УДК 539.3

Б. С. Слободян, Р. М. Мартиняк

ПРОСТОРОВА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНИХ ПІВПРОСТОРІВ, ЗАЗОР МІЖ ЯКИМИ ЗАПОВНЕНИЙ ГАЗОМ

Розглянуто контакт пружних півпросторів за наявності ідеального газу в зазорі, зумовленому еліптичною в плані виїмкою на одній з поверхонь. З використанням теорії потенціалу та методу функцій міжконтактних зазорів напруження і переміщення у тілах подано через функцію висоти зазору, для визначення якої одержано інтегро-диференціальне рівняння. Досліджено контактну поведінку таких систем при навантаженні, зокрема, трансформацію зазору зі збільшенням прикладених зусиль.

Вступ. Середовище в області контакту тіл може істотно впливати на площу їхнього контакту і на напружено-деформований стан приповерхневих шарів. Вплив заповнених газом чи рідиною локальних міжповерхневих зазорів на контактну поведінку тіл з поверхневими виїмками за умов плоскої деформації вивчено в працях [1, 3, 4, 6]. У цій статті розв'язано просторову контактну задачу для півпросторів, один з яких має еліптичну в плані виїмку, з урахуванням заповнення зазору між ними ідеальним газом.

Формулювання задачі. Розглянемо взаємодію двох пружних ізотропних півпросторів D_1 (нижнього) і D_2 (верхнього). Межею півпростору D_2 є площина Ω, з якою сумістимо координатну площину Ox_1x_2 декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$. Межа нижнього тіла D_1 плоска скрізь, за винятком ділянки S_0, обмеженої еліпсом L_0 з півосями a_0, b_0 $(a_0 \le b_0)$, де вона має виїмку форми

$$r(x) = -r_0\left(1 - x_1^2/a_0^2 - x_2^2/b_0^2\right)^{3/2}, \qquad x \in S_0. \tag{1}$$

Тут $r_0 = r(0,0)$ − максимальна висота виїмки, x − точка з координатами (x_1, x_2, x_3). Виїмка є мілкою ($r_0 \ll a_0$, $r_0 \ll b_0$)), пологою ($\partial r(x)/\partial x_1 \ll 1$, $\partial r(x)/\partial x_2 \ll 1$, $x \in S_0$) і вздовж свого контуру плавно переходить у площину ($r(x) = 0$, $\partial r(x)/\partial x_1 = 0$, $\partial r(x)/\partial x_2 = 0$, $x \in L_0$).

Під дією рівномірно розподілених на нескінченності стискувальних навантажень P^∞ тіла вступають у контакт, який, однак, не є повним внаслідок нерівності поверхні одного з півпросторів, і між ними вздовж деякої ділянки $S \subset S_0$ буде міжповерхневий зазор заввишки $h(x)$, $x \in S$ (рис. 1). Вважаємо, що зазор заповнений ідеальним газом, який чинить тиск P_1 на поверхні тіл у межах ділянки S. Ззовні зазору на ділянках налягання поверхонь відбувається гладкий (безфрикційний) контакт. Зауважимо, що конфігурація ділянки S, висота зазору $h(x)$ і тиск газу P_1 в ньому наперед невідомі і змінюються в процесі навантаження.

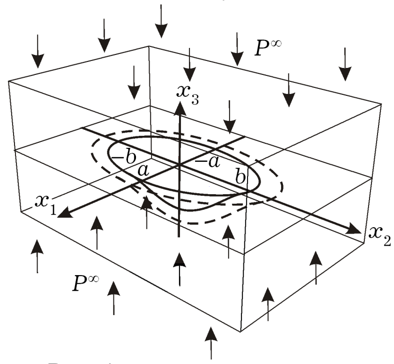

Рис. 1. Схема навантаження

Метод розв'язування. Напружено-деформований стан півпросторів можна подати у вигляді суперпозиції двох станів. Перший − виникає при контакті півпросторів з плоскими поверхнями під дією на нескінченності навантаження P^∞, за якого в будь якій точці тіла діють лише однорідні напруження $\sigma_{33}(x) = -P^{\infty}$. Другий стан – збурений виїмкою, зазором і тиском газу в ньому. Для визначення цього стану маємо такі контактно-крайові умови:

$$\sigma_{13}^{\pm}(x) = \sigma_{23}^{\pm}(x) = 0\,, \qquad x \in \Omega\,, \qquad \sigma_{33}^{\pm}(x) = P^{\infty} - P_1\,, \qquad x \in S\,,$$

$$u_3^{+}(x) - u_3^{-}(x) = r(x)\,, \qquad x \in S_0 \setminus S\,, \qquad u_i(\infty) = 0\,,\ i = 1, 2, 3\,. \tag{2}$$

Тут σ_{ij} – компоненти тензора напружень, u_i – компоненти вектора переміщень.

Для визначення тиску газу P_1 у зазорі використовуватимемо рівняння Клапейрона–Менделєєва

$$P_1 V = mRT/\mu\,, \tag{3}$$

де V, m, μ, T – об'єм, маса, молярна маса та температура газу, R – універсальна газова стала.

Зважаючи на відсутність дотичних напружень на межах півпросторів D_k ($k = 1, 2$), переміщення і напруження в кожному з них можна подати [2, 7] через одну гармонічну функцію $F_k(x)$ ($k = 1, 2$). Зокрема, компоненти $u_3(x)$ і $\sigma_{33}(x)$ визначаються через цю функцію у вигляді

$$u_3(x) = F_k(x) - \frac{x_3}{2(1-\nu_k)}\frac{\partial F_k(x)}{\partial x_3}\,,$$

$$\sigma_{33}(x) = \frac{G_k}{1-\nu_k}\left[\frac{\partial F_k(x)}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial^2 F_k(x)}{\partial x_3^2}\right], \qquad x \in D_k\,, \tag{4}$$

де G_k і ν_k – модуль зсуву й коефіцієнт Пуассона півпростору D_k ($k = 1, 2$).

Згідно з методом функцій міжконтактних зазорів, узагальненим стосовно просторових задач про взаємодію тіл за локальної відсутності контакту [2, 5], подаємо функції $F_k(x)$ через висоту виїмки $r(x)$ і зазору $h(x)$ у вигляді

$$F_k(x) = \frac{M_k}{2\pi M}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\iint\limits_{s}\frac{h(\xi)\,d_\xi S}{|x-\xi|} - \frac{\partial}{\partial x_3}\iint\limits_{s_0}\frac{r(\xi)\,d_\xi S}{|x-\xi|}\right], \qquad x \in D_k\,, \tag{5}$$

де $M_k = (1-\nu_k)/G_k$, $k = 1, 2$, $M = M_1 + M_2$.

Подання (4), (5) задовольняють всі контактно-крайові умови (2) сформульованої задачі, за винятком другої з них. Задовольнивши її, одержимо інтегрально-диференціальне рівняння для визначення функції $h(x)$:

$$\Delta_x\iint\limits_{S}\frac{h(\xi)\,d_\xi S}{|x-\xi|} = \Delta_x\iint\limits_{S}\frac{r(\xi)\,d_\xi S}{|x-\xi|} + 4\pi M\left(P^{\infty} - P_1\right), \qquad x \in S\,, \tag{6}$$

де $\Delta_x = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$.

Внаслідок плавного змикання берегів зазору на контурі L області S повинні виконуватися умови

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} = 0\,, \qquad x \in L\,. \tag{7}$$

Підставляючи в праву частину інтегро-диференціального рівняння (6) функцію висоти виїмки $r(x)$ (1) і визначаючи відповідний інтеграл, отримаємо

$$\frac{1}{4\pi}\Delta_x\iint\limits_{S}\frac{h(\xi)d_\xi S}{|x-\xi|} = \alpha_0 + A_0 x_1^2 + B_0 x_2^2\,, \tag{8}$$

де $\alpha_0 = M(P^{\infty} - P_1) - k_0 e_0^2 b_0^2 E(e_0)$, $k_0 = 3a_0 r_0/(4e_0^2 b_0^4 f_0)$, $A_0 = k_0\left[E(e_0)(1+e_0^2)\times\right.$

$\times f_0^{-1} - K(e_0)\big]$, $B_0 = k_0\big[(2e_0^2 - 1)E(e_0) + f_0 K(e_0)\big]$, $f_0 = 1 - e_0^2$, e_0 − ексцентриситет еліпса S_0, $K(e_0)$ і $E(e_0)$ − повні еліптичні інтеграли першого і другого родів.

Зважаючи на еліптичність виїмки та вигляд правої частини рівняння (8), припускатимемо, що ділянка S зазору теж є еліпсом з півосями a і b ($a \le b$, $a \le a_0$, $b \le b_0$), і шукатимемо висоту зазору у вигляді

$$h(x) = \beta\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}\right)^{3/2}, \qquad x \in S, \tag{9}$$

де $\beta = h(0,0)$ − максимальна висота зазору. Функція $h(x)$ (9) задовольняє умову (7).

Підставивши (9) у рівняння (8) і обчисливши інтеграл з використанням відомих формул [8, 9], отримаємо рівняння

$$\alpha + Ax_1^2 + Bx_2^2 = \alpha_0 + A_0 x_1^2 + B_0 x_2^2, \tag{10}$$

де

$\alpha = -ke^2b^2E(e)$, $k = 3a\beta/(4e^2b^4f)$, $A = k\big[E(e)(1+e^2)f^{-1} - K(e)\big]$, $B = k\big[(2e^2 - 1)E(e) + f\,K(e)\big]$, $f = 1 - e^2$, $e = \sqrt{1 - a^2/b^2}$ − ексцентриситет еліпса S.

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях многочленів у лівій і правій частинах (10), отримаємо систему трьох алгебраїчних рівнянь для визначення трьох невідомих a, b, β. Розв'язавши цю систему, одержимо

$$e = e_0, \quad a = a_0\sqrt{1 + N_0}, \qquad b = b_0\sqrt{1 + N_0}, \qquad \beta = r_0\left[1 + N_0\right]^{3/2}, \tag{11}$$

де $N_0 = 4M(P^\infty - P_1)b_0\sqrt{1 - e_0^2}/(3r_0E(e_0))$.

Співвідношення (11) визначають залежність геометричних параметрів міжконтактного зазору, описаного формулою (9), від прикладеного навантаження, тиску газу та геометричних характеристик виїмки. З першої із рівностей (11) випливає, що ексцентриситети міжконтактного зазору та виїмки однакові.

Враховуючи співвідношення (9), (11), визначимо об'єм зазору:

$$V = \iint_{S_0} h(\xi)\, d_\xi S.$$

Підставивши його в рівняння Клапейрона − Менделєєва (3), приходимо до рівняння стосовно тиску газу:

$$2a_0b_0\pi P_1\big[1 + N_0\big]^{5/2}/5 = mRT/\mu. \tag{12}$$

Знайшовши чисельно P_1 з рівняння (12) і підставивши в (11), визначаємо геометричні характеристики міжконтактного зазору.

Числові результати. Числові розрахунки проведено для безрозмірних величин

$$\tilde r_0 = \frac{r_0}{b_0},\ \tilde a = \frac{a}{a_0},\ \tilde b = \frac{b}{b_0},\ \tilde\beta = \frac{\beta}{r_0},\ \tilde V = \frac{V}{V_0},\ \tilde m = \frac{mRTM}{\mu}.$$

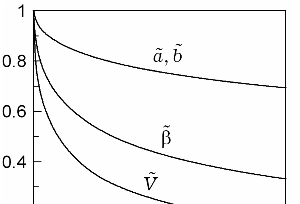

Рис. 2

На рис. 2 зображено залежність півосей зазору $\tilde a$, $\tilde b$, максимальної висоти зазору $\tilde\beta$ та його об'єму $\tilde V$ від навантаження $\tilde P^\infty = MP^\infty$ для виїмки з геометричними параметрами $\tilde a_0 = a_0/b_0 = 0.5$, $\tilde r_0 = 0.001$ та маси газу в зазорі $\tilde m = 6.28 \cdot 10^{-7}$. Бачимо, що геометричні параметри зазору нелінійно залежать від навантаження і спадають при його зростанні. Найшвидше зменшується з навантаженням об'єм зазору, найповільніше − його півосі.

Висновки. Розглянуто контакт пружних півпросторів за наявності в еліптичному зазорі між ними, зумовленому поверхневою виїмкою, ідеального газу. З використанням методу функцій міжконтактних зазорів сформульовану контактну задачу зведено до інтегро-диференціального рівняння відносно висоти зазору, яке розв'язано аналітично. Виявлено нелінійну залежність геометричних параметрів зазору від навантаження. Показано, що з ростом прикладених зусиль найшвидше спадає об'єм зазору, а найповільніше – його півосі.

1. *Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Мачишин И. М.* Влияние газожидкостного заполнителя межконтактного пространства на напряженное состояние сопряженных тел // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 3. – С. 52–60.
2. *Кіт Г. С., Мартиняк Р. М.* Просторові контактні задачі для пружного півпростору і жорсткої основи з поверхневими виїмками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 3. – С. 7–11.
3. *Мартиняк Р. М.* Контактна взаємодія двох півпросторів при наявності поверхневої виїмки, частково заповненої нестисливою рідиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1990. – **26**, № 2. – С. 91–94.
4. *Мартиняк Р. М.* Контакт півпростору з нерівною основою при заповненому ідеальним газом міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 4. – С. 144–149.
5. *Мартиняк Р. М.* Метод функцій міжконтактних зазорів у задачах локального порушення контакту пружних півпросторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 1. – С. 102–108.
6. *Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.* Вплив рідинних містків у міжповерхневому просвіті на контакт тіл із податливих матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 2. – С. 7–13.
7. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 263 с.
8. *Хай М. В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
9. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 270 с.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ, ЗАЗОР МЕЖДУ КОТОРЫМИ ЗАПОЛНЕН ГАЗОМ

Рассмотрен контакт упругих полупространств при наличии идеального газа в зазоре, обусловленном эллиптической в плане выемкой на одной из поверхностей. С использованием теории потенциала и метода функций межконтактных зазоров напряжения и перемещения в телах представлены через функцию высоты зазора, для определения которой получено интегро-дифференциальное уравнение. Исследовано контактное поведение таких систем при нагрузке, в частности трансформацию зазора с увеличением приложенных усилий.

3D CONTACT PROBLEM FOR ELASTIC HALF-SPACES WITH GAS FILLED INTERFACE GAP

The contact of elastic half-spaces with an ideal gas filled interfacial elliptic gap is considered. Stresses and displacements in solids are given through the function of a height of the gap. For its determination an integro-differential equation is obtained. The contact behavior of this system on load in particular transformation of the gap is analyzed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.11.08