

В. Ф. Борулько, С. М. Вовк

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ В ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДИПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА  
МИНИМАЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ РЕШЕНИЯ**

*Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара  
72, пр. Гагарина, Днепропетровск, 49051, Украина  
E-mail: borulko@inbox.ru, vovk\_s\_m@mail.ru*

Рассмотрена векторная модель источников, которая задана набором идеальных электрических диполей Герца с общей ориентацией их дипольных моментов. На основе принципа минимальной пространственной протяженности решения сформулирована задача нелинейной оптимизации и предложен подход, который основан на методе сопряженных градиентов со специальным выбором величины шага вдоль направления спуска. Представлены результаты численного моделирования для случая, когда источники излучения являются вещественными и расположены вдоль прямой линии, которая параллельна линии измерений электрического поля. Ил. 3. Табл. 2. Библиогр.: 16 назв.

**Ключевые слова:** электрический диполь, одномерная решетка, минимум пространственной протяженности.

Одной из важных задач теории антенн является задача определения пространственного местоположения и амплитуд источников излучения по результатам измерений компонент электромагнитного поля [1, 2]. С математической точки зрения эта задача относится к классу обратных задач и является некорректной. Мы предложили подход к решению задачи для скалярного случая, где предполагали, что источники излучения являются точечными источниками однородных сферических волн [3–5]. В данной работе мы рассматриваем векторный случай, полагая, что источники излучения являются точечными дипольными источниками. При этом описываем излучающую систему конечным набором идеальных электрических диполей Герца, расположенных вдоль прямой линии и имеющих общую ориентацию дипольных моментов, а также считаем, что в ближней зоне излучающей системы могут быть выполнены измерения электрической компоненты поля с пренебрежимо малым влиянием измерительного зонда.

В дальнейшем рассмотрении будем полагать, что поле излучения системы диполей является суперпозицией полей отдельных диполей. Тогда обратную задачу определения параметров источников по результатам измерения электрической компоненты поля можно сформулировать как задачу решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с комплексными коэффициентами и неизвестными. В общем случае матрица такой СЛАУ является прямоугольной, ее горизонтальный размер определяется количеством «точек решения» (т. е. точек пространства, в которых могут быть расположены источники излучения), а вертикальный размер – количеством «точек измерений» (т. е. точек пространства, в которых выполнены измерения). Этот вид матрицы СЛАУ приводит к необходимости поиска некоторого псевдорешения, например решения с

минимальной евклидовой нормой по методу наименьших квадратов [6]. Однако если СЛАУ является плохо обусловленной, то нормальное псевдорешение оказывается чрезмерно чувствительным к шуму, и поэтому возникает необходимость его регуляризации [7].

Основная цель регуляризации заключается в сужении области решения за счет использования дополнительной априорной информации и вовлечения ее в математическую формулировку задачи. Традиционно в качестве такой информации используют требование минимальности энергии решения (например, мощности омических потерь в антенне [8]) или энергии производных решения и др. Однако этот подход имеет существенный недостаток: он обычно приводит к слишком гладкому решению в тех случаях, когда истинное решение не является гладким. В настоящей работе для выполнения регуляризации мы используем более конструктивную априорную информацию о минимальной пространственной протяженности решения, которую формализуем в виде функционала его «обобщенной протяженности», при этом мы рассматриваем случай, когда источники излучения расположены редко в заранее неизвестных узлах заданной дискретной сетки.

**1. Основные соотношения для задачи излучения на основе идеальных диполей Герца.** Для случая среды без поглощения поле излучения идеального электрического диполя Герца описывается выражениями [9]

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{p}{4\pi\epsilon} \left[ \vec{r}_0 \frac{2}{r^2} \left( \frac{1}{r} + ik \right) \cos\theta + \right. \\ &+ \left. \vec{\theta}_0 \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} - k^2 \right) \sin\theta \right] e^{-ikr}, \\ \vec{H} &= \vec{\varphi}_0 \frac{p\omega}{4\pi} \left( \frac{i}{r^2} - \frac{k}{r} \right) \sin\theta e^{-ikr}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\vec{H}, \vec{E}$  – комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей;  $\vec{p} = p\vec{z}_0$  – электрический момент диполя;  $k = 2\pi / \lambda$ . Существуют различные варианты представления источников излучения с помощью наборов электрических диполей; далее рассмотрим два простейших примера, в которых каждому источнику излучения соответствует один электрический диполь.

**Пример 1.** Пусть источники излучения представлены электрическими диполями, которые расположены вдоль прямой линии  $S$  (линии источников) и имеют общую ориентацию своих дипольных моментов. Пусть линия измерений  $M$  является параллельной к линии  $S$  и лежит с ней в одной плоскости, а электрические моменты всех диполей являются перпендикулярными к этой плоскости (рис. 1, а).

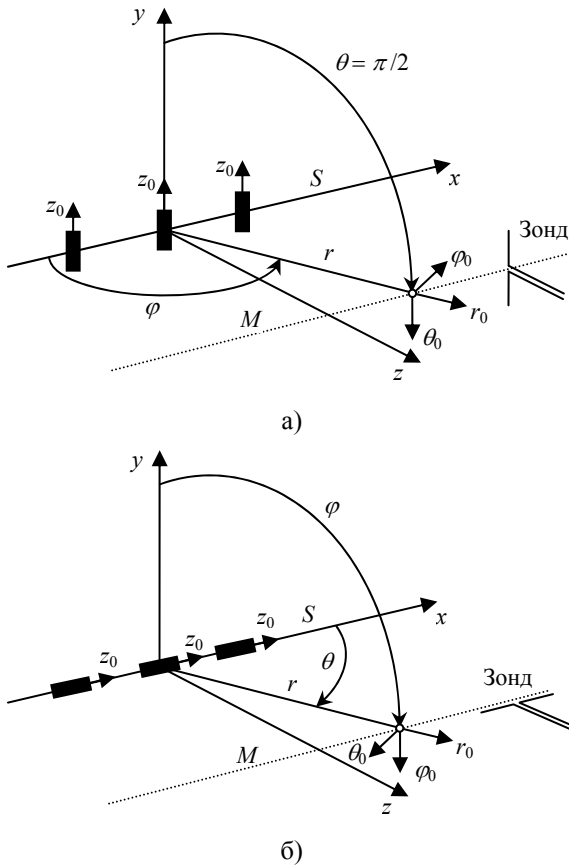


Рис. 1. Примеры наборов электрических диполей, расположенных вдоль прямой линии  $S$ , с общей ориентацией их электрических моментов, где линия измерений  $M$  электрического поля параллельна  $S$ : а) – пример 1 – электрические моменты диполей параллельны оси  $y$ ; б) – пример 2 – электрические моменты диполей направлены вдоль оси  $x$

Тогда из (1) следует, что вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  каждого диполя является перпендикулярным к экваториальной плоскости  $\theta = \pi / 2$ , и следовательно, электриче-

ское поле каждого диполя содержит только компоненту

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon r} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} - k^2 \right) e^{-ikr}. \quad (2)$$

Из (2) видно, что для «дальнего поля» (когда  $r \gg \lambda$ ) величина  $E_\theta$  пропорциональна  $e^{-ikr}/r$ , что соответствует полю скалярного точечного источника однородной сферической волны.

Используем дополнительную систему декартовых координат, для которой ось  $x$  совмещена с линией источников  $S$ , ось  $z$  направлена перпендикулярно от линии источников  $S$  к линии измерений  $M$ , а ось  $y$  – параллельно векторам  $\vec{z}_0$  электрических моментов диполей. Тогда  $E_y = -E_\theta$ .

Используя (2) и принцип суперпозиции полей, для рассматриваемой системы электрических диполей можно записать СЛАУ

$$\dot{b}_j = \sum_{n=1}^N \dot{u}_n \left[ k^2 - \frac{ik}{\sqrt{(x_n^{(s)} - x_j^{(m)})^2 + z^2}} - \frac{1}{(x_n^{(s)} - x_j^{(m)})^2 + z^2} \right] \frac{\exp(-ik\sqrt{(x_n^{(s)} - x_j^{(m)})^2 + z^2})}{\sqrt{(x_n^{(s)} - x_j^{(m)})^2 + z^2}}, \quad (3)$$

$j = 1, \dots, J$ ,

где  $\dot{b}_j$  – известные комплексные значения компоненты  $E_y$  электрического поля в «точках измерений»;  $\dot{u}_n$  – неизвестные комплексные значения поля в «точках решения»;  $z$  – расстояние между линией источников и линией измерений;  $x_n^{(s)}$  и  $x_j^{(m)}$  –  $x$ -координаты «узлов решения» и «узлов измерений» соответственно;  $N$  – количество диполей;  $J$  – количество точек измерений.

**Пример 2.** Пусть источники излучения представлены электрическими диполями, которые расположены вдоль оси  $x$  дополнительной системы декартовых координат, причем их дипольные моменты направлены вдоль этой оси. Пусть линия измерений  $M$  параллельна линии источников  $S$ , а зонд измеряет продольную (вдоль оси  $x$ ) компоненту электрического поля (рис. 1, б). Так как для каждого диполя

$$E_x = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta,$$

где

$$E_r = \frac{p}{4\pi\epsilon r^2} \left( \frac{1}{r} + ik \right) \cos \theta e^{-ikr};$$

$$\cos \theta = x/r;$$

$$r^2 = x^2 + z^2;$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon r} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} - k^2 \right) \sin \theta e^{-ikr};$$

$$\sin \theta = z/r,$$

то для данной системы диполей легко записать соответствующую СЛАУ. Отметим, что в «дальней зоне» для каждого электрического диполя величина  $E_x$  пропорциональна  $(\cos \theta)^2 e^{-ikr} / r^2$ , что соответствует случаю излучения неоднородной сферической волны.

**2. Решение обратной задачи.** Из приведенного рассмотрения следует, что для указанных и аналогичных им примеров можно сформулировать обратную задачу определения параметров источников по результатам измерения электрической компоненты поля как задачу решения СЛАУ с комплексными коэффициентами и неизвестными. Для упрощения дальнейшего изложения и расчетов перейдем от исходной комплексной СЛАУ к вещественной путем выписывания реальных и мнимых частей соответствующих уравнений. При этом упорядочим запись вещественных линейных уравнений и неизвестных таким образом, чтобы вещественная СЛАУ имела вид  $\mathbf{A}u = b$ , где  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^R & -\mathbf{A}^I \\ \mathbf{A}^I & \mathbf{A}^R \end{bmatrix}$  – вещественная

блочная матрица, в которой блоки  $\mathbf{A}^R$  и  $\mathbf{A}^I$  отвечают вещественной и мнимой частям матрицы исходной комплексной СЛАУ;  $b = [b^R \ b^I]^T$  – вещественный вектор-столбец известных данных, содержащий значения вещественной  $b^R$  и мнимой  $b^I$  частей известной компоненты электрического поля;  $u = [u^R \ u^I]^T$  – вещественный вектор-столбец неизвестных амплитуд источников, представленных вещественной  $u^R$  и мнимой  $u^I$  частями. Поскольку в общем случае матрица СЛАУ является прямоугольной, то решение обратной задачи с помощью обращения матрицы СЛАУ является невозможным. Это приводит к необходимости поиска некоторого псевдорешения, например нормального псевдорешения с минимальной евклидовой нормой. Хотя нормальное псевдорешение является единственным, однако оно часто оказывается чрезмерно чувствительным к погрешностям (шуму) в векторе  $b$  и неприменимым на практике из-за плохой обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$ . Стандартный подход, который позволяет регулировать чувствительность решения к погрешностям в векторе  $b$ , заключается в его регуляризации путем сглаживания. Традиционно это обеспечивается заменой исходной задачи  $\mathbf{A}u = b$  на задачу квадратичной регуляризации

$$\|\mathbf{A}u - b\|^2 + \rho^2 \|u\|^2 \rightarrow \min \{u\}, \quad (4)$$

где  $\rho^2$  – параметр регуляризации Тихонова [7]. Из (4) видно, что в этом случае решением обратной задачи является вектор  $u = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \rho^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T b$ , где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Однако такое решение

обладает существенным недостатком: для оптимального значения  $\rho^2$  оно может оказаться слишком гладким в тех случаях, когда истинное решение априорно не является гладким. По этой причине квадратичная регуляризация не является подходящим методом решения обратных задач для подобных случаев и, в частности, когда решение описывается точечными источниками. Далее мы представляем другой способ регуляризации, который основан не на сглаживании решения, а на получении решения минимальной пространственной протяженности. Этот подход использует идею метода минимума длительности [10] и применительно к данной задаче мы его назвали методом регуляризации на основе «принципа минимальной пространственной протяженности решения».

Для решения СЛАУ  $\mathbf{A}u = b$  относительно  $u$  на основе принципа минимальной пространственной протяженности решения используем следующую общую формулировку:

$$\mathbf{f}(u) = \|\mathbf{A}u - b\|^2 + \gamma^2 \mathbf{D}(u) \rightarrow \min \{u\}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{f}(u)$  – функционал, который необходимо минимизировать, варьируя  $u$ . Функционал (5) состоит из двух частей:  $\|\mathbf{A}u - b\|^2$  есть квадрат евклидовой нормы невязки решения, а функционал  $\mathbf{D}(u)$  задает меру «пространственной протяженности» решения  $u$ , где простые варианты  $\mathbf{D}(u)$  могут быть построены на основе функций Хьюбера [11], Андрюса, Рамсея, Мешалкина, Демиденко [12], а также других невыпуклых функций [4, 5, 10, 13–15]. Коэффициент  $\gamma^2$  мы называем параметром «внешней регуляризации»; он имеет физическую размерность, а его величина должна выбираться из условия минимума абсолютной ошибки решения. Подчеркнем, что в задаче (5) априорной информацией является требование минимума «пространственной протяженности» решения  $u$ .

Ограничим дальнейшее рассмотрение случаем дипольных источников с вещественными амплитудами, когда дипольные источники расположены редко в заранее неизвестных узлах заданной дискретной сетки, а в качестве  $\mathbf{D}(u)$  используем предельный случай «внутренне регуляризованного» функционала обобщенной пространственной протяженности [4, 5], которым является мириадный функционал [16]. В дискретном случае запишем этот функционал в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(u) &= \mathbf{D}(u_1, u_2, \dots, u_N) = \\ &= c(\alpha) \sum_{n=1}^N \ln(1 + |u_n|^2 / \alpha^2), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $u_n$  – элементы вектора-столбца  $u^R$  неизвестных вещественных амплитуд источников;  $N$  – количество узлов заданной дискретной сетки;

$c(\alpha) = 1 / \ln(1 + 1/\alpha^2)$ ,  $\alpha^2$  – параметр «внутренней регуляризации», который обеспечивает сглаживание значений  $u_n$ . Тогда из (5) получаем задачу  $N$ -мерной оптимизации

$$\mathbf{f}(u) = \mathbf{f}(u_1, u_2, \dots, u_N) = \sum_{j=1}^J \left| \sum_{n=1}^N a_{jn} u_n - b_j \right|^2 + \gamma^2 c(\alpha) \sum_{n=1}^N \ln[1 + |u_n|^2 / \alpha^2] \rightarrow \min \{u_1, u_2, \dots, u_N\}, \quad (7)$$

где  $a_{jn}$  – элементы матрицы  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}^R \\ \mathbf{A}^I \end{bmatrix}$ ;  $b_j$  – элементы вектора-столбца известных данных  $\begin{bmatrix} b^R \\ b^I \end{bmatrix}$ .

Из (6) видно, что при сильном «внутреннем сглаживании», когда  $\alpha^2 \gg |u_n|^2$  для всех  $n = 1, \dots, N$ , второе слагаемое функционала (7) стремится к квадратичной зависимости от неизвестных  $u_n$ , т. е. задача (7) переходит в задачу квадратичной регуляризации (4), причем без учета физической размерности получаем  $\gamma^2 = \rho^2$ .

Так как (7) не является задачей квадратичной оптимизации, то ее решение не может быть получено аналитически. Поэтому для решения задачи (7) мы предлагаем численный метод, который основан на методе сопряженных градиентов и задан схемой:

$$\begin{aligned} u^{(t+1)} &= u^{(t)} + h^{(t)} p^{(t)}, \quad t \geq 0; \\ p^{(0)} &= -g^{(0)}; \quad p^{(t)} = -g^{(t)} + d^{(t-1)} p^{(t-1)}, \quad t \geq 1; \\ d^{(t-1)} &= \|g^{(t)}\|^2 / \|g^{(t-1)}\|^2; \\ h^{(t)} &= \arg(\min_h \mathbf{f}(u^{(t)} + h p^{(t)})), \end{aligned}$$

где  $t$  – номер итерации;  $u^{(t)}$  – полученное решение на  $t$ -й итерации;  $h^{(t)}$  – шаг вдоль направления спуска  $p^{(t)}$  на  $t$ -й итерации;  $g^{(t)}$  – градиент функционала  $\mathbf{f}$  на  $t$ -й итерации. Повторяя основные шаги метода сопряженных градиентов, предлагаемый метод имеет особенности, которые обусловлены неквадратичностью функционала (7) и проявляются при выполнении на каждой итерации таких действий:

- вычисление градиента  $g^{(t)}$  функционала  $\mathbf{f}$ ;
- решение одномерной задачи минимизации по величине шага  $h$  вдоль направления спуска  $p^{(t)}$ .

Рассмотрим их более детально. Из (7) следует, что вектор градиента  $g^{(t)}$  есть

$$g^{(t)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) u^{(t)} - \mathbf{A}^T b + \gamma^2 c(\alpha) v^{(t)}, \quad (8)$$

где вектор  $v^{(t)}$  состоит из элементов:

$v_n^{(t)} = u_n^{(t)} / [(u_n^{(t)})^2 + \alpha^2]$ ;  $n = 1, \dots, N$ . Таким образом, сложность вычисления вектора градиента эквивалентна сложности умножения матрицы на вектор. Также отметим, что если выбрать нулевое начальное приближение  $u^{(0)} = 0$ , то  $g^{(0)} = -\mathbf{A}^T b$ .

Решение одномерной задачи минимизации  $h^{(t)} = \arg(\min_h \mathbf{f}(u^{(t)} + h p^{(t)}))$  мы предлагаем выполнять на конечном множестве «пробных шагов», включая условно названные: «шаг по невязке», «обнуляющие шаги» и «ньютоновский шаг».

«Шаг по невязке» предназначен для минимизации первого слагаемого в (7), которое определяет невязку решения; величина этого шага есть  $h = -([\mathbf{A}^T \mathbf{A} u^{(t)} - \mathbf{A}^T b], p^{(t)}) / (\mathbf{A}^T \mathbf{A} p^{(t)}, p^{(t)})$ , где  $t$  – номер итерации, а круглые скобки с запятой обозначают операцию скалярного произведения.

«Обнуляющие шаги» составляют основную часть множества пробных шагов и предназначены для минимизации второго слагаемого в (7), которое определяет пространственную протяженность решения; величина этих шагов на  $t$ -й итерации есть  $h_n = -u_n^{(t)} / p_n^{(t)}$ ;  $n = 1, \dots, N$ . Видно, что каждый из этих шагов обращает в нуль соответствующее значение  $u_n^{(t)}$ , минимизируя тем самым  $n$ -е слагаемое функционала «обобщенной пространственной протяженности». Использование обнуляющего шага обычно приводит к переходу приближения  $u^{(t)}$  из одного локального минимума в другой локальный минимум функционала (7), что может существенно влиять на результат формирования последующего направления спуска. Поэтому после использования любого из обнуляющих шагов мы выполняли операцию обновления направления спуска, полагая на следующей  $t$ -й итерации  $p^{(t)} = -g^{(t)}$ , где  $g^{(t)}$  определено в (8).

«Ньютоновский шаг» предназначен для работы в случаях, когда  $u^{(t)}$  находится в такой малой окрестности одного из локальных минимумов функционала  $\mathbf{f}(u)$ , что (7) можно приближенно считать квадратичной функцией от  $h$ . Этот шаг мы вычисляли на каждой итерации по формуле  $h = - (g^{(t)}, p^{(t)}) / ([\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \gamma^2 c(\alpha) \mathbf{Q}] p^{(t)}, p^{(t)})$ , где  $\mathbf{Q} = \text{diag}(\dots, [\alpha^2 - (u_n^{(t)})^2] / [\alpha^2 + (u_n^{(t)})^2], \dots)$  – диагональная матрица, элементы которой зависят от текущего приближения  $u^{(t)}$  и параметра  $\alpha^2$ . Если «ньютоновский шаг» был использован  $N$  раз подряд, то мы выполняли операцию обновления направления спуска. Также отметим, что при  $\alpha^2 \rightarrow \infty$  «ньютоновский шаг» совпадает с величиной аналогичного шага для задачи (4) стандартной регуляризации Тихонова [7] при применении к ней метода сопряженных градиентов.

Таким образом, на каждой итерации из множества пробных шагов мы выбирали неотрицательный шаг, который минимизировал функционал (7) как одномерную функцию  $h$ . Если этот шаг был равен нулю, то мы выполняли операцию обновления направления спуска. Если операция обновления направления спуска выполнялась два раза подряд, то мы завершали итерационный процесс.

**3. Результаты численного моделирования.** На рис. 2 приведены результаты численного моделирования прямой и обратной задач для примера 1 расположения диполей. Для моделирования прямой задачи использовалась СЛАУ (3) со следующими значениями параметров:  $N = J = 200$ ;  $\Delta x^{(s)} = \Delta x^{(m)} = \Delta x$ ;  $\Delta x / \lambda = 0,1$ ;  $z / \lambda = 1$ , амплитуды  $u_n = 1$  для  $n = 40, 70, 100, 130, 160$  и  $u_n = 0$  для остальных  $n$ . Полученные в результате моделирования исходные комплексные значения  $\hat{b}_j$  были искажены аддитивным гауссовским шумом с нулевым математическим ожиданием и фиксированной дисперсией, причем стандартное отклонение шума составляло около 5% от максимального абсолютного значения вещественной  $b^R$  (сплошная кривая, рис. 2, а) и мнимой  $b^I$  (пунктирная кривая, рис. 2, а) частей электрической компоненты поля; при этом отношение сигнал-шум  $SNR$  по мощности приблизительно было равно +20 дБ. На рис. 2, б представлены результаты решения обратной задачи методами стандартной квадратичной регуляризации (штриховая кривая) и регуляризации на основе принципа минимальной пространственной протяженности (сплошная кривая) при использовании наилучших значений

соответствующих параметров регуляризации (табл. 1).

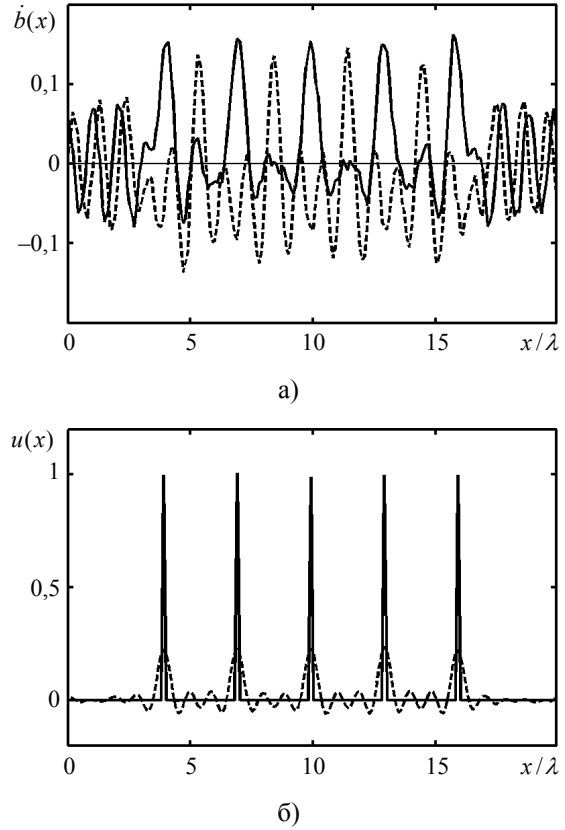


Рис. 2. Пространственное распределение: а) – действительная (сплошная кривая) и мнимая (штриховая кривая) части электрического поля для набора диполей из примера 1; б) – решение обратной задачи методом квадратичной регуляризации (штриховая кривая) и методом регуляризации на основе минимума пространственной протяженности (сплошная кривая)

Таблица 1

Максимальная относительная ошибка решения для примера 1 ( $\gamma^2 = \rho^2$ ), %

Метод	$\rho^2$	$10^{-5}$	$10^{-4,5}$	$10^{-4}$	$10^{-3,5}$	$10^{-3}$	$10^{-2,5}$	$10^{-2}$	$10^{-1,5}$	$10^{-1}$
КР	–	200,10	136,02	104,65	92,21	88,79	88,12	87,86	87,79	87,91
	$\alpha^2$									
МПП	$10^{-6}$	92,73	87,42	81,97	56,47	2,46	1,92	1,95	99,99	100,00
	$10^{-5}$	114,39	86,08	54,76	3,55	2,38	1,92	1,96	2,18	99,96
	$10^{-4}$	160,98	81,80	3,81	3,13	2,09	1,96	1,99	2,33	99,68
	$10^{-3}$	261,35	80,80	55,24	3,69	2,93	2,45	2,35	2,90	5,91
	$10^{-2}$	294,40	118,01	60,41	9,67	6,43	5,70	5,89	7,37	12,98
	$10^{-1}$	317,84	118,39	90,72	76,59	74,52	76,21	78,61	81,78	85,74
	1	203,85	126,25	99,24	90,12	88,05	87,55	87,37	87,39	87,68
	10	198,98	134,60	103,87	91,91	88,71	88,06	87,81	87,75	87,88

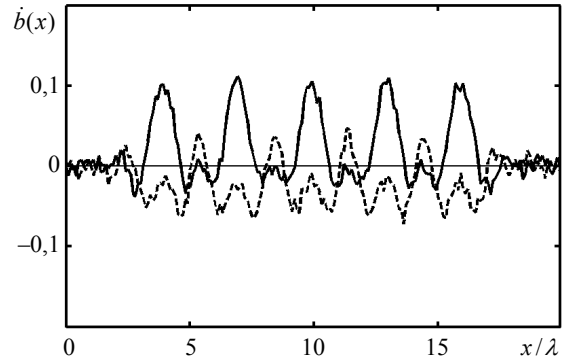
Численная реализация метода квадратичной регуляризации выполнялась путем построения обратной матрицы  $\mathbf{A}_\rho^{-1} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \rho^2 \mathbf{I})^{-1}$  и ее умножения на вектор  $\mathbf{A}^T b$ , что отвечало использованию аналитического решения задачи (4).

Численная реализация метода регуляризации на основе принципа минимальной пространственной протяженности выполнялась путем построения итерационного процесса для задачи (7) по указанной выше схеме метода сопря-

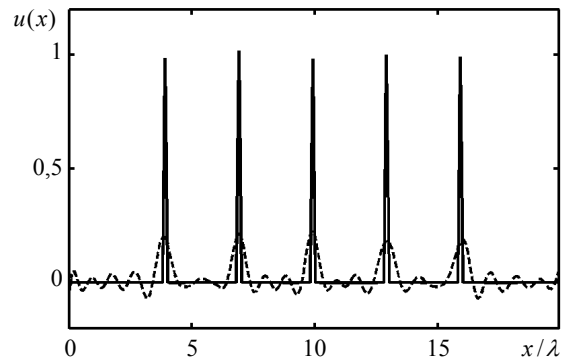
женных градиентов, причем общий объем вычислений был ограничен 1 000 итераций.

В табл. 1 приведены максимальные значения относительной среднеквадратической ошибки решения для различных значений  $\rho^2$  при выполнении квадратичной регуляризации (КР) и для различных значений  $\gamma^2$  и  $\alpha^2$  при выполнении регуляризации на основе принципа минимальной пространственной протяженности решения (МПП). Эти значения были получены по 10 реализациям шума для случая выбора нулевого начального приближения  $u^{(0)} = 0$ . Из рассмотрения табл. 1 видно, что регуляризация на основе принципа МПП позволила существенно уменьшить ошибку решения обратной задачи, причем можно указать достаточно широкие диапазоны значений параметров  $\gamma^2$  и  $\alpha^2$ , внутри которых эта ошибка не превосходит 10 %. Также видно, что значения ошибки, которые отвечают КР, практически совпадают со значениями ошибки, которые отвечают МПП для случая сильного «внутреннего сглаживания»  $\alpha^2 = 10$ . Отметим, что для наилучших в табл. 1 значений параметров  $\gamma^2 = 10^{-2,5}$ ;  $\alpha^2 = 10^{-6}$  и  $\gamma^2 = 10^{-2,5}$ ;  $\alpha^2 = 10^{-5}$  решение обратной задачи достигалось в среднем за 380 и 270 итераций соответственно, а для  $\gamma^2 = 10^{-2,5}$  и  $\alpha^2 = 10^{-4}$  – в среднем за 160 итераций.

На рис. 3 приведены аналогичные результаты численного моделирования для примера 2 расположения диполей. Хотя здесь вклад шума в вещественную  $b^R$  (сплошная кривая, рис. 3, а) и мнимую  $b^I$  (штриховая кривая, рис. 3, а) части электрической компоненты поля составил около 7 и 12 % соответственно (при этом  $SNR \approx +15$  дБ), однако точность решения обратной задачи, достигнутая методом регуляризации на основе принципа МПП (сплошная кривая, рис. 3, б), осталась достаточно высокой.



а)



б)

Рис. 3. Пространственное распределение: а) – действительная (сплошная кривая) и мнимая (штриховая кривая) части электрического поля для набора диполей из примера 2; б) – решение обратной задачи методом квадратичной регуляризации (штриховая кривая) и методом регуляризации на основе минимума пространственной протяженности (сплошная кривая)

В табл. 2 приведены максимальные значения относительной среднеквадратической ошибки решения, которые были получены по 10 реализациям шума для случая выбора нулевого начального приближения  $u^{(0)} = 0$ . Отметим, что для наилучших в данной таблице значений параметров  $\gamma^2 = 10^{-2,5}$  и  $\alpha^2 = 10^{-4}$  решение обратной задачи достигалось в среднем за 160 итераций.

Таблица 2

Максимальная относительная ошибка решения для примера 2 ( $\gamma^2 = \rho^2$ ), %

Метод	$\alpha^2 \backslash \rho^2$	$10^{-5}$	$10^{-4,5}$	$10^{-4}$	$10^{-3,5}$	$10^{-3}$	$10^{-2,5}$	$10^{-2}$	$10^{-1,5}$	$10^{-1}$
		КР	–	224,14	147,94	111,11	95,34	90,03	90,06	90,49
МПП	$10^{-6}$	111,51	85,16	109,63	96,58	56,31	54,97	99,98	99,99	100,00
	$10^{-5}$	140,36	110,49	114,69	96,71	56,30	54,76	3,25	99,96	99,99
	$10^{-4}$	179,72	124,16	81,04	56,44	55,35	3,00	3,34	99,63	99,89
	$10^{-3}$	294,97	144,32	6,89	5,49	4,32	3,49	3,78	6,30	99,22
	$10^{-2}$	407,42	161,01	86,71	60,03	8,58	8,51	9,79	14,74	95,92
	$10^{-1}$	469,41	194,07	100,53	87,24	87,47	88,24	89,08	90,27	92,27
	1	308,13	135,95	104,84	92,56	89,69	89,99	90,45	90,85	91,41
10	222,82	146,22	110,20	94,93	89,93	90,05	90,49	90,88	91,29	

Таким образом, численное моделирование подтвердило, что при использовании регуляризации на основе принципа минимальной пространственной протяженности существует возможность эффективного решения обратных задач по определению источников излучения в одномерной решетке электрических диполей.

**Выводы.** Предложенный подход позволяет существенно уменьшить ошибку решения обратной задачи и имеет достаточно широкий диапазон значений параметров регуляризации, когда ошибка решения является близкой к минимально достижимой ошибке. Использование специального алгоритма для выбора величины шага вдоль направления спуска позволяет осуществлять обработку экспериментальных данных практически в реальном масштабе времени. Полученные результаты могут быть обобщены на двумерный и трехмерный случаи.

1. *Applications of sources reconstruction techniques: theory and practical result* / F. Cano, M. Sierra-Castaner, S. Burgos, J. L. Besada // Proc. of the 4<sup>th</sup> Europ. Conf. on Antennas and Propagation (EuCAP). – Barcelona, 2010. – P. 1–5.
2. *Martini E. Reduction of Truncation Errors in Planar Near-Field Aperture Antenna Measurements Using the Gerchberg-Papoulis Algorithm* / E. Martini, O. Breinbjerg, S. Maci // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 2008. – 56, N 11. – P. 3485–3493.
3. *Vovk S. M. Using the method of minimum extension to extrapolation of antenna measurements* / S. M. Vovk, V. F. Borulko // Proc. 10<sup>th</sup> Intern. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET-04). – Dnepropetrovsk, 2004. – P. 159–161.
4. *Vovk S. M. Nonlinear regularization of antennas measurements by extension minimum method* / S. M. Vovk, V. F. Borulko // Proc. 5<sup>th</sup> Intern. Conf. on Antenna Theory and Techniques (ICATT-05). – Kyiv, 2005. – P. 402–404.
5. *Vovk S. M. Restoration of point sources located along a perpendicular to a plane of measurements by the extension minimum method* / S. M. Vovk, V. F. Borulko // Proc. 11<sup>th</sup> Intern. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET-06). – Kharkiv, 2006. – P. 147–149.
6. *Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений* / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер; пер. с англ. Х. Д. Икрамова. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
7. *Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач* / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 200 с.
8. *Автоматизированное проектирование антенн и устройств СВЧ: учеб. пособие для вузов* / Д. И. Воскресенский, С. Д. Кременецкий, А. Ю. Гринев, Ю. В. Котов. – М.: Радио и связь, 1988. – 240 с.
9. *Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн* / В. В. Никольский. – М.: Наука, 1978. – 543 с.
10. *Vovk S. M. Method of minimum length for restoration of finite signals* / С. М. Вовк, В. Ф. Борулько // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1991. – 34, № 8. – С. 66–69.
11. *Хьюбер Дж. П. Робастность в статистике* / Дж. П. Хьюбер; пер. с англ. под ред. И. Г. Журбенко. – М.: Мир, 1984. – 304 с.

12. *Демиденко Е. З. Оптимизация и регрессия* / Е. З. Демиденко. – М.: Наука, 1989. – 296 с.
13. *Nikolova M. Analysis of the recovery of edges in images and signals by minimizing nonconvex regularized least-squares* / M. Nikolova // SIAM J. Multiscale Model. Sim. – 2005. – 4, N 3. – P. 960–991.
14. *Gonzalez J. G. Optimality of the myriad filter in practical impulsive-noise environments* / J. G. Gonzalez, G. R. Arce // IEEE Trans. on Signal Processing. – 2001. – 49, N 2. – P. 438–441.
15. *Aysal T. C. Meridian Filtering for Robust Signal Processing* / T. C. Aysal, K. E. Barner // IEEE Trans. on Signal Processing. – 2007. – 55, N 8. – P. 3949–3962.
16. *Vovk S. M. Постановка задач определения линейных параметров сигналов в квазинормированных пространствах* / С. М. Вовк, В. Ф. Борулько // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2010. – 53, № 7. – С. 31–42.

V. F. Borulko, S. M. Vovk

### SOURCES ESTIMATION IN THE 1-D ARRAY OF ELECTRIC DIPOLES BY USING PRINCIPLE OF MINIMUM SPATIAL EXTENSION OF SOLUTION

Vector model of sources described by a sequence of ideal Hertz dipoles with their common dipole moment orientation is considered. By using a principle of minimum spatial extension of solution the problem of sources estimation is formulated and approach based on conjugate gradient method with special selection of step value along descent direction is proposed. Numerical simulations for the case when sources are real and located along a straight line paralleled to measurement line are presented.

**Key words:** electric dipole, 1-D array, spatial extension.

В. Ф. Борулько, С. М. Вовк

### ВИЗНАЧЕННЯ ДЖЕРЕЛ В ОДНОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ ЕЛЕКТРИЧНИХ ДИПОЛЕЙ НА ОСНОВІ ПРИНЦИПУ МІНІМАЛЬНОЇ ПРОСТОРОВОЇ ПРОТЯЖНОСТІ РІШЕННЯ

Розглянуто векторну модель джерел, яка задана набором ідеальних електричних диполів Герца з загальною орієнтацією їхніх дипольних моментів. На основі принципу мінімальної просторової протяжності рішення сформульовано задачу нелінійної оптимізації та запропоновано підхід, який ґрунтується на методі спряжених градієнтів зі спеціальним вибором величини кроку вздовж напрямку спуску. Наведено результати числового моделювання для випадку, коли джерела випромінювання є дійсними та розташовані вздовж прямої лінії, яка є паралельною до лінії вимірювань електричного поля.

**Ключові слова:** електричний диполь, одновимірна гратка, мінімум просторової протяжності.

Рукопись поступила 25.02.11 г.