УДК 517.925

М.Г. МЕРКУР'ЄВ

ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ НЕЧІТКИХ ГІБРИДНИХ АВТОМАТІВ

Abstract: *Existing methods of investigation of fuzzy stability are based on proximity of distributions, that doesn't correspond to reality well. The paper proposes original definitions of fuzzy stability in Pytyev's theory of possibilities. Constructive conditions for stability of fuzzy hybrid automaton with linear right-hand part are obtained.*
Key words: *fuzzy hybrid automation, theory of possibilities, Liapunov function.*

Анотація: *Існуючі методи дослідження нечіткої стійкості базуються на близькості розподілів, що погано відповідає дійсності. В статті запропоновані оригінальні визначення нечіткої стійкості в теорії можливостей Питьєва. Одержані конструктивні умови стійкості нечіткого гібридного автомата з лінійною правою частиною.*
Ключові слова: *гібридний автомат, теорія можливостей, функція Ляпунова.*

Аннотация: *Существующие методы исследования нечёткой устойчивости основаны на близости распределений, что плохо отвечает действительности. В статье предложены оригинальные определения нечёткой устойчивости в теории возможностей Пытьева. Получены конструктивные условия устойчивости нечёткого гибридного автомата с линейной правой частью.*
Ключевые слова: *гибридный автомат, теория возможностей, функция Ляпунова.*

1. Вступ

Теорія нечітких множин та нечітка динаміка широко використовуються для опису процесів, в яких вхідні дані відомі з похибкою, і ця похибка не має статистичного розподілу. Наприклад, дана теорія придатна для опису соціальних явищ, катастроф, захворювань, обробки експертних даних та інших процесів, в яких об'єкт дослідження існує в єдиному екземплярі і статистику зібрати неможливо. Але традиційний підхід до нечіткої динаміки має свої вади.

В [1] стійкість тривіального розв'язку $y = 0$ нечіткої динамічної системи розглядається як $\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} H([y(t)]_\alpha, \{0\}) < \varepsilon$ при $y(t_0) < \delta$, де $H(A,B)$ – відстань Хаусдорфа між двома непорожніми множинами. Тобто, під "стійкістю" розуміється мала різниця між α-зрізами незбуреної та збуреної динамічної системи, але таке означення погано відповідає дійсності. Як контрприклад розглянемо дві невзаємодіючі нечіткі величини з одним і тим же розподілом. Подібне означення вважає такі величини ідентичними, хоча при реальному випробуванні різниця між ними може бути великою, а традиційна нечітка теорія Заде малопридатна для роботи з такими питаннями.

У даній роботі пропонується підхід, що базується на теорії можливостей Питьєва. Теорія можливостей описана в роботах [2], [3]. Використовуються нечіткі диференціальні рівняння, введені в роботі [4].

2. Нечіткі динамічні системи

Сформулюємо основні означення з теорії нечітких динамічних систем, які нам знадобляться для подальшого викладення матеріалу. Нехай заданий *PN*-простір $(X, \beta(X), P, N)$ і скінченновимірний простір $Y = R^n$ [3].

Означення 1. Множиною X_α, де $0 < \alpha \le 1$, назвемо сукупність $\{x \in X : P(\{x\}) \ge \alpha\}$.

Вважатимемо, що множина X_1 непорожня.

Означення 2. Нечіткою динамічною системою $y(y_0, t, x)$ зветься відображення $y: Y \times R^+ \times X \to Y$, для якого $y(y_0, t_0, x) = y_0$.

Означення 3. Пучком зветься відображення $y(t, x): R^+ \times X \to Y$, для якого $y(t_0, x) = y_0$.

Зокрема, нечітка динамічна система, якщо зафіксувати y_0, стає пучком.

Пучок будемо називати виродженим, якщо для всіх $x \in X_0$ він стягується в один розв'язок, тобто $y(y_0, t, x) = y(y_0, t)$.

Надалі будемо позначати через $\bar{y}$ фіксовані величини.

Означення 4. Нехай задано нечітку динамічну систему $y(y_0, t, x)$. Якщо для кожного $x \in X_1$ $y(y_0, t, x) = \bar{y}(t)$, функція $\bar{y}(t)$ зветься модальним розв'язком.

Означення 5. Пучок $y(\bar{y}_0, t, x)$ нечіткої динамічної системи $y(y_0, t, x)$ зветься стійким з рівнем $0 \le \alpha < 1$, якщо для всіх $x \in X$, для яких $P(\{x\}) > \alpha$, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta$ випливає $|y(y_0, t, x) - y(\bar{y}_0, t, x)| < \varepsilon$.

Якщо пучок стійкий з рівнем α, то він, очевидно, також стійкий з рівнем $\alpha_1 > \alpha$. Таким чином, множина тих α, для яких пучок стійкий, є відрізком $(\alpha_0, 1)$ – замкненим або незамкненим з лівого краю. Про число α_0 будемо казати "стійкий з точним рівнем α_0". Стійкість з рівнем 0 будемо також називати стійкістю з необхідністю 1.

Означення 6. Розв'язок $y(\bar{y}_0, t, \bar{x})$ нечіткої динамічної системи $y(y_0, t, x)$ зветься слабко стійким, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують $\delta(\varepsilon) > 0$, $\alpha(\varepsilon) < 1$ такі, що при $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta$, $x \in X_\alpha$ виконується $|y(y_0, t, x) - y(\bar{y}_0, t, \bar{x})| < \varepsilon$.

Процес нечіткого блукання $w(t, x)$ диференційований майже скрізь для будь-якого $x \in X_0$. Доведемо цей факт.

Лема 1. $\forall x \in X_0$ траєкторія $w(t, x)$ майже скрізь диференційована.

Доведення. З властивостей процесу нечіткого блукання маємо

$$P\left\{\|w(t_1, x) - w(t_2, x)\| \ge C|t_1 - t_2|\right\} = \sup\left\{P\{w(t_1, x) - w(t_2, x) = a\} : \|a\| \ge C|t_1 - t_2|\right\} =$$

$$= \sup\left\{\varphi\left(\frac{\left\|\Xi^{-1/2} a\right\|^2}{(t_1 - t_2)^2}\right) : \|a\| \ge C|t_1 - t_2|\right\} \le \varphi\left(\frac{\lambda_{\min}^2(\Xi^{-1/2}) C^2 (t_1 - t_2)^2}{(t_1 - t_2)^2}\right) = \varphi\left(\lambda_{\min}^2(\Xi^{-1/2}) C^2\right).$$

Звідси випливає, що

$$P\left\{\exists t_1 \ne t_2 : \|w(t_1, x) - w(t_2, x)\| \ge C|t_1 - t_2|\right\} \le \varphi\left(\lambda_{\min}^2(\Xi^{-1/2}) C^2\right).$$

Тому для будь-якого $\alpha \in (0,1)$ існує константа $L(\alpha) > 0$ така, що для будь-яких $x \in X_\alpha$, $t_1, t_2 \in R$ виконується умова Ліпшица: $\|w(t_1, x) - w(t_2, x)\| < L(\alpha)|t_1 - t_2|$. За теоремою Радемахера функція $w(t, x)$ майже скрізь диференційована. Лему доведено.

Функція $\dot{w}(t, x)$ визначена не в кожній точці $t \in R$, але її можна продовжити до нечіткого процесу, визначеного для кожного $x \in X_0$, $t \in R$, рівномірно обмеженого на кожній із множин $R \times X_\alpha$, $\alpha \in (0,1]$.

Тому похідна диференційованої функції Ляпунова $V(y)$ в кожному із станів $q \in Q$ в силу системи

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(y(s))ds + \int_{t_0}^{t} h(y(s), x)dw(s, x) \tag{1}$$

майже скрізь дорівнює

$$\dot{V}|_{gh}(y) = \frac{dV(y)}{dt} = \frac{dV(y)}{dy}\left[g(y(t)) + h(y(t), x)\dot{w}(t, x)\right]. \tag{2}$$

3. Стійкість нечіткого лінійного гібридного автомата

Побудуємо достатні умови стійкості стаціонарних станів нечітких лінійних гібридних автоматів. В [5] наведено означення чіткого гібридного автомата.

Дамо означення нечіткого гібридного автомата.

Означення 7. Гібридним автоматом з нечіткою правою частиною та чітким переключенням зветься сукупність $HA = (Q, Y, g, h, Init, Inv, Jump)$,

де $Q = \{1, 2, ..., N\}$ – множина дискретних станів;

$Y = R^n$ – множина неперервних станів;

$g, h : Q \times Y \to Y$ – права частина системи (1) для кожного локального стану. Позначимо $g_q(y) = g(q, y)$, $h_q(y) = h(q, y)$;

$Inv \subseteq Q \times Y$ – множина незмінності дискретного стану;

$Init \subseteq Inv$ – множина можливих початкових даних;

$Jump : Q \times Y \to \beta(Q \times Y)$ – механізм переключення з одного локального стану в інший.

Скороченою частиною гібридного автомата $HA = (Q, Y, g, h, Init, Inv, Jump)$ назвемо гібридний автомат $(Q, Y, g, Init, Inv, Jump)$.

Позначимо $y|_{q_1 \to q_2}$ всі y, на яких гібридний автомат переключається із стану q_1 у q_2. Припустимо, що заданий набір функцій типу Ляпунова V^q, $q \in Q$. Для скороченої частини будуємо послідовність

$$c^0 \in (0,C),\ \ c^1 = \max_{\substack{y^1\big|_{1\to 2} \\ V^1(y^1)=c^0}} V^2(y^1),\ \ c^2 = \max_{\substack{y^2\big|_{2\to 3} \\ V^2(y^2)=c_1}} V^3(y^2),\ldots,\quad c^N = \max_{\substack{y^N\big|_{N\to 1} \\ V^N(y^N)=c_{N-1}}} V^1(y^N)\,.$$

Гібридною функцією Ляпунова зветься такий набір функцій $V^q(y)$, для якого $V_q\,|_{g_q}\,(y) \le 0$.

Спершу розглянемо такі гібридні автомати $HA = (Q, Y, g, h, Init, Inv, Jump)$, для яких виконуються умови:

1. Для кожного стану $q \in Q$ права частина має вигляд $g_q(y) = A_q y$, $h_q(y) = B_q y$, де A_q та B_q – матриці $n \times n$.

2. Інваріантна множина кожного стану міститься в піраміді $G_q x \ge 0$, де матриця G_q має розмірність $m_q \times n$.

3. Переключення циклічне ($1 \to 2 \to \ldots \to N \to 1$) на гіперплощині $y = U_q z$, де $z \in R^{n-1}$, U_q – матриця $n \times (n-1)$, при цьому $Jump(q, y) = \{((q \bmod N) + 1, y)\}$ для $y = U_q z$, а для інших y $Jump(q, y) = \varnothing$.

Назвемо такі гібридні автомати лінійними гібридними автоматами першого типу.

Теорема 1. Нехай заданий нечіткий лінійний ГА $HA = (Q, Y, g, h, Init, Inv, Jump)$. Якщо для скороченого ГА $HA' = (Q, Y, g, Init, Inv, Jump)$ існують додатно визначені симетричні матриці H_q розміру $n \times n$, де $q \in Q$, такі, що:

1. $d_q = \max\limits_{\substack{G_q y \ge 0 \\ y^T y = 1}} y^T (A_q^T H_q + H_q A_q) y < 0$. (3)

2. Для кожного переключення $q \to (q \bmod N) + 1 = r$ матриця $U_q^T (H_r - H_q) U_q$ від'ємно напіввизначена, тоді $y = 0$ – слабко стійкий розв'язок гібридного автомата HA з параметрами стійкості

$$\alpha > \varphi\left(\left(\lambda_{\max}(\Xi^{-1/2}) \cdot \frac{\max\limits_q d_q \cdot \left(a \min\limits_q \lambda_{\min}(H_q)\right)^2}{|b|}\right)^2\right),\ \ \delta = \varepsilon \cdot \frac{\min\limits_q \lambda_{\min}(H_q)}{\max\limits_q \lambda_{\max}(H_q)}\,.$$

Доведення. Візьмемо будь-яке $\varepsilon > 0$. Покладемо $V_q(y) = y^T H_q y > 0$. За умов $y \ne 0$, $G_q y \ge 0$ та (3) виконується $\dot V^q\,|_g\,(y) = y^T (A_q^T H_q + H_q A_q) y \le \max\limits_q d_q \cdot |y|^2$.

Покладемо $a = \max\{a' : \{y : V_q(y) \le a'\} \subseteq B_\varepsilon(0)\}$, $\delta = \max\left\{\delta' : B_{\delta'}(0) \subseteq \{y : V_q(y) \le a\}\right\}$, де $B_r(y)$ – замкнена куля радіуса r. Тоді δ і a можна оцінити як $a \ge \varepsilon \cdot \min\limits_q \lambda_{\min}(H_q)$, $\delta \ge \varepsilon \cdot \dfrac{\min\limits_q \lambda_{\min}(H_q)}{\max\limits_q \lambda_{\max}(H_q)}$.

Покажемо, що траєкторія може покинути область $\{y : y \in Inv_q, V_q(y) \le a\}$ лише через одну з поверхонь $V_q(y) = a$, а не через площину переключення. Отже, розглянемо поведінку скороченої системи на переключенні $q \to (q \bmod N) + 1 = r$.

$V^r(y) - V^q(y) = y^T (H_r - H_q) y = z^T U_q^T (H_r - H_q) U_q z \le 0$.

Таким чином, при переключенні траєкторія залишиться в області $\{y : y \in Inv_q, V_q(y) \le a\}$.

Покажемо, що через границю $V_q(y) = a$ також залишити область неможливо.

Покладемо $\psi(a) = \max\limits_q d_q \cdot \left(a \min\limits_q \lambda_{\min}(H_q) \right)^2$. За таких умов

$$\dot{V}^q|_g\ (y)|_{y=a} = y^T (A_q^T H_q + H_q A_q) y \le \psi(a).$$

Візьмемо $\alpha > \varphi\left(\left(\lambda_{\max}(\Xi^{-1/2}) \cdot \dfrac{(1-k)|\psi(a)|}{\lambda_{\max}(B)} \right)^2 \right)$. За цих обмежень на кожній з поверхонь $V^q(y) = a$ маємо $|\dot{w}(t,x)| < \dfrac{(1-k)|\psi(a)|}{\lambda_{\max}(B)}$ і $\dot{V}^q|_g\ (y,\cdot) < -(1+k) M \sup\limits_{x \in X_\alpha} \dot{w}(t,x)$. Оскільки $\dot{V}^q|_g$ – неперервна функція, то для кожного $y \in Inv_q$ такого, що $V^q(y) = a$ та $\varepsilon = kM \sup\limits_{x \in X_\alpha} \dot{w}(t,x)$ існує $\delta_y > 0$ таке, що в δ_y-околі точки y $\left[\dot{V}^q|_{gh}\ (y,\cdot)\right]_\alpha < 0$. Візьмемо $D^q = \bigcup\limits_y B_{\delta_y}(y)$ і отримуємо: в усій області D^q $\left[\dot{V}^q|_{gh}\ (y,\cdot)\right]_\alpha < 0$. Щоб вийти назовні через поверхню $V^q(y) = a$, траєкторія повинна перетнути D^q.

Якщо припустити, що траєкторія увійде в D^q в момент часу t_1 і вийде назовні кривої $V^q(y) = a$ в момент t_2, одержуємо

$$V^q(t_2) = V^q(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}^q|_{gh}\ (y(t),x)\,dt < V^q(t_1).$$

Отримуємо суперечність, оскільки очевидно, що $V^q(t_2) = a$, а $V^q(t_1) < a$, що суперечить $V^q(t_2) < V^q(t_1)$. Таким чином, при $x \in X_\alpha$ траєкторія системи не може покинути область

$\{y : y \in Inv_q, V_q(y) \le a\}$ ні через границю $V_q(y) = a$, ні через поверхню переключення. Оскільки ця область лежить в кулі $B_\varepsilon(0)$, то виконується означення слабкої стійкості.

Теорему доведено.

Розглянемо інший тип нечітких гібридних автоматів, а саме:

1. Для кожного стану $q \in Q$ права частина має вигляд $g_q(y) = A_q y$, $h_q(y) = B_q y$, де A_q та B_q – матриці $n \times n$, $w(t, x)$ – одновимірний процес нечіткого блукання.

2. Інваріантна множина кожного стану міститься в піраміді $G_q x \ge 0$, де матриця G_q має розмірність $m_q \times n$.

3. Переключення циклічне ($1 \to 2 \to ... \to N \to 1$) на гіперплощині $y = U_q z$, де $z \in R^{n-1}$, U_q – матриця $n \times (n-1)$, при цьому $Jump(q, y) = \{((q \bmod N) + 1, y)\}$ для $y = U_q z$, а для інших y $Jump(q, y) = \varnothing$.

Назвемо цей тип гібридних автоматів лінійними гібридними автоматами другого типу.

Теорема 2. Якщо для деякого $\alpha \in (0,1)$ для лінійного гібридного автомата другого типу HA існує набір симетричних матриць H_q такий, що

1. $\max\limits_{\substack{Gy \ge 0 \\ y^T y = 1}} y^T (A_q^T H_q + H_q A_q) y + \left| B_q^T H_q + H_q B_q \right| \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)} \sigma \le 0$.

2. Для кожного переключення $q \to (q \bmod N) + 1 = r$ матриця $U_q^T (H_r - H_q) U_q$ від'ємно напіввизначена, тоді стаціонарний стан $y = 0$ гібридного автомата стійкий з рівнем α.

Доведення. Візьмемо будь-яке $\varepsilon > 0$. Покладемо $V_q(y) = y^T H_q y > 0$. Тоді

$$\dot{V}^q(y) = y^T (A_q^T H_q + H_q A_q) y + y^T (B_q^T H_q + H_q B_q) y \cdot \dot{w}(t, x) .$$

За умов $y \ne 0$, $G_q y \ge 0$ та 1 виконується

$$\begin{aligned} \dot{V}^q |_g (y) &= y^T (A_q^T H_q + H_q A_q) y + y^T (B_q^T H_q + H_q B_q) y \cdot \dot{w}(t, x) \le \\ &\le \left[\lambda_{\max}(A^T H + HA) + \left| B^T H + HB \right| \cdot \sigma \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)} \right] \cdot |y|^2 \le 0. \end{aligned}$$

Покладемо $a = \max\{a' : \{y : V_q(y) \le a'\} \subseteq B_\varepsilon(0)\}$, $\delta = \max\{\delta' : B_{\delta'}(0) \subseteq \{y : V_q(y) \le a\}\}$, де $B_r(y)$ – замкнена куля радіуса r. Тоді δ і a можна оцінити як $a \ge \varepsilon \cdot \min\limits_q \lambda_{\min}(H_q)$, $\delta \ge \varepsilon \cdot \dfrac{\min\limits_q \lambda_{\min}(H_q)}{\max\limits_q \lambda_{\max}(H_q)}$.

Покажемо, що траєкторія також може покинути область $\{y : y \in Inv_q, V^q(y) \le a\}$ лише через одну з поверхонь $V_q(y) = a$, а не через площину переключення. Отже, розглянемо поведінку скороченої частини на переключенні $q \to (q \bmod N) + 1 = r$.

$$V^r(y) - V^q(y) = y^T (H_r - H_q) y = z^T U_q^T (H_r - H_q) U_q z \le 0 .$$

Таким чином, при переключенні траєкторія залишиться в області $\{y : y \in Inv_q, V_q(y) \le a\}$.

Покажемо, що через границю $V^q(y) = a$ також залишити область неможливо. Оскільки $V^q(y(t_0)) = V^q(y(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \dot{V}^q(y(s)) ds$ (за умови, що за відрізок часу $[t_0, t]$ переключень не відбувається), а $\dot{V}^q(y(t)) \le 0$, звідси маємо, що $V^q(y(t)) \le V^q(y(t_0))$. Тому траєкторія не здатна перетнути границю $V^q(y) = a$. Таким чином, при $x \in X_\alpha$ траєкторія системи не може покинути область $\{y : y \in Inv_q, V^q(y) \le a\}$ ні через границю $V^q(y) = a$, ні через поверхню переключення. Оскільки ця область лежить в кулі $B_\varepsilon(0)$, то виконується означення стійкості з рівнем α .

Теорему доведено.

Теорема 3. Якщо для лінійного гібридного автомата HA виконується теорема 2 з підсиленою умовою 1:

1. $\max\limits_{\substack{Gy \ge 0 \\ y^T y = 1}} y^T (A_q^T H_q + H_q A_q) y + \left| B_q^T H_q + H_q B_q \right| \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)} \sigma < 0$,

то гібридний автомат HA має асимптотично стійкий з рівнем α стаціонарний стан $y = 0$.

Доведення. За теоремою 2 автомат HA має стійкий стаціонарний стан $y = 0$. Доведемо збіжність $y(t) \to 0$.

В теоремі 2 показано, що $V^q(y(t_0)) = V^q(y(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \dot{V}^q(y(s)) ds$ та $V^r(y) - V^q(y) \le 0$. Тобто $V^{q(t)}(y(t))$ монотонно спадає і в межах локального стану, і на переключеннях. Оскільки $V^{q(t)}(y(t))$ додатне, то за принципом Больцано-Вейєрштрасса $V(y(t)) \to v_1 \ge 0$.

Доведемо, що $v_1 = 0$.

Припустимо, що це не так. Позначимо

$$k = \max_{q \in Q} \left| \lambda_{\max} (A_q^T H_q + H_q A_q) + \left| B_q^T H_q + H_q B_q \right| \cdot \sigma \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)} \right|, \ v_0 = V^{q0}(t_0) .$$

Застосовуючи нерівність Релея-Рітца

$$\lambda_{\min}(H_q) \cdot |y|^2 \le y^T H y = V^q(y) \le \lambda_{\max}(H_q) \cdot |y|^2 ,$$

в області $v_1 < V(y) < v_0$ маємо оцінку $\dot{V}^q(y) \le -k|y|^2 \le \dfrac{-k v_0}{\lambda_{\min}(H_{q0})}$.

Якщо система при даному $x \in X_\alpha$ на відрізку часу (t_0, t) робить M переключень у моменти $t_1 < t_2 < ... < t_M$, то маємо

$$V^{q(t)}(y(t)) - V^{q_0}(y(t_0)) =$$
$$= \sum_{j=0}^{M-1} \left[V^{q_{j+1}}(y(t_{j+1})) - V^{q_j}(y(t_{j+1})) + V^{q_k}(y(t_{j+1})) - V^{q_j}(y(t_j)) \right] + V^{q_M}(y(t)) - V^{q_M}(y(t)) =$$
$$= \sum_{j=0}^{M-1} \left[V^{q_{j+1}}(y(t_{j+1})) - V^{q_j}(y(t_{j+1})) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \dot{V}(y(s))ds \right] + \int_{t_M}^{t} \dot{V}(y(s))ds =$$
$$= \int_{t_0}^{t} \dot{V}(y(s))ds + \sum_{j=0}^{M-1} \left[V^{q_{j+1}}(y(t_{j+1})) - V^{q_j}(y(t_{j+1})) \right] \le \int_{t_0}^{t} \dot{V}(y(s))ds \le -\frac{kv_1}{\lambda_{\min}(H)} t.$$

Останній вираз можна зробити скільки завгодно малим, що суперечить $V^{q(t)}(y(t)) - V^{q0}(y(t_0)) \ge v_1 - v_0$. Теорему доведено.

Теорема 4. За умовою теореми 3 гібридний автомат HA експоненційно стійкий, причому виконується оцінка

$$|y(t)| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_{q0})}{\min_{q \in Q} \lambda_{\min}(H_q)}} |y(t_0)| \exp\left(-\frac{k}{2 \max_{q \in Q} \lambda_{\min}(H_q)} (t - t_0) \right).$$

Доведення. З нерівності Релея-Рітца $\lambda_{\min}(H_q) \cdot |y|^2 \le y^T H y = V^q(y) \le \lambda_{\max}(H_q) \cdot |y|^2$ випливає нерівність $\dot{V}^q(y) \le -k|y|^2 \le -\dfrac{k}{\lambda_{\min}(H)} V^q(y)$. За нерівністю Гронуолла-Беллмана маємо

$V^q(y(t)) \le V^q(y(t_j)) \exp\left(-\dfrac{k}{\lambda_{\min}(H_q)} (t - t_j) \right)$, де t_j – момент переключення.

Вважатимемо, що моменти переключення при даному $x \in X_\alpha$, $t_1 < t_2 < ... < t_M$. Підставимо в останню нерівність $q = q_M$.

$$V^{qM}(y(t)) \le V^{qM}(y(t_M)) \exp\left(-\frac{k}{\lambda_{\min}(H_{qM})} (t - t_M) \right).$$

Оскільки на переключеннях $V(q_M) \le V(q_{M-1})$, отримуємо, що

$$V^{qM}(y(t)) \le V^{qM-1}(y(t_M)) \exp\left(-\frac{k}{\lambda_{\min}(H_{qM})} (t - t_M) \right).$$

V^{qM-1} можна оцінити за цією ж нерівністю:

$$V^{qM}(y(t)) \le V^{qM-2}(y(t_{M-1})) \exp\left(-\frac{k}{\lambda_{\min}(H_{qM-1})} (t_M - t_{M-1}) \right) \exp\left(-\frac{k}{\lambda_{\min}(H_{qM})} (t - t_M) \right).$$

Послідовно оцінюючи значення функції Ляпунова в моменти переключення t_{M-1}, $t_{M-2},\dots,t_1$, отримуємо

$$V^{q_M}(y(t)) \le V^{q_0}(y(t_0)) \exp\left\{-\left[\sum_{j=0}^{M-1}\frac{k}{\lambda_{\min}(H_{q_j})}(t_{j+1}-t_j)+\frac{k}{\lambda_{\min}(H_{q_M})}(t-t_M)\right]\right\}$$

або
$$V^{q_M}(y(t)) \le V^{q_0}(y(t_0)) \exp\left\{-\frac{k}{\max\limits_{q\in Q}\lambda_{\min}(H_q)}(t-t_0)\right\}.$$

Скориставшись ще раз нерівністю Релея-Рітца, отримуємо нерівність

$$\lambda_{\min}(H_{q_M})\left|y(t)\right|^2 \le V(y(t_0))\exp\left(-\frac{k}{\max\limits_{q\in Q}\lambda_{\min}(H_q)}(t-t_0)\right) \le$$

$$\le \lambda_{\max}(H_{q_0})\left|y(t_0)\right|^2 \exp\left(-\frac{k}{\max\limits_{q\in Q}\lambda_{\min}(H_q)}(t-t_0)\right).$$

Остаточно отримуємо

$$\left|y(t)\right| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_{q_0})}{\min\limits_{q\in Q}\lambda_{\min}(H_q)}}\left|y(t_0)\right|\exp\left(-\frac{k}{2\max\limits_{q\in Q}\lambda_{\min}(H_q)}(t-t_0)\right).$$

Теорему доведено.

4. Висновки

В роботі наведено нові типи стійкості нечіткої динамічної системи, незалежно від природи цієї системи. Наведені означення нечіткої стійкості досить сильні. Це має сенс: використовується прийнятне для реального світу означення, що базується на траєкторіях динамічної системи, а не штучний критерій, що базується на близькості розподілів.

Також доведено достатні умови стійкості окремих типів нечіткої лінійної гібридної системи. Ці умови не залежать від розв'язків системи, мають конструктивний характер і легко перевіряються на ЕОМ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Lakshmikantham V., Mohapatra R. Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions. – Taylor and Francis, London, 2003.
2. Пырьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применение. – М.: УРСС , 1990. – 190 с.
3. Бичков О.С. До теорії можливостей та її застосування // Доповіді НАН України. – 2007. – № 5. – С. 7–12.
4. Бичков О., Меркур'єв М. Існування та єдність розв'язків нечіткого диференціального рівняння // Вісник Київського національного університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2006. – №1. – С. 131–135.
5. Бичков О. Дослідження стійкості тривіальних фазових орбіт гібридних автоматів // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. – 2005. – № 6. – С. 4–8.

Стаття надійшла до редакції 08.10.2007