на керування дало можливість уперше для кожного етапу керування одержати диференціальні рівняння для функцій керування і на їх основі наближені аналітичні розв'язки, а також прості трансцендентні або алгебраїчні рівняння для визначення моментів часу переключення та відключення керування.

Требования экономики, переход на более интенсивные режимы в технологических и производственных процессах выдвигают необходимость в решении проблемы максимального сокращения затрат энергии за счет максимального сокращения времени протекания теплового процесса. Эта проблема сводится к определению температурного режима скоростного нагревания при выполнении ограничений на управление, градиенты температурного поля, скорость нагрева и т. д. Так как все эти ограничения являются функциями времени, то при использовании принципа максимума Л. Г. Понтрягина необходимо решать экстремальную краевую задачу, которая, при заданных граничных условиях, сопровождается достаточно сложным процессом поиска недостающих начальных условий [1].

В работах [1–4] представлена классификация задач и методы управления температурными режимами, а также сделан обзор исследований в этой области.

Ниже предлагается приближенный аналитический подход к решению задачи оптимального управления нагревом тела при заданных ограничениях. Подход базируется на построении для каждого этапа управления приближенных аналитических структур решения задач

теплопроводности, содержащих в качестве неопределенных функций температуру внешней среды и точно удовлетворяющих нестационарным граничным условиям.

Совместное применение метода ортогональных проекций и заданной системы ограничений на управление позволило на каждом этапе управления получить в приближенном аналитическом подходе дифференциальные уравнения для функций управления и приближенные аналитические решения, а также трансцендентные или алгебраические уравнения для определения моментов времени переключения и отключения управления.

Рассмотрим задачу оптимального по быстродействию управления нагревом пластины в следующей постановке:

$$\frac{\partial T(x, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 T(x, \text{Fo})}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial T(x, \text{Fo})}{\partial x} + \text{Bi}(\text{Fo})T(x, \text{Fo}) \right) \Big|_{x=\pm l} = \text{Bi}(\text{Fo})t_{\text{cp}}(\text{Fo}), \quad (2)$$

$$T(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(\pm l, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \leq \mu t_0, \quad (4)$$

$$\max_x T(x, \text{Fo}_*) = \beta t_0, \quad (5)$$

$$\max_x T(x, \text{Fo}_*) - \min_x T(x, \text{Fo}_*) \leq \gamma t_0, \quad x \in [-l, l]. \quad (6)$$

В этом случае требуется найти такую функцию управления $0 \leq t_{\text{cp}}(\text{Fo}) \leq U_2(\text{Fo})$, чтобы при ограничении на максимальную температуру тела (5) за минимальное время Fo_* нагреть его, используя механизм конвективного теплообмена от начального состояния (3) в конечное $T(x, \text{Fo}_*)$ с учетом условий (4), (6). При этом на температурный режим в процессе нагрева наложено ограничение (4).

В задаче (1)–(6) $\psi(x)$, $\text{Bi}(\text{Fo})$ — заданные функции; μ , β , γ — заданные коэффициенты в условиях (4)–(6); t_0 — верхний предел допустимого управления.

Задача (1)–(6) в работе [3] решена при $l = 1$; $\text{Bi} = 0,5$; $\beta = 0,8$; $\mu = 0,175$; $\gamma = 0,02$; $\psi(x) = 0$

$$U_2 t_0^{-1} = \begin{cases} 0,5\text{Fo}, & 0 \leq \text{Fo} \leq 2, \\ 1, & \text{Fo} > 2 \end{cases} \quad (7)$$

с помощью традиционного в математической физике аналитического метода решения уравнения теплопроводности.

Структуру решения задачи (1)–(6), точно удовлетворяющую нестационарному граничному условию для любого момента времени, построим в виде

$$T(x, \text{Fo}) = t_{\text{cp}}(\text{Fo}) + \Phi(x, C_0(\text{Fo}), \dots, C_n(\text{Fo})) - \omega(x) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi(x, C_0(\text{Fo}), \dots, C_n(\text{Fo}))}{\partial x} + \omega(x) \text{Bi}(\text{Fo}) \Phi(x, C_0(\text{Fo}), \dots, C_n(\text{Fo})), \quad (8)$$

где для данной задачи $\omega(x) = (1 - x^2)/2$.

Если вместо условия (2) заданы условия

$$\left. \left(\frac{\partial T(x, Fo)}{\partial x} - Bi_1(Fo)T(x, Fo) \right) \right|_{x=0} = Bi_1(Fo)t_{cp1}(Fo);$$

$$\left. \left(\frac{\partial T(x, Fo)}{\partial x} + Bi_2(Fo)T(x, Fo) \right) \right|_{x=a} = Bi_2(Fo)t_{cp2}(Fo),$$

то структуру решения задачи теплопроводности, точно удовлетворяющую нестационарному граничному условию третьего рода, построим в виде

$$T(x, Fo) = [t_{cp1}(Fo)\omega_2^2 + t_{cp2}(Fo)\omega_1^2][\omega_1^2 + \omega_2^2]^{-1} + \Phi(x, C_0(Fo), \dots, C_n(Fo)) - \\ - \omega_{12}D_1^{(12)}\Phi(x, C_0(Fo), \dots, C_n(Fo)) + \omega_1\omega_2a^{-2}[Bi_1(Fo)\omega_2 + Bi_2(Fo)\omega_1] \times \\ \times \Phi(x, C_0(Fo), \dots, C_n(Fo)),$$

где $D_1^{(12)} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \omega_{12}}{\partial y}$; $\omega_1 = x$; $\omega_2 = a - x$; $\omega_{12} = x(a - x)a^{-1}$, $t_{cp1}(Fo)$ и $t_{cp2}(Fo)$ — функции управления при двухстороннем управлении нагревом пластины.

В первом приближении $\Phi(x, C_0(Fo), \dots, C_n(Fo)) = C_0(Fo)$, тогда структура (8) решения задачи (1)–(6) для первого интервала во времени на первом этапе управления с учетом условия (7) будет иметь вид

$$T_1(x, Fo) = t_{cp}(Fo) + C_0^{(1)}(Fo) + \frac{1 - x^2}{2} Bi C_0^{(1)}(Fo) = 0,5Fo + C_0^{(1)}(Fo)(1,25 - 0,25x^2).$$

Подставляя функцию $T_1(x, Fo)$ в уравнение (1) и применяя метод ортогональных проекций [5], для функции $C_0^{(1)}(Fo)$ получим

$$C_0^{(1)}(Fo) = \beta_1 \exp\left(-\frac{3}{7}Fo\right) - 1.$$

Тогда для первого этапа управления решение задачи теплопроводности получим в виде

$$T_1(x, Fo) = 0,5Fo + 0,25 \left[\beta_1 \exp\left(-\frac{3}{7}Fo\right) - 1 \right] (5 - x^2). \quad (9)$$

Начальное условие (3) точно выполняется при $\beta_1 = 1$. Для определения момента времени Fo_1 переключения управления, применяя условие (4), получим уравнение

$$\frac{7}{3} \exp\left(-\frac{3}{7}Fo_1\right) = 0,325,$$

из решения которого следует, что $Fo_1 = 0,645$. По данным работы [3], $Fo_1 = 0,65$.

Решение задачи в первом приближении, на втором этапе управления, точно удовлетворяющее условию (2) при неизвестных функциях $C_0^{(2)}(Fo)$ и $t_{2cp}(Fo)$, построим в виде

$$T_2(x, Fo) = t_{2cp}(Fo) + 0,25C_0^{(2)}(Fo)(5 - x^2). \quad (10)$$

Используя условие (4) для функции (10), получим уравнение

$$\frac{dC_0^{(2)}}{dFo} + 0,175 = -\frac{dt_{2cp}(Fo)}{dFo}. \quad (11)$$

Применяя метод ортогональных проекций к уравнению (1) для функции (10), найдем $C_0^{(2)}(Fo)$ из решения соответствующего дифференциального уравнения в виде

$$C_0^{(2)}(Fo) = \beta_2 \exp(-3Fo) - 0,35.$$

Для функции $t_{2cp}(Fo)$, применяя условие $t_{1cp}(Fo) = t_{2cp}(Fo)$, получим $t_{2cp}(Fo) = \beta_2[0,144 - \exp(-3Fo)] + 0,175Fo + 0,21$, где из условия

$$\int_0^1 [T_2(x, Fo_1) - T_1(x, Fo_1)] dx = 0 \quad (12)$$

получим $\beta_2 = 0,75$.

Момент времени Fo_2 переключения управления определяется из условия (7). При этом из уравнения $t_{2cp}(Fo_2) = 1$ получим $Fo_2 = 3,91$. По данным работы [3], $Fo_2 = 3,86$.

Аналитическую структуру решения для третьего интервала во времени на третьем этапе управления, точно удовлетворяющую условию (2), с учетом условия (7), построим в виде $T_3(x, Fo) = 1 + 0,25C_0^{(3)}(Fo)(5 - x^2)$. Функцию $C_0^{(3)}(Fo)$ находим аналогично, как и для предыдущих интервалов во времени. Неопределенный коэффициент β_3 определяется при $k = 2$ из условия $\int_0^1 [T_3(x, Fo_2) - T_2(x, Fo_2)] dx = 0$. При этом для функции $T_3(x, Fo)$ получим

$$T_3(x, Fo) = 1 - 0,4655 \exp\left(-\frac{3}{7}Fo\right)(5 - x^2). \quad (13)$$

Момент времени переключения управления определяется из условия (5) и приводит к решению уравнения $T_3(1, Fo_3) = 0,8$ при $Fo_3 = 5,206$. По данным работы [3], $Fo_3 = 5,2$.

Аналитическую структуру решения исходной задачи для четвертого интервала во времени на четвертом этапе управления, точно удовлетворяющую условию (2), построим в виде

$$T_4(x, Fo) = t_{4cp}(Fo) + 0,25C_0^{(4)}(Fo)(5 - x^2). \quad (14)$$

Используя условия (4), получим

$$t_{4cp}(Fo) = 0,8 - C_0^{(4)}(Fo); \quad \frac{dt_{4cp}(Fo)}{dFo} = -\frac{dC_0^{(4)}(Fo)}{dFo}.$$

Применяя метод ортогональных проекций к уравнению (1) для функции (14), получим

$$\frac{dC_0^{(4)}(Fo)}{dFo} + 3C_0^{(4)}(Fo) = 0,$$

$$\frac{dt_{4cp}(Fo)}{dFo} = 3\beta_4 \exp(-3Fo),$$

$$t_{4cp}(Fo) = -\beta_4 \exp(-3Fo) + 0,8,$$

$$T_4(x, Fo) = t_{4cp}(Fo) + 0,25\beta_4 \exp(-3Fo)(5 - x^2).$$

Из условия равенства температуры в момент времени Fo_3 для β_4 получим $\beta_4 = -0,2 \times \exp(3Fo_3)$. Время отключения управления определяется из условия (6) и приводит к решению уравнения $3(Fo_3 - Fo_*) = \ln 0,4$ при $Fo_* = 5,51$. По данным работы [3], $Fo_* = 5,6$.

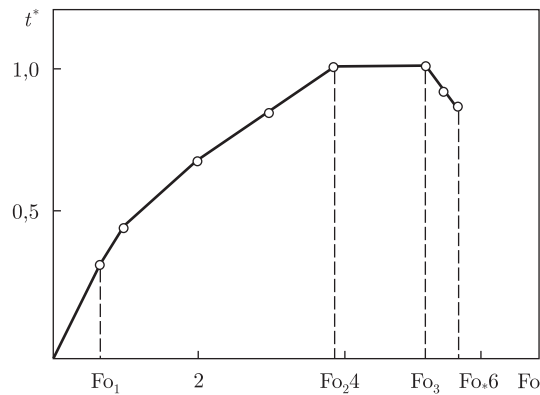


Рис. 1. Четырехступенчатое управление нагревом пластины

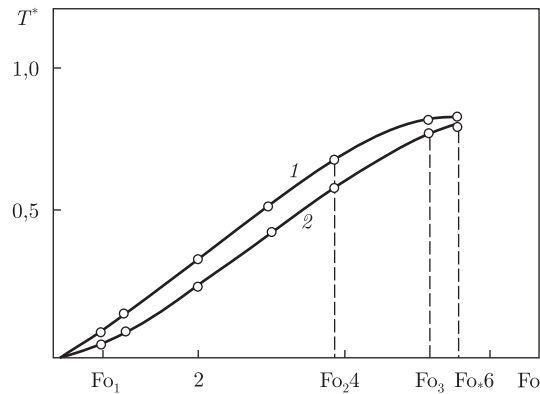


Рис. 2. Распределение температуры пластины $T^*(0, Fo)$ и $T^*(1, Fo)$ во времени

Четырехступенчатое управление нагревом пластины представлено на рис. 1 $t^* = t_{cp}(Fo)t_0^{-1}$. На рис. 2 кривые 1 и 2 иллюстрируют распределение температуры пластины $T^* = T(1, Fo)/t_0$ и $T^* = T(0, Fo)/t_0$ во времени. Результаты, полученные в работе для четырех интервалов во времени, представлены на рис. 1 и 2 точками.

Предложенный подход позволяет эффективно построить оптимальное по быстродействию многоступенчатое управление нестационарными тепловыми режимами тел простой формы, включая сплошные и полые цилиндры и шары при рассмотренных выше ограничениях. При этом на каждом этапе многоступенчатого управления в явном виде становится возможным получить дифференциальные уравнения для функций управления и простые алгебраические и трансцендентные уравнения для определения моментов времени переключения и отключения управления. Получение результатов решения для функций управления в задачах оптимального управления нестационарными температурными режимами в виде компактных аналитических выражений с элементарными функциями представляет определенный научно-технический интерес при использовании их в соответствующих электронных блоках управления температурными режимами.

1. Тимошпольский В. И., Постольник Ю. С., Андрианов Д. Н. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. – Минск: Беларус. навука, 2005. – 560 с.
2. Вигаж В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.

3. *Вигаж В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наук. думка, 1979. – 359 с.
4. *Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. Н.* Управление нагревом металла. – Москва: Металлургия, 1981. – 439 с.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – Москва; Ленинград: Физматгиз, 1962. – 695 с.

*Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

Поступило в редакцию 01.08.2008

A. P. Slesarenko

The simulation and the control over nonstationary temperature modes under restrictions on the control and the heating rate

An approach to the construction of the best on processing, multistep control over the heating of a body has been proposed. The approach is based on the construction of approximate analytical structures of solving the heat conduction problems for each controlling stage. The structures precisely meet nonstationary boundary conditions with undefined controlling functions in the form of an ambient temperature undefined for each controlling stage. Using the orthogonal projection method and a system of constraints on the control has given an opportunity to get differential equations for the controlling functions on each controlling stage for the first time. On this basis, the approximate analytical solutions and the simple transcendental or algebraic equations for the moments of switching and deactivating the control have been got.