

О. М. Шашенко, С. М. Гапеев

Модель породного середовища зі знеміцненням в задачах геомеханіки

(Представлено академіком НАН України Г. Г. Півняком)

Описаний один підхід до розв'язання чисельним методом геомеханічних задач, що враховують поведінку гірської породи за межею міцності. В основу підходу покладена модель деформування породного середовища, яка основана на аналогії із деформацією порідних зразків в режимі контрольованого руйнування. Показано, що результати, отримані за описаним підходом, є адекватними до аналітичного розв'язання та натурних результатів.

Моделювання нелінійного процесу руйнування гірських порід навколо підземних виробок зручно виконувати, використовуючи метод скінчених елементів (МСЕ). В основі такого моделювання лежать пружні розв'язки. Алгоритм враховує нелінійність досліджуваних моделей. Є два підходи до розв'язання цих задач.

Перший підхід оснований на розв'язанні задачі граничної пружної рівноваги (рис. 1, а). В процесі розв'язання в кожній точці приконтурного простору визначаються компоненти тензорів напружень і деформацій. Потім визначається еквівалентне напруження σ_e , яке порівнюється із межею міцності гірських порід на одноосьовий стиск R_c . Масштабний ефект враховується за допомогою коефіцієнта структурного ослаблення k_c . Скінченні елементи, в яких виконується умова

$$\sigma_e \geq R_c k_c, \quad (1)$$

вважаються зруйнованими. Вони утворюють область пластичних деформацій (ОПД) навколо виробки.

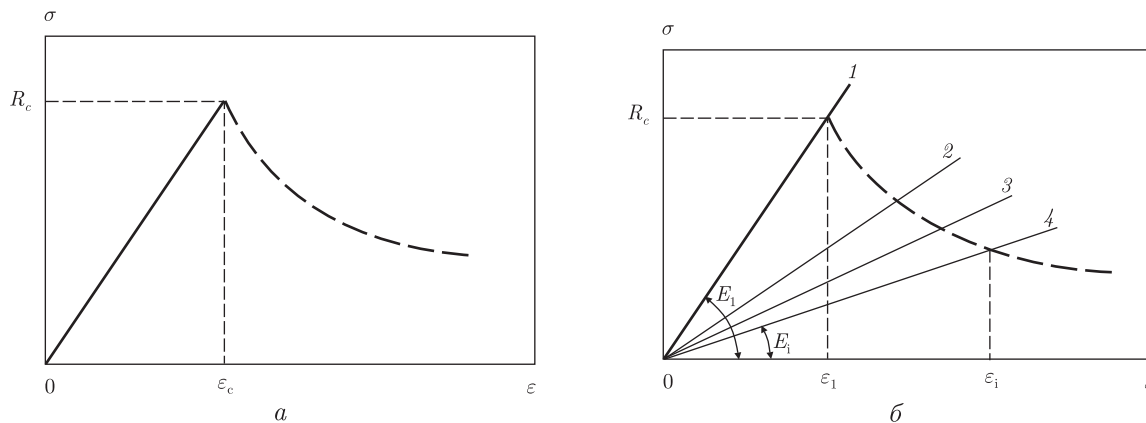


Рис. 1. Моделі деформування породного середовища: а — гранична пружна; б — гранична пружна зі змінними модулями Юнга

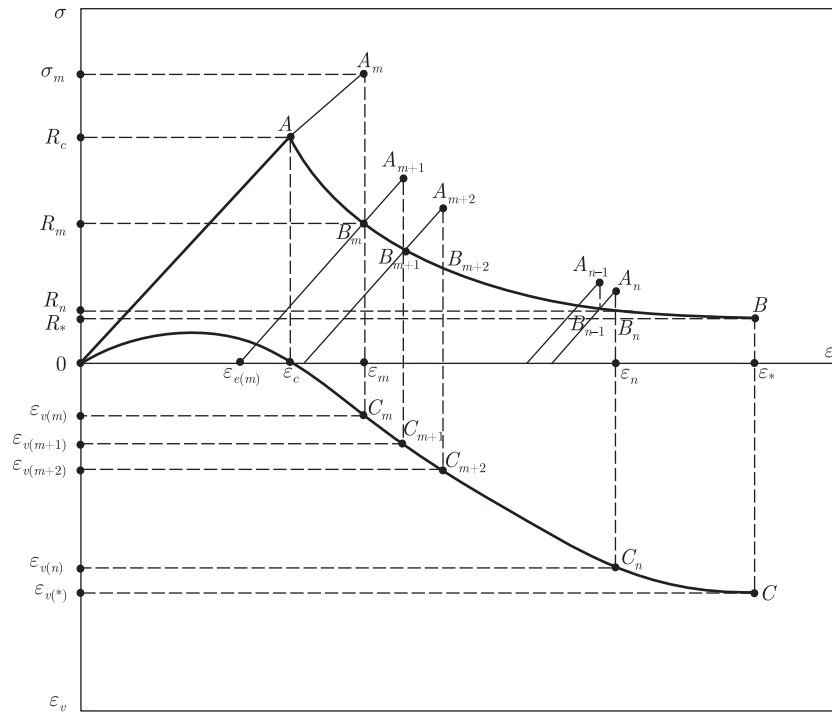


Рис. 2. Модель покровкового розв'язання, що враховує об'ємні деформації гірської породи за межею міцності

Другий підхід передбачає, що в процесі контрольованого руйнування гірських порід навколо виробки на графіках “ $\sigma - \varepsilon$ ” утворюється ділянка спадаючої кривої (рис. 1, б). Положення цієї ділянки можна визначити за допомогою січних модулів пружності E_i в процесі послідовних граничних пружних рішень на основі МСЕ, результати яких підсумовуються. Це дозволяє врахувати особливості моделі руйнування середовища. Розміри області пластичних деформацій визначаються так само, як і в першому підході.

Доведено [1], що наявність спадаючої ділянки діаграми деформування призводить до того, що в області пластичних деформацій так звана умова надстійкості за Адамаром [2] не виконується. Система рівнянь щодо деформацій стає невизначеною і обчислювальний процес зупиняється. Для врахування спадаючої ділянки на кривій деформування необхідні особливі умови.

Аналітичні дослідження. Сформулюємо таке припущення. Будь-яка точка породного масиву навколо виробки перебуває в умовах трикомпонентного напруженого стану. Його рівень такий, що навколо виробки утворюється область гірських порід з частково зруйнованими зв'язками. Об'ємний напружений стан можна замінити еквівалентним одноосовим, використовуючи деякий критерій міцності [3]. Гіпотеза відповідності має такий вигляд: характер зміни еквівалентних напружень в породному масиві навколо виробки в точності збігається з кривою руйнування породного зразка в режимі заданих деформацій.

Розглянемо діаграму деформування, що складається з трьох частин (рис. 2): лінійної ділянки пружної деформації OA , спадаючої ділянки граничних напружених станів AB і ділянки об'ємних деформацій OC . Точка A відповідає граничному напруженню і деформаціям пружності ($\sigma = R_c$, $\varepsilon = \varepsilon_c$, $\varepsilon_v = 0$), а точки B і C — напруженням і деформаціям остаточного руйнування ($\sigma = R_*$, $\varepsilon = \varepsilon_*$, $\varepsilon_v = \varepsilon_{v(*)}$). Нехай задана деяка кількість кроків n ,

за яку повинна бути досягнута деяка деформація ε_n , причому $\varepsilon_c < \varepsilon_n \leq \varepsilon_*$. Нехай також спадаюча гілка діаграми визначена деякою функцією [1]

$$\sigma = R_c - f\left(\varepsilon - \frac{R_c}{E}\right); \quad f(0) = 0, \quad \frac{df}{d\varepsilon} > 0. \quad (2)$$

Тут E — модуль Юнга.

Спадаюча гілка діаграми — це геометричне місце точок граничних пружних станів. Ці стани еквівалентні одноосьовому навантаженню породного зразка із залишковими пружними структурними зв'язками.

Припустимо, що при пружній деформації на ділянці OA на деякому кроці m гранична величина напруження R_c була перевищена так, що кінцевою точкою кроку є точка $A_m(\varepsilon_m, \sigma_m)$. Відповідно до функції (2) може бути визначена точка $B_m(\varepsilon_m, R_m)$, яка лежить на спадаючій ділянці AB діаграми деформування. Тоді величини ε_m , $\varepsilon_{e(m)} = R_m/E$, $\varepsilon_{d(m)} = \varepsilon_m - \varepsilon_{e(m)}$ є відповідно повними, пружними і дисипативними деформаціями в точці B_m . Об'ємну деформацію в точці B_m визначимо, використовуючи криву об'ємних деформацій ε_v . Тобто, точці B_m поставлена у відповідність точка C_m , що лежить на кривій об'ємних деформацій, і відповідне до неї значення $\varepsilon_{v(m)}$ (див. рис. 2).

На кроці $m + 1$ знову проводиться пружне розв'язання задачі, але вже виходячи з точки B_m . В результаті досягається точка A_{m+1} , відповідно до рівняння (2) визначаються точки B_{m+1} , C_{m+1} . Для розв'язання крайової задачі викладений вище підхід узагальнений на випадок об'ємного напруженого стану. В цьому випадку нормальне напруження і деформації можна розділити на гідростатичну ($\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}$) і девіаторну (s_{ij}, e_{ij}) частини:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \bar{\sigma}\delta_{ij} + s_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} &= \bar{\varepsilon}\delta_{ij} + e_{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут δ_{ij} — символ Кронекера.

Діаграма для гідростатичних складових може бути побудована за формулами

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{3}\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E} + \frac{R_p}{R_c} \frac{\sigma}{K}\right), \\ \bar{\sigma} &= \frac{1}{3} \frac{R_p}{R_c} \frac{\sigma}{K} \end{aligned} \quad (4)$$

та

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{v(*)} k \left(\frac{R_c - R}{R_c - R_*} \right)^l, \quad (5)$$

де R_p — межа міцності гірської породи на одноосьове розтягування; K — модуль Бріджмена; $\varepsilon_{v(*)}$ — гранична величина об'ємного стискування, що визначається з експерименту; $k \geq 1$, $l \geq 1$ — коефіцієнти, що визначаються експериментально; R_* — залишкова міцність (напруження остаточного руйнування).

У формулі (5) як змінну R використовують еквівалентне напруження, що враховує всі компоненти тензора напружень у разі об'ємного напруженого стану. Для визначення еквівалентного напруження можна використовувати формулу [4]

$$\sigma_e = \frac{1}{\psi} \left[(\psi - 1) \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \sqrt{(1 - \psi)^2 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + 4\psi \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2} \right] \leq R_c k_c. \quad (6)$$

Тут σ_1, σ_3 — найбільше та найменше головні напруження, $\psi = R_p/R_c$; k_c — коефіцієнт, що враховує масштабний фактор.

Аналітичні дослідження покладені в основу алгоритму чисельного розв'язання різних пружнопластичних задач.

Чисельне розв'язання пружнопластичної задачі механіки гірських порід. За допомогою алгоритму МСЕ, що побудований на основі підходу, описаного вище, розв'язувалася плоска задача про напружено-деформований стан однорідного ізотропного породного масиву, ослабленого одиночною виробкою з круговим контуром. Результати розв'язання порівнювалися з результатами аналітичного розв'язання аналогічної задачі, наведеного в [4]. Порівняння проводилося за параметрами: r_L — відносний радіус області пластичних деформацій ($r_L = R_L/R_0$); u_0 — величина переміщення гірських порід на контурі виробки.

Апроксимація досліджуваної області породного масиву здійснювалася чотиривузловими скінченними елементами. Фізико-механічні властивості гірських порід і граничні умови задачі приймалися такими: глибина розташування виробки $H = 350$ м; межа міцності на одноосьовий стиск $\sigma_c = 25$ МПа; радіус виробки $R_0 = 2,0$ м; коефіцієнт структурно-механічного ослаблення $k_c = 0,33$; граничне значення об'ємної деформації в умовах одноосьового стискування $\varepsilon_{v(*)} = -0,1$.

Величини порівнюваних параметрів, одержані з аналітичного і чисельного розв'язань, наведені в табл. 1.

Як видно, спостерігається досить задовільна збіжність чисельного і аналітичного розв'язань, що доводить можливість застосування даного алгоритму для розв'язання задач геомеханіки про напружено-деформований стан породного масиву навколо гірничої виробки.

Перевірка адекватності чисельного алгоритму. Адекватність чисельного алгоритму для моделі з розпушуванням була перевірена на відповідність результатам натурних вимірів і аналітичного розв'язання [4] для різних величин показника умов розробки $R_c k_c / (\gamma H)$. Крім того, порівнянню з натурними вимірами і аналітичним розв'язанням піддавалися і чисельні розв'язання для двох інших моделей деформування породного середовища (див. рис. 1).

Порівняння результатів також проводилося за параметрами r_L (відносний радіус області пластичних деформацій) і u_0 (величина переміщень на контурі виробки).

На рис. 3 наведені залежності відносного радіуса ОПД r_L від показника умов розробки, побудовані за шахтними вимірюваннями (криві 1–3), а також за результатами чисельних розрахунків для граничної пружної моделі (крива 5), моделі зі змінним модулем пружності (крива 6) і моделі, що враховує розпушування порід за межею міцності (крива 7). Як видно з рисунку, в цьому випадку всі моделі дають результати, досить близькі до кривої, що апроксимує результати багаточисельних натурних вимірів (крива 4), і до кривої, побудованої за результатами аналітичних розрахунків (крива 8).

Таблиця 1

Показник	Розв'язання		$\Delta, \%$
	аналітичне	чисельне	
r_L	3,60	3,33	7,50
$u_0, \text{ м}$	0,38	0,35	10,5

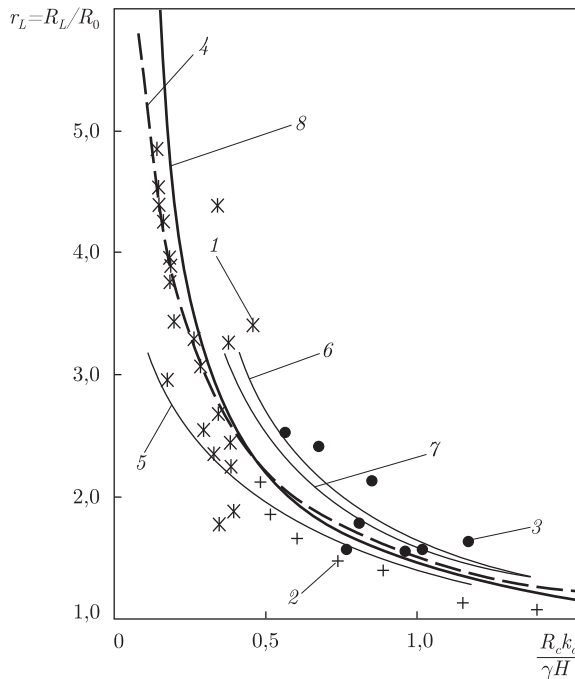


Рис. 3. Порівняння результатів натурних вимірів відносного радіуса ОПД і чисельного моделювання для різних моделей деформування середовища

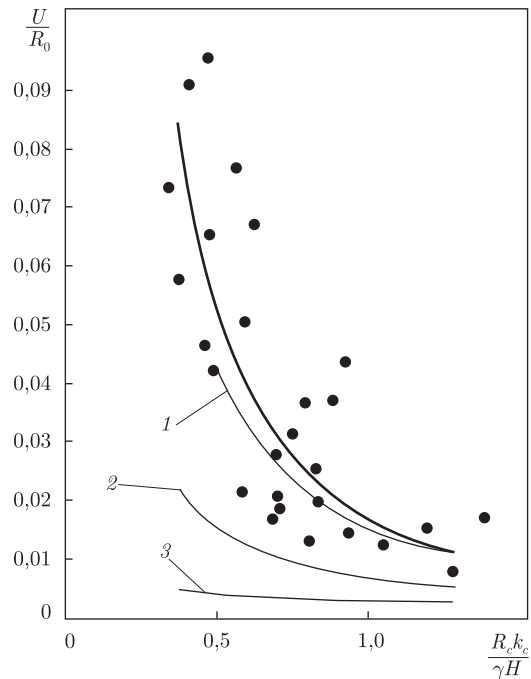


Рис. 4. Порівняння результатів натурних вимірів відносних переміщення контура виробки і чисельного моделювання для різних моделей деформування середовища

На рис. 4 показані графіки залежностей відносних переміщень на контурі виробки від того ж показника умов розробки. Очевидні відмінності результатів, одержаних для різних моделей деформування породного середовища: найменш адекватна гранична пружна модель (крива 3), найбільш адекватні результати розрахунків для моделі із спадаючою кривою (крива 1). Проміжне положення займає середовище зі змінним модулем пружності (крива 2).

На закінчення відзначимо наступне.

1. Отримані результати аналізу залежностей не суперечать наявним фізичним уявленням про деформацію породного середовища навколо виробки.

2. Порівняння результатів шахтних, аналітичних і чисельних досліджень доводить адекватність моделі деформування гірських порід, яка основана на аналогії із деформацією порідних зразків в режимі контрольованого руйнування.

3. Модель деформування гірських порід, що пропонується, може використовуватися для дослідження стану геомеханічних систем виробка — породний масив і одержання досить точних результатів.

Роботу виконано за підтримки CRDF, грант USB1-021-DP-027.

1. Шашенко А. Н., Янко В. И., Солодянкин А. В. Учет эффекта разупрочнения породного массива в задачах геомеханики // Наук. вісн. НГУ. – 2003. – № 7. – С. 29–33.
2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.
3. Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др. – Москва: Машгиз, 1956. – Т. 1. – 884 с.

4. Шашенко А. Н., Тулуб С. Б., Сдвижкова Е. А. Некоторые задачи статистической геомеханики. – Киев: Пульсари, 2001. – 243 с.

*Національний гірничий університет,
Дніпропетровськ*

Надійшло до редакції 16.05.2008

O. M. Shashenko, S. M. Gapeev

**A model of the rock medium with strength loss in problems of
geomechanics**

An approach to the numerical solution of geomechanical problems describing the behavior of rocks over the ultimate stress is proposed. It is based on the analogy with the deformation of rock samples in the controlled destruction mode. The results obtained within the approach agree with the analytic solution and the in situ results.