УДК 517.519: 517.96

Б. Й. Дацко, В. В. Мелешко

УМОВИ НЕСТІЙКОСТІ ТА МОЖЛИВІ БІФУРКАЦІЇ У МОДЕЛІ БРЮСЕЛЯТОРА З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Досліджено динамічну модель Брюселятора з часовими дробовими похідними. Аналітично проведено спектральний аналіз і показано можливість реалізації різних типів біфуркації, включаючи новий тип комплексної біфуркації, для цієї моделі. За допомогою комп'ютерного моделювання підтверджено результати лінійної теорії і продемонстровано особливості різного типу біфуркацій. Показано, що така система може бути нестійкою в широкому діапазоні зміни порядку дробових похідних. Виявлено, що внаслідок нестійкості в системі можуть виникати якісно різні типи коливних розв'язків.

В останні роки вивчення дробової дифузії викликає значний інтерес як з теоретичної, так і з прикладної точок зору [20, 22, 28, 29, 34, 35]. Цей інтерес викликаний спробами зрозуміти явища у фрактальних і нерегулярних системах природи. Дробові похідні вже широко використовуються для опису гранульованих і пористих середовищ [2, 30], росту пухлин в організмах [15], процесів у міжклітинному середовищі живих тканин [14], полімерах [1, 3], аморфних напівпровідниках [29] і т. п. На сучасному етапі розвитку науки вчені все більше переконуються, що реальні процеси в природі мають дробовий характер [23–33]. І хоча в більшості з них степінь аномальності суттєво не відрізняється від одиниці, проте ряд таких складних систем, як живі тканини, складні композитні чи аморфні матеріали, вимагає вивчення моделей, в яких слід враховувати суттєву аномальність дифузії. У зв'язку з цим важливе значення має дослідження систем реакції-дифузії, які в останні десятиліття якісно змінили розуміння складних нелінійних явищ природи [3, 16, 24]. Однією з найвідоміших систем такого типу є класична модель Брюселятора, на основі якої вдалося пояснити складні нелінійні динамічні процеси в хімічних реакціях [3, 16, 24]. Ця модель не втрачає своєї актуальності протягом тривалого часу і дозволяє як теоретично, так і з допомогою комп'ютерного моделювання пояснювати більшість експериментальних досліджень нелінійної динаміки в хімічних реакціях [31]. Більш того, інтерес до нерівноважних структур у хімічних реакціях останнім часом знову почав інтенсивно зростати, оскільки експериментально було виявлено фізіологічно значимі хімічні хвилі в таких складних і важливих системах, як живі клітини і тканини [12, 17, 25], де дифузія має суттєво аномальну природу.

Протягом останніх років було опубліковано ряд робіт присвячених дробовим системам [7–10, 13, 18, 19] і, зокрема, моделі Брюселятора [6, 10, 13, 32]. Проте в них проаналізовано дробову систему точкового типу та систему з супердифузією, де розглядається дробовий оператор за просторовою змінною. У цій статті проаналізуємо умови нестійкості та можливі біфуркації в моделі Брюселятора з часовими дробовими похідними [9], рівняння якої залежно від порядку дробової похідної описують субдифузійні та субколивні процеси. На нашу думку, запропонована робота разом зі згаданими вище буде сприяти створенню цілісної картини нелінійних розв'язків у моделі Брюселятора з дробовими похідними.

1. Математична модель. У загальному випадку базову систему реакції-дифузії [16] можна записати таким чином:

$$\tau_c u_t^{\alpha} = D u_{xx} + W(u, A), \tag{1}$$

де $u = (u_1, u_2)^{\top}, W = (W_1, W_2)^{\top} \in \mathbb{R}^2$, A – дійсний параметр, W_1, W_2 – гладкі функції реакції кінетики, τ та D – додатно визначені діагональні матриці $\tau = \mathrm{diag}[\tau_i] > 0$, $D = \mathrm{diag}[\ell_i^2] > 0$. На просторовому інтервалі $x \in (0, L)$ система довизначається граничними умовами Неймана $u_x\big|_{x=0,L_x} = 0$ або періодичними граничними умовами $u(t,0) = u(t,L_x)$, $u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=L_x}$ та відповідними початковими умовами $u\big|_{t=0} = u^0(x)$, $u_t\big|_{t=0} = u_t^0(x)$. Дробові похідні ${}_c u_t^\alpha$, у лівій частині системи (1) є дробовими похідними в сенсі Капуто [26, 27] порядку $0 < \alpha < 2$ і визначаються як

$$ {}_c u_t^\alpha = \frac{\partial_c^\alpha u(t)}{\partial t^\alpha} := \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{u^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, \quad m-1 < \alpha < m, \quad m = 1,2. \qquad (2) $$

2. Аналіз стійкості.

2.1. Стандартні системи реакції-дифузії. У випадку $\alpha = 1$ отримуємо систему (1) зі звичайними похідними, стійкість якої може бути проаналізована на основі аналізу її нуль-ізоклін [16]

$$ W(u_0, A) = 0. \qquad (3) $$

Розв'язання системи (3) приводить до просторово-однорідного розв'язку $\bar{u}_0 = (\bar{u}_1^0, \bar{u}_2^0)^\top$, стійкість якого визначається на основі власних значень лінеаризованої системи

$$ \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} F \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 F - 4\det F}\,\right), \qquad (4) $$

де $F(k) = \left\| \begin{matrix} a_{11}(k)/\tau_u & a_{12}/\tau_u \\ a_{21}/\tau_v & a_{22}(k)/\tau_v \end{matrix} \right\|$, $k = \dfrac{\pi}{\ell_x} j$, $j = 1,2,\dots$, $a_{11}(k) = a_{11} - k^2\ell^2$, $a_{11} = W_u'$, $a_{12} = W_v'$, $a_{21} = Q_u'$, $a_{22}(k) = a_{22} - k^2L^2$, $a_{22} = Q_v'$ (коефіцієнти a_{ij} визначають матрицю Якобі системи).

При $k = 0$ і умовах

$$ \operatorname{tr} F > 0, \qquad \det F(k=0) > 0 \qquad (5) $$

отримуємо біфуркацію Гопфа, яка приводить до просторово-однорідних коливань у системі.

При $k \neq 0$ можливою є ситуація, коли при певному значенні k_0 власні значення $\lambda_{1,2}$ є дійсними і одне з них є більшим від нуля. Іншими словами, при умовах

$$ \operatorname{tr} F < 0, \qquad \det F(k=0) > 0, \qquad \det F(k_0) < 0 \qquad (6) $$

в системі має місце біфуркації Тьюрінга, яка приводить до просторово-неоднорідних розв'язків.

Умови (5) можна переписати як $a_{11} > -a_{22}\tau_1/\tau_2$ з відповідною критичною частотою коливань $\omega = \sqrt{\det F(0)/(\tau_u\tau_v)}$, а умови (6) – як $a_{11} > -a_{22}(\ell^2/L^2) + 2\sqrt{\det F(0)}\,(\ell/L)$ з відповідним критичним хвильовим числом $k_0 = \sqrt[4]{\det F(0)}/\sqrt{\ell L}$.

Умови нестійкості для цих двох типів біфуркацій реалізуються внаслідок додатного зворотного зв'язку в системі ($a_{11} > 0$) і при $\tau_1/\tau_2 \to 0$, $\ell_1/\ell_2 \to 0$ вони наближаються до екстремальних точок $W_1(u_1, u_2, A) = 0$.

2.2. Дробові системи реакції-дифузії. У випадку дробових систем вже сам порядок дробової похідної α може принципово впливати на умови біфуркації в системі. Іншими словами, α є новим біфуркаційним параметром, який визначає стійкість просторово-однорідного розв'язку системи.

Тобто для $\alpha : 0 < \alpha < 2$ для кожної точки всередині параболи $\det F = \mathrm{tr}^2 F/4$ можемо ввести граничне значення $\alpha_0 = \frac{2}{\pi}|\arg \lambda_i|$, визначене формулою [7, 9, 21]

$$\alpha_0 = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\sqrt{4\frac{\det F}{\mathrm{tr}^2 F} - 1}, & \mathrm{tr}\, F > 0, \\ 2 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\sqrt{4\frac{\det F}{\mathrm{tr}^2 F} - 1}, & \mathrm{tr}\, F < 0, \end{cases} \tag{7}$$

яке визначає границю області стійкості системи. Для малих $\alpha < \alpha_0 = \frac{2}{\pi}|\arg \lambda_i|$ система має коливні моди, але вони є стійкими. Збільшення ж значення: $\alpha > \alpha_0 = \frac{2}{\pi}|\arg \lambda_i|$, приводить до нестійкості. Більш того, у випадку дробових похідних біфуркація Гопфа не пов'язана з умовою $a_{11} > 0$ і може виникати для певного значення $\alpha > 1$ навіть за умови $a_{11} < 0$ [7, 9, 10].

Якщо одночасно виконуються умови нестійкості для біфуркації Гопфа і Тьюрінга, то можуть виникати складні нелінійні просторово-часові структури. Ця ситуація особливо властива для систем типу реакції-дифузії з дробовими похідними для $\alpha > 1$, бо тоді легше задовольнити умови біфуркації Гопфа. Крім того, у цьому випадку можлива ситуація [9], коли задовольняються умови

$$\mathrm{tr}\, F < 0, \qquad 4\det F(0) < \mathrm{tr}^2 F(0), \qquad 4\det F(k_0) > \mathrm{tr}^2 F(k_0) \tag{8}$$

при яких має місце біфуркація, яка взагалі не властива стандартним системам реакції-дифузії.

Аналіз умов (8) показує, що при $k = 0$ можемо мати два дійсні від'ємні власні значення і система буде стійкою. Якщо остання з нерівностей (8) має місце для певного значення $k_0 \neq 0$, то можемо отримати два комплексних власних значення з від'ємною дійсною частиною. За таким типом власних значень можна визначити значення дробової похідної $\alpha > 1$, при якому в системі відбувається біфуркація, яка не має місця в стандартних системах реакції-дифузії при $\alpha = 1$, а саме – відбувається біфуркація Гопфа відносно певних хвильових чисел $k_0 \neq 0$ [9].

3. Нелінійна динаміка та умови нестійкості в моделі Брюселятора з дробовими похідними. У безрозмірному вигляді модель Брюселятора можна подати як частковий випадок системи (1), в якій нелінійні джерела, які описують кінетику хімічної реакції, мають такий вигляд [16, 24]:

$$W_1 = A - (B+1)u_1 + u_1^2 u_2, \qquad W_2 = Bu_1 - u_1^2 u_2. \tag{9}$$

З кожними з граничних умов, визначених при постановці задачі, система (1) з нелінійностями (9) допускає єдиний однорідний стаціонарний розв'язок $\bar{u}_1 = A$, $\bar{u}_2 = B/A$, який можна визначити з системи нелінійних рівнянь $W_1 = W_2 = 0$.

3.1. Біфуркація Гопфа. Відомо, що однорідний розв'язок у стандартній системі (1) з нелінійностями (9) стає нестійким відносно біфуркації Гопфа при умовах

$$\det F = A^2 > 0, \qquad \mathrm{tr}\, F = (B - 1 - A^2) > 0. \tag{10}$$

Іншими словами, перетин нуль-ізоклін системи (рис. 1*а*) на інтервалі спадання $W_1 = 0$ приводить до формування граничного циклу для $\alpha = 1$. В цьому випадку дійсна частина власних значень проходолить через нуль при $B_0 = 1 + A_0^2$ і ця умова є необхідною для реалізації біфуркації Гопфа. У випадку системи з дробовими похідними умова нестійкості $B > 1 + A^2$ для біфуркації Гопфа перестає бути необхідною. При $B < B_0$ дійсна частина власних значень стає меншою від нуля, а при $B > B_0$ − більшою від нуля. В цьому випадку умови біфуркації Гопфа (7) для моделі Брюселятора з дробовими похідними реалізуються при $\alpha > 1$ для $B < B_0$ і при $\alpha < 1$ − для $B > B_0$. Області нестійкості в координатах (B, A) для різних значень величини дробової похідної α наведено на рис. 1б. Ці криві отримано як результат розв'язання рівняння (7), і для довільного значення $0 < \alpha < 2$ можемо отримати явно параметричну залежність $A(B)$ для біфуркації Гопфа у випадку моделі Брюселятора з дробовими похідними:

$$A^2 = B - 1 + 2/(1+\gamma^2) \pm \sqrt{(B - 1 + 2/(1+\gamma^2))^2 - (B-1)^2}\,, \tag{11}$$

де $\gamma^2 = \mathrm{tg}^2(\pi\alpha_0/2) \cup \mathrm{tg}^2(\pi(2-\alpha_0)/2)$.

Іншими словами, довільне значення $0 < \alpha < 2$ розділяє область (A, B) на дві підобласті. Всередині кожної кривої, що відповідає значенню α_0, стаціонарний розв'язок є нестійким для цього значення α_0 і стійким − зовні цієї області (рис. 1б). Більш того, в області для цього значення α_0 граничний цикл виникає і для довільного $\alpha > \alpha_0$. На рис. 1б показано еволюцію області від зміни порядку дробової похідної і одна з ліній відповідає значенню $\alpha = 1$ $(B_0 = 1 + A_0^2)$, яка розділяє загальну область на дві підобласті, де нестійкість має місце при $\alpha > 1$ і $\alpha < 1$.

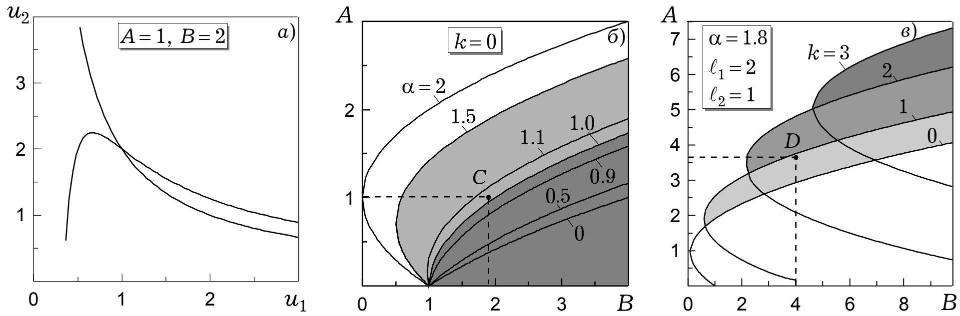

Рис 1. ***а***) Нуль-ізокліни для $A = 1, B = 2$; ***б***) біфуркаційна діаграма областей нестійкості в координатах (A, B) для значень $\alpha = 0,\ 0.5,\ 0.9,\ 1.1,\ 1.5, 2.0$ при $k = 0$;
в) області, в яких мають місце неоднорідні коливання для $\alpha = 1.8, \ell_1 = 2, \ell_2 = 1$ при $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ (сірі області).

3.2. Біфуркація Тьюрінга. Оскільки біфуркації Тьюрінга є чисто дійсними, то можна стверджувати, що умови нестійкості практично такі ж самі як в дробовій, так і в стандартній системах. Ці умови запишемо в явному вигляді:

$$-\ell_1^2 k^2 - \ell_2^2 k^2 + B - 1 - A^2 < 0\,,$$

$$\ell_1^2 \ell_2^2 k^4 + \ell_1^2 k^2 A^2 - \ell_2^2 k^2 B + \ell_2^2 k^2 + A^2 < 0\,. \tag{12}$$

Нестійкі моди $\exp(ikx)$ з хвильовими числами $k = \pi/\ell_x$ при $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$ (рис. 2*а*, *б*) зростатимуть експоненційно, поки нелінійності не зупинять цей ріст. Разом з тим слід зазначити, що розвиток нестійкості Тьюрінга в дробовій системі і загальна динаміка системи можуть бути відмінними від стандартного випадку $\alpha = 1$, і саме тому кінцеві атрактори можуть відрізнятись один від одного, хоча лінійні умови нестійкості виглядають формально так само. Однією з причин такої відмінності є співвідношення між дійсною і уявною частиною власних значень лінеаризованої системи. Характерні залежності уявних і дійсних частин власних значень від хвильових чисел для можливих біфуркацій в моделі Брюселятора наведено на рис. 2.

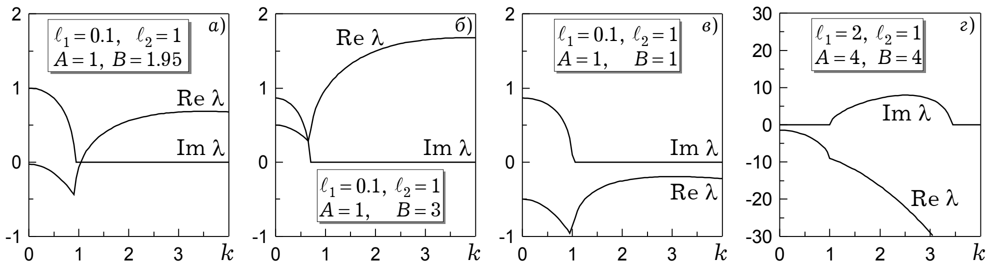

Рис. 2. Залежність дійсної та уявної частин власних значень від k для:
а) $\ell_1 = 0.1$, $\ell_2 = 1$, $A = 1$, $B = 1.95$; ***б***) $\ell_1 = 0.1$, $\ell_2 = 1$, $A = 1$, $B = 3$;
в) $\ell_1 = 0.1$, $\ell_2 = 1$, $A = 1$, $B = 1$; ***г***) $\ell_1 = 2$, $\ell_2 = 1$, $A = 4$, $B = 4$.

3.3. Взаємодія біфуркації Тьюрінга та біфуркації Гопфа. Незалежність порядку дробової похідної від внутрішніх біфуркаційних параметрів системи дає широкі можливості для суттєвого зближення умов, при яких можливі обидва типи біфуркацій. В цьому випадку за допомогою порядку дробової похідної можемо міняти характер біфуркації в системі навіть при дуже незначному відхиленні похідної від одиниці. Наприклад, якщо параметри системи є близькими до тих, які позначені на рис. 1*б* точкою *C*, можемо спостерігати принципово різні сценарії динаміки в системі (рис. 3) вже при невеликому відхиленні величини дробової похідної від одиниці. З точки зору однорідних коливань, система є стійкою. Але, якщо $\ell_1 \ll \ell_2 = 1$, то система стає нестійкою згідно з біфуркацією Тьюрінга. Вигляд власних значень для такого випадку наведено на рис. 2*а*. Як наслідок, для такого співвідношення $\operatorname{Im}\lambda$ і $\operatorname{Re}\lambda$ є можливим утворення коливних неоднорідних структур. Проте при незначному збільшенні α отримаємо однорідні коливання, а при незначному зменшенні α − просторово-неоднорідні стаціонарні дисипативні структури. Така закономірність має загальний характер: стійкі стаціонарні розв'язки в стандартній системі зі збільшенням α стають нестаціонарними. Результати комп'ютерного моделювання системи наведено на рис. 3, 4.

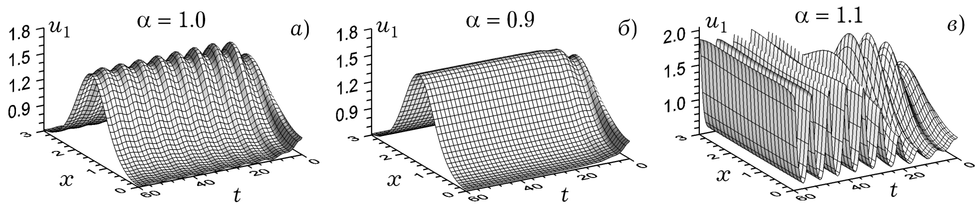

Рис 3. Сценарій динаміки u_1 при $A = 1, B = 1.95, \ell_1 = 0.1, \ell_2 = 1$ для
а) $\alpha = 1.0$; ***б***) $\alpha = 0.9$; ***в***) $\alpha = 1.1$.

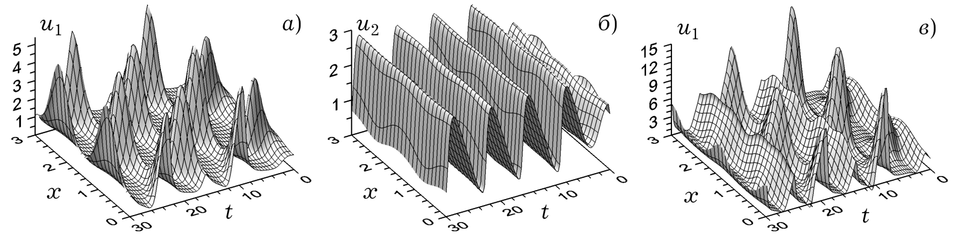

Рис 4. Сценарій динаміки: ***а***) u_1 та ***б***) u_2 при $A = 1, B = 1.8, \ell_1 = 0.01, \ell_2 = 1, \alpha = 1.3$;
в) динаміка змінної u_1 при $A = 2, B = 4, \ell_1 = 0.04, \ell_2 = 1, \alpha = 1.5$.

3.4. **Неоднорідні коливні структури.** Проте в моделі Брюселятора з дробовими похідними можна знайти умови нестійкості, які не задовольняють ні умови біфуркації Тьюрінга, ні умови біфуркації Гопфа. Зокрема, при умовах

$$-\ell_1^2k^2-\ell_2^2k^2+B-1-A^2<0, \qquad 4A^2<(B-1-A^2)^2,$$

$$4(\ell_1^2\ell_2^2k^4+\ell_1^2k^2A^2-B\ell_2^2k^2+\ell_2^2k^2+A^2)>$$

$$>(-\ell_1^2k^2-\ell_2^2k^2+B-1-A^2)^2 \tag{13}$$

маємо нестійкість для неоднорідних хвильових векторів з комплексними власними значеннями з від'ємними дійсними частинами і відмінними від нуля уявними частинами лише для певних значень хвильових чисел [9]. В цьому випадку, коли значення дробової похідної стає більшим, ніж деяке критичне значення α_0, умова нестійкості виконується для деякого інтервалу $k_{\min}<k<k_{\max}$ (рис. 2*г*). Це означає, що тільки збурення з такими хвильовими числами є нестійкими для часових коливань. Ця ситуація є якісно відмінною від випадку систем реакції-дифузії з цілими похідними, де має місце лише біфуркація Тьюрінга ($k\neq 0$) або Гопфа ($k=0$), і сценарій втрати стійкості залежить лише від того, яка з умов досягається легше. Хоча за умови (13) система стійка відносно біфуркацій Гопфа і Тьюрінга, проте умови біфуркації Гопфа можуть бути реалізовані для неоднорідних хвильових чисел (рис. 2*г*).

На рис. 1*в* наведено біфуркаційну діаграму для різних значень дробової похідної. На цьому рисунку замальовано області, в яких система є нестійкою при певних значеннях хвильового числа і в системі можуть виникати просторово-неоднорідні коливання. У найбільшій «параболі» система є нестійкою для $k=0$. Для випадку $k\neq 0$ знайдено умови нестійкості для різних хвильових чисел $k=1,2,3,\ldots$ (розв'язок рівняння $|\arg\lambda_i|=\alpha\pi/2$ для фіксованого α). Бачимо, що ці області частково перекривають одна одну і при одних і тих самих параметрах умови нестійкості для різних режимів виконуються одночасно. В результаті збурення з $k=0$, як правило, виявляються найбільш конкурентними. Проте в областях, де відсутня класична біфуркація Гопфа, стають нестійкими збурення з певним значенням $k\neq 0$, і в системі появляються просторово-неоднорідні коливання.

Результати комп'ютерного моделювання неоднорідних коливних структур подано на рис. 5*а*, *б* для параметрів системи в точці *D* (див. рис. 1*в*) і хвильового числа $k=1$.

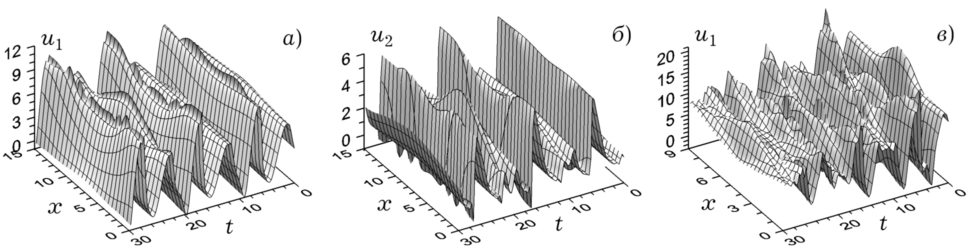

Рис. 5. Неоднорідні коливні структури:

а) u_1 та ***б***) u_2 при $A=3.6, B=4, \ell_1=2, \ell_2=1, \alpha=1.8$;

в) динаміка змінної u_1 при $A=7, B=7, \ell_1=3.5, \ell_2=1, \alpha=1.9$.

Поява неоднорідних коливань, які руйнують стаціонарний стан, приводить до утворення структур нового типу. Слід зазначити, що обидва власні значення при $k=0$, $\ell_1>\ell_2$ близькі до нуля і завдяки цьому збільшення α приводить до більш ускладненої просторово-часової динаміки (рис. 5*в*).

Висновки. Проведено аналіз лінійної стійкості та комп'ютерне моделювання розв'язків у математичній моделі Брюселятора з дробовими похідними. Отримано розв'язки, що мають форму однорідних коливань або неоднорідних структур, які можуть бути стаціонарними або коливними.

1. *Amblard F., Maggs A. C., Yurke B., Pargellis A. N., Leibler S.* Subdiffusion and anomalous local viscoelasticity in acting networks // Phys. Rev. Letters. – 1996. – **77**. – P. 4470–4473.
2. *Chen W.* Time-space fabric underlying anomalous diffusion // Chaos Solitons and Fractals. – 2006. – **28**. – P. 923–929.
3. *Cross M. C., Hohenberg P. C.* Pattern formation out of equilibrium // Rev. Mod. Phys. – 1993. – **65**. – P. 851–1112.
4. *Del-Castillo-Negrete D., Carreras B. A., Lynch V. E.* Front dynamics in reaction-diffusion systems with Levy flights: a fractional diffusion approach // Phys. Rev. Lett. – 2003. – **91**. – P. 018302-1-4.
5. *Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D., Luchko Y.* Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods // Comput. Meth. in Appl. Mech. and Eng. – 2005. – **194**. – P. 742–773.
6. *Gafiychuk V., Datsko B.* Inhomogeneous oscillatory solutions in fractional reaction-diffusion systems and their computer modeling // Appl. Math. and Comput. – 2008. – **198** – P. 251–260.
7. *Gafiychuk V., Datsko B.* Inhomogeneous oscillatory structures in fractional reaction-diffusion systems // Phys. Letters. A. – 2008. – **372**, No. 5. – P. 619–622.
8. *Gafiychuk V., Datsko B.* Pattern formation in a fractional reaction-diffusion system // Phys. A. – 2006. – **365**. – P. 300–306.
9. *Gafiychuk V., Datsko B.* Stability analysis and oscillatory structures in time-fractional reaction-diffusion systems // Phys. Rev. E. – 2007. – **75**. – P. 055201-1-4.
10. *Gafiychuk V., Datsko B., Meleshko V., Blackmore D.* Analysis of the solutions of coupled nonlinear fractional reaction-diffusion equatios // Chaos Solitons and Fractals. – 2008. – doi:10.1016/j.chaos.2008.04.039.
11. *Golovin A. A., Matkowsky B. J., Volpert V. A.* Turing pattern formation in the brusselator model with superdiffusion // SIAM J. App. Math. – 2008. – **69**. – P. 251–272.
12. *Harris-White M. E. et al.* Spiral intercellular calcium waves in hippocampal slice cultures // J. Neurophysiol. – 1998. – **79**. – P. 1045–1052.
13. *Henry B. I., Langlands T. A. M., Wearne S. L.* Turing pattern formation in fractional activator-inhibitor systems // Phys. Rev. E. – 2005. – **72**. – P. 026101-1-14 .
14. *Hornung G., Berkowitz B., Barkai N.* Morphogen gradient formation in a complex environment: an anomalous diffusion model // Phys. Rev. E. – 2005. – **72**. – P. 041916-1-10.
15. *Iomin A.* Toy model of fractional transport of cancer cells due to self-entrapping // Phys. Rev. E. – 2006. – **73**. – P. 061918-1-5.
16. *Kerner B. S., Osipov V. V.* Autosolitons. – Dordrecht: Kluwer, 1994. – 496 p.
17. *Kindzelskii A. L., Petty H. R.* From the Cover: Apparent role of traveling metabolic waves in oxidant release by living neutrophils // Proc. Natl. Acad. Sci. USA – 2002. – **99**. – P. 9207–9212.
18. *Langlands T. A. M., Henry B. I., Wearne S. L.* Anomalous subdiffusion with multi-species linear reaction dynamics // Phys. Rev. E. – 2008. – **77**. – P. 021111-1-9.
19. *Langlands T. A. M., Henry B. I., Wearne S. L.* Turing pattern formation with fractional diffusion and fractional reactions // J. Phys.: Condens. Matter. – 2007. – **19.** – P. 065115–065135.
20. *Mainardi F., Gorenflo R.* Time-fractional derivatives in relaxation processes: a tutorial survey // Fract. Calcul. and Appl. Anal. – 2008. – **10**. P. 269–308.
21. *Matignon D.* Stability results for fractional differential equations with applications to control processing // IMACS-SMC Proc. (July, 1996, Lille, France). – P. 963–968.
22. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Phys. Rep. – 2000. – **339**. – P. 1–77.
23. *Nakagava M., Sorimachi K.* Basic characteristics of a fractance device // IEICE Trans. Fundam. – 1992. – **75**, No 12. – P. 1814–1818.
24. *Nicolis G., Prigogine I.* Self-organization in non-equilibrium systems. – New York: Wiley, 1977. – 504 p.

25. *Petty H. R., Kindzelskii A. L.* Dissipative metabolic patterns respond during neutrophil transmembrane signaling // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2001. – **98**. – P. 3145–3149.
26. *Podlubny I.* Fractional differential equations. – San-Diego: Acad. Press, 1999. – 340 p.
27. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications. – Newark: Gordon and Breach, 1993. – 587 p.
    Те саме: *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
28. *Uchaikin V. V.* Self-similar anomalous diffusion and Levy-stable laws // Phys. Usp. – 2003. – **46**. – P. 821–849.
29. *Uchaikin V. V., Sibatov R. T.* Fractional theory for transport in disordered semiconductors // Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulation. – 2008. – **13**, No. 4. – P. 715–727.
30. *Valdès-Parada F. J., Ochoa-Tapia J. A., Alvarez-Ramirez J.* Effective medium equation for fractional Cattaneo's diffusion and heterogeneous reaction in disordered porous media // Phys. A: Statistic. Mech. and its Appl. – 2006. – **369,** No. 2. – P. 318–328.
31. *Vanag V. K.* Waves and patterns in reaction-diffusion systems. Belousov – Zhabotinsky reaction in water-in-oil microemulsions // Phys. Usp. – 2004. – **47**. – P. 923–943.
32. *Wang Y., Li C.* Does the fractional Brusselator with efficient dimension less than 1 have a limit cycle? // Phys. Lett. A. – 2007. – **363**. – P. 414–419.
33. *Westerlund S.* Dead matter has memory. – Causal Consulting, Kalmar, Sweden, 2002. – 220 p.
34. *Zaslavsky G. M.* Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Phys. Rep. – 2002. – **371**. – P. 461–580.
35. *Zaslavsky G. M.* Hamiltonian chaos and fractional dynamics. – Oxford University Press, 2005. – 421 p.

УСЛОВИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ВОЗМОЖНЫЕ БИФУРКАЦИИ В МОДЕЛИ БРЮСЕЛЯТОРА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Исследована динамическая модель Брюсселятора с временными дробными производными. Аналитически проведен спектральный анализ и показана возможность реализации разных типов бифуркации, включая новый тип комплексной бифуркации, для этой модели. С помощью компьютерного моделирования подтверждены результаты линейной теории и продемонстрированы особенности различного типа бифуркаций. Показано, что такая система может быть неустойчивой в широком диапазоне изменения порядка дробных производных. Обнаружено, что в результате этой неустойчивости в системе могут возникать качественно различные типы колебательных решений.

INSTABILITY CONDITIONS AND POSSIBLE BIFURCATIONS IN THE BRUSSELATOR MODEL WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

We investigate a Brusselator dynamical system with time fractional derivatives. Spectral analysis is fulfilled analytically for any values of derivative orders. It is shown that such a system could be unstable in wide interval of system parameters. Different types of oscillations appear as a result of this instability. Computer simulation of the typical oscillations demonstrating the observed effects are performed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.11.08