УДК 512.536

К. П. Павлик

ТОПОЛОГІЧНІ РОЗШИРЕННЯ БРАКА – РЕЙЛІ ТОПОЛОГІЧНИХ НАПІВГРУП

Досліджуються напівгрупові топологізації розширення Брака – Рейлі топологічних напівгруп. Показано, що для кожної топологічної напівгрупи S така топологізація існує, а у випадку, коли S – топологічна інверсна напівгрупа з мінімальним ідеалом або S містить H-замкнений правий (лівий, двосторонній) ідеал, то така топологізація напівгрупи $BR(S,\theta)$ єдина, а саме, є так званою топологією прямої суми.

Термінологія, означення і позначення такі, як у монографіях [5, 7, 11]. Усі топологічні простори, що розглядаються далі, вважаємо гаусдорфовими. Через N позначимо множину всіх невід'ємних цілих чисел, а через $\mathbb{N}$ – множину натуральних чисел. Якщо S – напівгрупа, то через $E(S)$ позначатимемо підмножину ідемпотентів S, а через S^1 – напівгрупу S з приєднаною одиницею.

В алгебраїчній теорії напівгруп важливу роль відіграють прості напівгрупи. Відомі різні конструкції занурення напівгруп у прості, зокрема, конструкція Брака занурення довільної напівгрупи у просту напівгрупу з одиницею [10]. Починаючи з 60-х років XX ст. Р. Уорн та інші почали використовувати біциклічну напівгрупу та її узагальнення для вивчення таких класів напівгруп. У 1997 році Р. Уорн побудував біциклічне розширення напівгрупи і довів, що напівгрупа S ізоморфна біциклічному розширенню скінченного ланцюга груп тоді й тільки тоді, коли вона є простою правою ω-напівгрупою [19]. Частковим випадком біциклічного розширення є розширення Брака – Рейлі, за допомогою якого описано класи простих і біпростих ω-напівгруп [6, 14]. Топологічні властивості біциклічної напівгрупи, як топологічної або напівтопологічної, досліджували К. Ебергард і Дж. Селден [12], а також М. О. Бертман та Т. Т. Вест [9]. А. Селден досліджувала біпрості ω-напівгрупи у локально компактних напівгрупах і вивчала їх замикання у цих просторах [15–18].

Напівгрупою називають непорожню множину із заданою на ній бінарною асоціативною операцією. Напівгрупову операцію називатимемо «множенням». Напівгрупу S називають *інверсною*, якщо для довільного $x \in S$ існує єдиний елемент y в S такий, що $xyx = x$ і $yxy = y$. У цьому випадку елемент y напівгрупи S називають *інверсним* до x і позначають x^{-1}. Якщо S – інверсна напівгрупа, то відображення, яке ставить у відповідність елементу x з S інверсний до x елемент, називають *інверсією*.

Топологічна напівгрупа – це гаусдорфовий топологічний простір із заданою на ньому неперервною напівгруповою операцією. *Топологічна інверсна напівгрупа* – це топологічний простір із заданою на ньому неперервною напівгруповою операцією та неперервною інверсією.

Означення 1. Нехай S – моноїд, $\theta : S \to G(S)$ – гомоморфізм з S у групу одиниць $G(S)$ моноїда S. Множина $N \times S \times N$ із напівгруповою операцією

$$(m,a,n) * (p,b,q) = (m - n + t, a\theta^{t-n} \cdot b\theta^{t-p}, q - p + t),$$

де $t = \max(n,p)$, θ^0 – тотожне відображення на S, утворює напівгрупу, що називається *розширенням Брака – Рейлі моноїда* S із визначальним гомоморфізмом θ і позначається $BR(S,\theta)$. Більш детально, напівгрупова операція на $BR(S,\theta)$ означується так:

$$(m,a,n)*(p,b,q)=\begin{cases}(m,a\cdot b,q), & n=p,\\ (m,a\cdot b\theta^{n-p},q+n-p), & n>p,\\ (m+p-n,a\theta^{p-n}\cdot b,q), & n<p.\end{cases}$$

Ця конструкція є узагальненням конструкцій Брака [10], Рейлі [14] і Манна [13], які використовували їх для побудови занурення довільної напівгрупи у простий моноїд та опису певних класів інверсних напівгруп. У виродженому випадку, коли $S=\{e\}$, розширення Брака – Рейлі $BR(S,\theta)$ є біциклічною напівгрупою $\mathcal{C}(p,q)$. У більш загальному випадку, коли G – група і θ – довільний ендоморфізм групи G, напівгрупа $BR(G,\theta)$ є біпростою ω-регулярною напівгрупою. Якщо $\theta: S\to\{e\}$ – анулюючий гомоморфізм, то $BR(S,\theta)$ – напівгрупа Брака.

Напівгрупа $BR(S,\theta)$ є простим моноїдом з одиницею $(0,1,0)$, де 1 – одиниця моноїда S. Відображення, означене $a\mapsto(0,a,0)$, є вкладенням напівгрупи S у $BR(S,\theta)$. Якщо σ – ендоморфізм моноїда S, що відображає S на $\{e\}$, то моноїд $BR(S,\theta)$ – простий. Таким чином, довільна напівгрупа S занурюється у простий моноїд $BR(S,\theta)$. Напівгрупа $BR(S,\theta)$ регулярна (інверсна) тоді й тільки тоді, коли напівгрупа S регулярна (інверсна). Якщо S – інверсна напівгрупа, то $(m,a,n)^{-1}=(n,a^{-1},m)$ для довільних $m,n\in N$, $a\in S$. Ідемпотентами напівгрупи $BR(S,\theta)$ є елементи вигляду (m,a,m), де $a\in E(S)$, $m\in N$.

Задача топологізації напівгрупи Брака досліджувалась у роботах [1–4]. Зокрема, в [1] було вказано умови, коли на напівгрупі Брака існує лише топологія прямої суми. З використанням конструкції Брака в [1–4] було запропоновано конструкції занурення топологічних напівгруп у прості, прості зв'язні та прості лінійно зв'язні топологічні напівгрупи. У цій роботі досліджуємо напівгрупову топологізацію розширення Брака – Рейлі топологічних напівгруп. Покажемо, що для кожної топологічної напівгрупи S така топологізація існує, а у випадку, коли S – топологічна інверсна напівгрупа з мінімальним ідеалом або S містить H-замкнений правий (лівий, двосторонній) ідеал, то така топологізація напівгрупи $BR(S,\theta)$ єдина, а саме, є так званою топологією прямої суми.

Нехай (S,τ) – довільна топологічна напівгрупа, $\mathcal{B}$ – база топології τ на S, 1_S – одиниця напівгрупи S. Якщо S не містить одиниці, то будемо вважати, що до S одиниця приєднана як ізольована точка.

На напівгрупі $BR(S,\theta)$ означимо топологію τ^* таким чином. Сім'я

$$\mathcal{B}_{BR}=\{(m,U,n)\mid U\in\mathcal{B},\ m,n\in N\}$$

підмножин в $BR(S,\theta)$ задовольняє умови (B1)–(B2) [7], а, отже, $\mathcal{B}_{BR}$ – база топології τ^* на напівгрупі $BR(S,\theta)$.

Покажемо, що τ^* – напівгрупова топологія на $BR(G,\theta)$. Нехай a,b – довільні елементи з S. З неперервності множення на (S,τ) випливає, що для довільного відкритого околу $U(ab)$ елемента ab в S існують відкриті околи $U_1(a)$, $U_2(b)$ елементів a,b в S відповідно такі, що $U_1(a)\cdot U_2(b)\subseteq U(ab)$.

Нехай (m,a,n), (p,b,q) – довільні елементи напівгрупи $BR(S,\theta)$. Розглянемо можливі випадки.

1°. Якщо $n=p$, то $(m,a,n)*(p,b,q)=(m,ab,q)$. Тоді

$$(m,U_1(a),n)*(p,U_2(b),q)=(m,U_1(a)\cdot U_2(b),q)\subseteq(m,U(ab),q).$$

2°. Якщо $n > p$, то $(m,a,n) * (p,b,q) = (m, ab\theta^{n-p}, q + n - p)$. Нехай $U_2(b\theta^{n-p})$ – довільний відкритий окіл точки $b\theta^{n-p}$. Тоді з неперервності гомоморфізму θ випливає, що для довільного відкритого околу $U_2(b\theta^{n-p})$ точки $b\theta^{n-p}$ існує відкритий окіл $U_2^*(b)$ точки b такий, що $(U_2^*(b))\theta^{n-p} \subseteq \subseteq U_2(b\theta^{n-p})$. Тому

$$(m, U_1(a), n) * (p, U_2^*(b), q) \subseteq (m, U_1(a) \cdot (U_2^*(b))\theta^{n-p}, q + n - p) \subseteq$$
$$\subseteq (m, U_1(a) \cdot U_2(b\theta^{n-p}), q + n - p) \subseteq (m, U(a \cdot b\theta^{n-p}), q + n - p).$$

3°. Якщо $n < p$, то $(m,a,n) * (p,b,q) = (m + p - n, a\theta^{p-n} \cdot b, q)$. Якщо $U_1(a\theta^{p-n})$ – довільний відкритий окіл точки $a\theta^{p-n}$, то з неперервності гомоморфізму θ випливає, що для довільного відкритого околу $U_1(a\theta^{p-n})$ точки $a\theta^{p-n}$ існує відкритий окіл $U_1^*(a)$ точки a такий, що $U_1^*(a)\theta^{p-n} \subseteq \subseteq U_1(a\theta^{p-n})$. Тому

$$(m, U_1(a), n) * (p, U_2(b), q) \subseteq (m + p - n, (U_1^*(a))\theta^{p-n} \cdot U_2(b), q) \subseteq$$
$$\subseteq (m + p - n, U_1(a\theta^{p-n}) \cdot U_2(b), q) \subseteq (m + p - n, U(a\theta^{p-n}b), q).$$

Отже, $(BR(S,\theta), \tau^*)$ – топологічна напівгрупа.

Нехай (S,τ) – топологічна інверсна напівгрупа. Тоді для довільного елемента a з S та довільного відкритого окола $U(a^{-1})$ елемента a^{-1} існує відкритий окіл $V(a)$ елемента a в S такий, що $(V(a))^{-1} \subseteq U(a^{-1})$. Тому для довільного відкритого околу $(m, U(a^{-1}), n)$ існує відкритий окіл $(n, V(a), m)$ такий, що

$$(n, V(a), m)^{-1} = (m, V(a)^{-1}, n) \subseteq (m, U(a)^{-1}, n).$$

Таким чином, доведено

Твердження 1. *Якщо* (S,τ) *– топологічна (інверсна) напівгрупа, то* $(BR(S,\theta), \tau^*)$ *– топологічна (інверсна) напівгрупа.*

Нехай (S,d) – метризовна топологічна напівгрупа і метрика d породжує топологію τ на S. Означимо на $BR(S,\theta)$ метрику d^* так:

$$d^*((m,a,n),(p,b,q)) = d(a,b) + |m - p| + |n - q|.$$

Ця метрика, очевидно, породжує раніше побудовану топологію τ^* на напівгрупі $BR(S,\theta)$.

Таким чином, виконується

Наслідок 1. *Якщо* (S,d) *– метризовна топологічна (інверсна) напівгрупа, то* $(BR(S,\theta), d^*)$ *– метризовна топологічна (інверсна) напівгрупа.*

Зауважимо, що твердження 1 та наслідок 1 є узагальненням теореми 1 та твердження з роботи [1].

Наслідок 2. *Напівгрупа* (S,τ) *є відкрито-замкненою піднапівгрупою топологічної напівгрупи* $(BR(S,\theta), \tau^*)$*, причому простір* $(BR(S,\theta), \tau^*)$ *– гомеоморфний декартовому добутку* $N \times S \times N$*, де* N *– зліченний дискретний простір.*

Гомеоморфізм $\varphi : BR(S,\theta) \to N \times S \times N$ означимо так:

$$\varphi((m,a,n)) = (m,a,n).$$

Нехай $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – сім'я диз'юнктних топологічних просторів. Множину $X = \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ з топологією $\tau = \{U \subset X \mid U \bigcap X_\alpha$ – відкрита в X_α для кожного $\alpha \in A\}$ називають *сумою просторів* $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ і позначають $\oplus \{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Топологію τ називають *топологією прямої суми на* X [7].

Зауважимо, що топологія τ^* на $BR(S,\theta)$ задовольняє означення топології прямої суми і тому τ^* надалі будемо називати *топологією прямої суми* на $BR(S,\theta)$.

Нехай S – напівгрупа. Тоді для довільних $m,n \in N$ і $A \subseteq S$ позначимо $S_{m,n} = \{(m,a,n) \mid a \in S\}$ і $A_{m,n} = \{(m,a,n) \mid a \in A \subseteq S\}$.

Означення 2. Нехай $\mathcal{S}$ – клас топологічних напівгруп і $(S,\tau) \in \mathcal{S}$. Якщо τ_{BR} – топологія на $BR(S,\theta)$ така, що

(***i***) $(BR(S,\theta),\tau_{BR}) \in \mathcal{S}$,

(***ii***) $\tau_{BR}\,|_{S_{m,m}} = \tau$ для деякого $m \in N$,

то $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$ називаємо *топологічним розширенням Брака – Рейлі топологічної напівгрупи* (S,τ) *у класі* $\mathcal{S}$. Якщо $\mathcal{S}$ співпадає з класом усіх топологічних напівгруп, то $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$ називаємо *топологічним розширенням Брака – Рейлі напівгрупи* (S,τ).

Зауважимо, що з твердження 1 випливає, що для довільної топологічної (інверсної) напівгрупи (S,τ) існує топологічне розширення Брака – Рейлі напівгрупи (S,τ) (у класі топологічних інверсних напівгруп), а саме $(BR(S,\theta),\tau^*)$, де τ^* – топологія прямої суми на $BR(S,\theta)$.

Надалі (S,τ) – топологічна напівгрупа і $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$ – топологічне розширення Брака – Рейлі напівгрупи (S,τ).

Твердження 2. *Для довільних $i,j,m,n \in N$ топологічні підпростори $S_{i,j}$ та $S_{m,n}$ гомеоморфні, а $S_{i,i}$ та $S_{m,m}$ – топологічно ізоморфні піднапівгрупи в $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$.*

Д о в е д е н н я. Зафіксуємо $i,j,m,n \in N$. Означимо відображення $\varphi_{i,j}^{m,n} : BR(S,\theta) \to BR(S,\theta)$ та $\psi_{m,n}^{i,j} : BR(S,\theta) \to BR(S,\theta)$ формулами:

$$\varphi_{i,j}^{m,n}(s) = (m,1_S,i) * s * (j,1_S,n) \quad \text{та} \quad \psi_{m,n}^{i,j}(s) = (i,1_S,m) * s * (n,1_S,j),$$

де $s \in BR(S,\theta)$. Відображення $\varphi_{i,j}^{m,n}$ та $\psi_{m,n}^{i,j}$ є неперервними як композиції зсувів у топологічній напівгрупі $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$. Покажемо, що звуження $\varphi_{i,j}^{m,n}\big|_{S_{i,j}}$ та $\psi_{m,n}^{i,j}\big|_{S_{m,n}}$ є гомеоморфізмами. Очевидно, що $\psi_{m,n}^{i,j}(\varphi_{i,j}^{m,n}(s)) = s$ і $\varphi_{i,j}^{m,n}(\psi_{m,n}^{i,j}(s)) = s$ для довільних $i,j,m,n \in N$ і $s \in BR(S,\theta)$, а отже, $\varphi_{i,j}^{m,n}\,|_{S_{i,j}} = (\psi_{m,n}^{i,j})^{-1}\,|_{S_{i,j}}$. Оскільки відображення $\varphi_{i,j}^{m,n}$ і $\psi_{m,n}^{i,j}$ є неперервними на $BR(S,\theta)$, то $\varphi_{i,j}^{m,n}\,|_{S_{i,j}}$ – гомеоморфізм, що переводить елементи множини $S_{i,j}$ в елементи множини $S_{m,n}$. У випадку піднапівгруп $S_{i,i}$ та $S_{m,m}$ відображення $\varphi_{i,i}^{m,n}\,|_{S_{i,i}}$ є ізоморфізмом, а отже, $S_{i,i}$ та $S_{m,m}$ – топологічно ізоморфні піднапівгрупи в $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$. ◊

Твердження 3. *Нехай* $(G(S))_{k,m}$ *– замкнена підмножина в* $BR(S,\theta)$ *для деяких* $k,m\in N$. *Тоді* $(G(S))_{i,j}$ *– замкнені підпростори в* $BR(S,\theta)$ *для всіх* $i\le k$, $j\le m$, $i,j\in N$.

Д о в е д е н н я. Означимо відображення

$$\varphi_{i,j}^{k,m}(x)=(k,1_S,i)*x*(j,1_S,m).$$

Це відображення є неперервним як композиція зсувів у топологічній напівгрупі $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$ і переводить лише елементи множини $S_{i,j}$ в елементи множини $S_{k,m}$. Тому $(\varphi_{i,j}^{k,m})^{-1}((G(S))_{k,m})=(G(S))_{i,j}$, де $i\le k$, $j\le m$, $i,j\in N$. Оскільки $(G(S))_{k,m}$ – замкнена множина, то $(G(S))_{i,j}$ – замкнений підпростір для всіх $i\le k$, $j\le m$, $i,j\in N$. ◊

Лема 1. *Для довільного елемента* $\tilde{s}\in S_{i,i}\subset BR(S,\theta)$, $i\in N$, *існує відкритий окіл* $U(\tilde{s})$ *такий, що* $U(\tilde{s})\subset \bigcup_{j,k=1}^{i} S_{j,k}$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо відображення $h(x):BR(S,\theta)\to BR(S,\theta)$ та $g(x):BR(S,\theta)\to BR(S,\theta)$ означені формулами: $h(x)=x*e$ та $g(x)=$ $=f*x$, де $e=(j+1;1_S;j+1)$, $f=(i+1;1_S;i+1)$. За твердженням 1.7 з [11] для довільного $e\in E(S)$ множини eS та Se замкнені, тому $h(S)\bigcup g(S)$ – замкнена підмножина напівгрупи $BR(S,\theta)$. Якщо $W(\tilde{s})$ – відкритий окіл елемента $\tilde{s}$, то окіл $U(\tilde{s})=W(\tilde{s})\setminus(h(S)\bigcup g(S))$ – шуканий. ◊

Лема 2. *Нехай* $(G(S))_{i,j}$ *– замкнена підмножина в* $BR(S,\theta)$ *для деяких* $i,j\in N$. *Тоді для довільного елемента* $s\in S_{i,i}\subset BR(S,\theta)$ *існує відкритий окіл* $U(s)$ *такий, що* $U(s)\subset \bigcup_{k=0}^{i} S_{k,k}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $O(s)$ – окіл елемента s такий, що $O(s)\bigcap S_{m,n}\ne$ $\ne\varnothing$ для деяких $m,n\in N$, $m\ne n$. Розглянемо відображення $\varphi: BR(S,\theta)\to$ $\to BR(S,\theta)$ означене $\varphi(x)=(m+n,1_S,m+n)*x$. Якщо $t\in O(s)\bigcap S_{m,n}$, то $t=(m,t_1,n)$, де $t_1\in S$, і

$$\varphi(t)=(m+n,1_S,m+n)*(m,t_1,n)=(m+n,t_1\theta^n,2n).$$

Множина $\Phi_{m,n}=\varphi^{-1}((m+n,t_1\theta^n,2n))$ замкнена в $BR(S,\theta)$, як повний прообраз замкненої множини $(G(S))_{m,n}$ при неперервному відображенні. Позначимо через A скінченну сім'ю множин вигляду $\Phi_{m,n}$, $m,n\in N, m\ne$ $\ne n$, таких, що $O(s)\bigcap S_{m,n}\ne\varnothing$. Тоді $V(s)=O(s)\setminus\bigcup A$ – відкритий окіл точки $s\in S_{i,i}$, що перетинає лише множини вигляду $S_{k,k}$, $k\in N$. ◊

Лема 3. *Нехай* $(G(S))_{i,j}$ *– замкнена підмножина в* $BR(S,\theta)$ *для деяких* $i,j\in N$. *Тоді для довільних* $i\in N$ *та* $x\in S_{i,i}$ *існує відкритий окіл* $U((i,x,i))$ *такий, що* $U((i,x,i))\subset S_{i,i}\bigcup S_{i-1,i-1}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $V((i,x,i))$ – відкритий окіл елемента (i,x,i), що задовольняє умови леми 2. Означимо неперервне відображення

$h : BR(S,\theta) \to BR(S,\theta)$ наступним чином: $h(t) = t*(i-1,1_S,i-1)$. Оскільки за твердженням 3, $(G(S))_{i,i}$ – замкнений підпростір для довільного $i \in N$, то $U((i,x,i)) = V((i,x,i)) \setminus h^{-1}((i-1,(G(S))_{i,i},i-1))$ – шуканий окіл. ◊

Лема 4. *Нехай* $(G(S))_{i,j}$ *– замкнена підмножина в* $BR(S,\theta)$ *для деяких* $i,j \in N$. *Тоді для довільних* $k,p \in \mathbb{N}$ *і для кожного* $s \in S_{k,p} \setminus (G(S))_{k,p}$ *існує відкритий окіл* $U(s) \subset S_{k,p}$.

Доведення. Нехай $V(s)$ – відкритий окіл, що задовольняє умови леми 2. Означимо неперервне відображення $\ell : BR(S,\theta) \to BR(S,\theta)$ таким чином: $\ell(x) = x*(i,1_S,i)$. Оскільки за твердженням 3 множина $(G(S))_{i,i}$ – замкнена, то відкритий окіл $U(s) = V(s) \setminus \ell^{-1}((i,(G(S))_{i,i},i))$ – шуканий. ◊

Лема 5. *Нехай* $(G(S))_{i,j}$ *– замкнена підмножина в* $BR(S,\theta)$ *для деяких* $i,j \in N$. *Тоді для довільних* $k,p \in \mathbb{N}$ *і для кожного* $s \in S_{k,p} \setminus (G(S))_{k,p}$ *існує відкритий окіл* $U(\tilde{s}) \subset S_{k,p} \bigcup S_{k-1,p-1}$.

Доведення. Припустимо, що $k > p$. У випадку $k < p$ доведення аналогічне. За лемою 3 для точки (k,s,k) існує відкритий окіл $U((k,s,k)) \subset \subset S_{k,k} \bigcup S_{k-1,k-1}$. Розглянемо відображення $h : BR(S,\theta) \to BR(S,\theta)$ означене $h(x) = x*(0,1_S,k-p)$. Окіл $W = h^{-1}(U)$ – шуканий. ◊

Лема 6. *Нехай* $(G(S))_{i,j}$ *замкнена множина в* $BR(S,\theta)$ *для деяких* $i,j \in \in N$. *Тоді для довільного елемента* $\tilde{s} \in S_{k,p} \setminus (G(S))_{k,p}$ *напівгрупи* $BR(S,\theta)$ *існує відкритий окіл* $U(\tilde{s}) \subset S_{k,p}$.

Доведення. Нехай $V(s)$ – відкритий окіл точки $s \in S_{k,\ell}$, що задовольняє умови леми 2. Оскільки множина $(G(S))_{i,j}$ – замкнена, то за твердженням 3, $(G(S))_{0,0}$ – замкнена підмножина у $BR(S,\theta)$. Відображення $r_k : BR(S,\theta) \to BR(S,\theta)$, означене формулою $r_k(x) = x*(k,1_S,0)$, є неперервним, а отже, множина

$$A = r_k^{-1}((G(S))_{0,0}) = \{(0,s,\ell) \mid s \in S^1; p = 0,1,\dots,\ell-1\} \bigcup \{(G(S))_{0,\ell}\}$$

замкнена, як повний прообраз замкненої множини при неперервному відображенні. Аналогічно, оскільки відображення $\lambda_\ell : BR(S,\theta) \to BR(S,\theta)$ означене як $\lambda_\ell(x) = (0;1_S;\ell)*x$ є неперервним, то підмножина

$$B = \lambda_\ell^{-1}(A) = (\{(m,s,n) \mid s \in S^1, m = 0,1,\dots,k;\ n = 0,1,\dots,\ell\} \setminus S_{k,\ell}) \bigcup \{(G(S))_{k,\ell}\}$$

замкнена в $BR(S,\theta)$. Тоді окіл $U(s) = V(s) \setminus B$ – шуканий. ◊

З лем 5 і 6 випливає

Теорема 1. *Нехай* (S,τ) *– топологічна напівгрупа,* $(BR(S,\theta),\tau)$ *– топологічне розширення Брака – Рейлі напівгрупи* (S,τ) *таке, що множина* $(G(S))_{i,j}$ *замкнена в* $(BR(S,\theta),\tau)$ *для деяких* $i,j \in N$. *Тоді для довільного елемента* s *в* $BR(S,\theta) \setminus \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}}(G(S))_{i,j}$ *база топології* τ *в точці* s *співпадає з базою топології прямої суми* τ^* *на напівгрупі* $BR(S,\theta)$.

Теорема 2. *Нехай* (S,τ) *– топологічний інверсний моноїд,* $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$ *– топологічне розширення Брака – Рейлі напівгрупи* (S,τ) *в класі топологічних інверсних напівгруп і моноїд* S *містить мінімальний ідемпотент. Тоді* τ_{BR} *– топологія прямої суми на* $BR(S,\theta)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\tilde{s}=(i,s,j)$ – довільний елемент напівгрупи $BR(S,\theta)$ і e_0 – мінімальний ідемпотент напівгрупи S. Означимо $e_{0,i-1}=$ $=(i-1,e_0,i-1)$ і $e_{0,j-1}=(j-1,e_0,j-1)$. Тоді

$$\uparrow e_{0,i-1}=\{f\in E(BR(S,\theta))\mid fe_{0,i-1}=e_{0,i-1}f=e_{0,i-1}\},$$

$$\uparrow e_{0,j-1}=\{f\in E(BR(S,\theta))\mid fe_{0,j-1}=e_{0,j-1}f=e_{0,j-1}\}$$

є замкненими підмножинами в $E(BR(S,\theta))$ з індукованою топологією з $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$.

Оскільки $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$ – топологічна інверсна напівгрупа, то відображення $\varphi,\psi:BR(S,\theta)\to E(BR(S,\theta))$, означені як $\varphi(x)=xx^{-1}$ і $\psi(x)=x^{-1}x$ є неперервними. А отже, $A_{i,j}=\varphi^{-1}(\uparrow e_{0,i-1})\cup\psi^{-1}(\uparrow e_{0,j-1})$ – замкнена підмножина в $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$.

Оскільки відображення φ та ψ – неперервні, то кожна максимальна підгрупа в топологічній інверсній напівгрупі є замкненою підмножиною. Отже, існує $U(\tilde{s})$ – окіл елемента $\tilde{s}$, що задовольняє умови леми 5. Означимо $V(\tilde{s})=U(\tilde{s})\setminus A_{i,j}$. Очевидно, що $V(\tilde{s})\subseteq S_{i,j}$, а отже, за твердженням 2, τ_{BR} – топологія прямої суми на $BR(S,\theta)$. ◊

Топологічний простір X називають H*-замкненим*, якщо довільний гаусдорфовий простір, що містить X, містить X як замкнений підпростір [7, 8].

Теорема 3. *Нехай* (S,τ) *– топологічний моноїд,* $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$ *– топологічне розширення Брака – Рейлі напівгрупи* S. *Тоді, якщо виконується одна з умов*:

(***i***) S *містить* H*-замкнений правий (лівий, двосторонній) ідеал;*
(***ii***) S *містить компактний правий (лівий, двосторонній) ідеал;*
(***iii***) S *– компактна топологічна напівгрупа,*

то τ_{BR} *– топологія прямої суми на* $BR(S,\theta)$.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що топологічна напівгрупа S містить H-замкнений правий ідеал I. Міркування у всіх інших випадках є аналогічними.

Спочатку покажемо, що для довільної точки $\tilde{s}=(i,s,i)\in BR(S,\theta)$, $i\in\mathbb{N}$, $s\in S^1$, існує відкритий окіл $U(\tilde{s})$ такий, що $U(\tilde{s})\subseteq S_{i,i}$. Нехай $V(\tilde{s})$ – довільний відкритий окіл точки $\tilde{s}$. Оскільки

$$(i+1,1_S,i+1)BR(S,\theta) \qquad \text{та} \qquad BR(S,\theta)(i+1,1_S,i+1)$$

– замкнені підмножини в $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$, то, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $V(\tilde{s})\cap(BR(S,\theta)(i+1,1_S,i+1)\cup(i+1,1_S,i+1)BR(S,\theta))=\varnothing$.

Нехай $\tilde{t}\in I_{i-1,i-1}$. Означимо неперервне відображення $\alpha:BR(S,\theta)\to$ $\to BR(S,\theta)$ формулою $\alpha(x)=\tilde{t}*x$. Тоді $A=I_{i-1,i-1}\cup\alpha^{-1}(I_{i-1,i-1})=$ $=S_{1,1}\cup\ldots\cup S_{i-1,i-1}$ – замкнена підмножина в $(BR(S,\theta),\tau_{BR})$.

Далі для довільного $k \in N$ означимо відображення $\ell_k : BR(S,\theta) \to$ $\to BR(S,\theta)$ і $r_k : BR(S,\theta) \to BR(S,\theta)$ формулами $\ell_k(x) = (0;1_S;k) * x$ і $r_k(x) = x * (k;1_S;0)$.

Оскільки відображення ℓ_k, r_k є неперервними, то $B = \bigcup_{k=1}^{i}(r_k^{-1}(A) \cup \ell_k^{-1}(A))$ – замкнена підмножина в $(BR(S,\theta), \tau_{BR})$, а отже, $U(\tilde{s}) = V(\tilde{s}) \setminus B \subset S_{i,i}$. Таким чином, $S_{i,i}$ – відкрита множина в $(BR(S,\theta), \tau_{BR})$ для довільного $i \in N$.

Далі покажемо, що $S_{i,j}$ – відкрита підмножина в $(BR(S,\theta), \tau_{BR})$ для всіх $i, j \in N$. Якщо $i < j$, то $S_{i,j} = r_{j,i}^{-1}(S_{i,i})$ – відкрита підмножина в $(BR(S,\theta), \tau_{BR})$, а якщо $i > j$, то $S_{i,j} = \ell_{i-j}(S_{j,j})$ – відкрита підмножина в $(BR(S,\theta), \tau_{BR})$. З твердження 2 та з означення 2 випливає, що τ_{BR} – топологія прямої суми на $(BR(S,\theta), \tau_{BR})$.

Доведення для випадку умови (***ii***) випливає з п. (***i***).

Доведення для випадку умови (***iii***) випливає з п. (***ii***). ◊

Зауваження 1. З теореми 2 випливає, що на біциклічній напівгрупі існує тільки дискретна напівгрупова топологія (див. [12]).

Зауваження 2. Зауважимо також, що у випадку, коли I – лівий, правий чи двосторонній ідеал топологічної напівгрупи S, що є H-замкненою напівгрупою, то виконуються твердження теореми 3.

Наступний приклад показує, що існування мінімального ідемпотента в топологічній інверсній напівгрупі S – суттєва умова.

Приклад 1 [1]. Нехай $S = ([0;1), \max)$ – напівгрупа з природною топологією τ без мінімального ідемпотента. У точках вигляду $(m, 1_S, n)$, $m, n \in$ $\in \mathbb{N}$, напівгрупи $BR(S,\theta)$ послабимо топологію τ^* до напівгрупової таким чином. Для всіх $m, n \in \mathbb{N}$ нехай

$$\mathcal{B}((m,1_S,n)) = \{U_\varepsilon = (m,U,n) \cup \{(m-1,x,n-1) \mid x \in (1-\varepsilon,1)\} \mid U$$
$$- \text{ елемент бази топології в точці } 0 \text{ і } \varepsilon \in (0,1)\}$$

– база топології τ_1 на $BR(S,\theta)$ в точках $(m,1_S,n)$, а в інших точках бази топологій τ_1 та τ^* співпадають. Очевидно, що топологія τ_1 на $BR(S,\theta)$ є слабшою від τ^*. ◄

Також з прикладу 1 випливає, що теорема 2 не виконується для замкненого ідеалу.

Приклад 2. Нехай $\mathbb{Z}_+$ – дискретна адитивна група цілих чисел. Нехай $e \notin \mathbb{Z}_+$. На $S = \mathbb{Z}_+ \cup \{e\}$ продовжимо напівгрупову операцію з $\mathbb{Z}_+$ так: $ee =$ $= e$ і $ex = xe = x$ для всіх $x \in \mathbb{Z}_+$, і вважатимемо, що e – ізольована точка в S. Отже, S – дискретна напівгрупа. У точках (m,e,n), $m,n \in \mathbb{N}$, напівгрупи $BR(S,\theta)$ послабимо топологію прямої суми τ^* до напівгрупової топології τ таким чином. Для всіх $m,n \in \mathbb{N}$, покладемо

$$\mathcal{B}(m,e,n) = \{U_{m,n}(k) \mid k \in \mathbb{N}\},$$

де $U_{m,n}(k) = \{(m,e,n) \cup (m-1,s,n-1) \mid s \geq k\}$.

Нехай $\mathcal{B}(m,e,n)$ – база топології в точках вигляду (m,e,n), а точки вигляду (m,x,n), де $x \in \mathbb{Z}_+$, є ізольованими.

Покажемо, що топологія τ на $BR(S,\theta)$ є напівгруповою. Очевидно, що досить довести, що множення на $(BR(S,\theta),\tau)$ неперервне у таких трьох випадках:

1°) $(m,e,n)(p,e,q)$, $m,n,p,q \in \mathbb{N}$, $e \in S$;

2°) $(m,e,n)(p,x,q)$, $m,n,p,q \in \mathbb{N}$, $e,x \in S$;

3°) $(m,x,n)(p,e,q)$, $m,n,p,q \in \mathbb{N}$, $e,x \in S$.

Зауважимо, що $s\theta = e$, для всіх $s \in S$.

Розглянемо ***випадок 1***°) :

$$(m,e,n)(p,e,q) = \begin{cases} (m,e,q), & n = p, \\ (m,e,q+n-p), & n > p, \\ (m+p-n,e,q), & n < p. \end{cases}$$

Тоді

якщо $n = p$, то $U_{m,n}(k_1)U_{p,q}(k_2) \subseteq U_{m,q}(k)$,

якщо $n > p$, то $U_{m,n}(k_1)U_{p,q}(k_2) \subseteq U_{m,q+n-p}(k)$,

якщо $n < p$, то $U_{m,n}(k_1)U_{p,q}(k_2) \subseteq U_{m+p-n,q}(k)$.

У ***випадку 2***°) :

$$(m,e,n)(p,x,q) = \begin{cases} (m,x,q), & n = p, \\ (m,e,q+n-p), & n > p, \\ (m+p-n,e,q), & n < p. \end{cases}$$

Отже, маємо,

якщо $n = p$, то $U_{m,n}(k)\{(p,x,q)\} \subseteq \{(m,x,q)\}$,

якщо $n > p$, то $U_{m,n}(k)\{(p,x,q)\} \subseteq U_{m,q+n-p}(k)$

якщо $n < p$, то $U_{m,n}(k)\{(p,x,q)\} \subseteq U_{m+p-n,q}(k)$.

У ***випадку 3***°) :

$$(m,x,n)(p,e,q) = \begin{cases} (m,x,q), & n = p, \\ (m,e,q+n-p), & n > p, \\ (m+p-n,e,q), & n < p. \end{cases}$$

Отже,

якщо $n = p$, то $\{(m,x,n)\}U_{p,q}(k) \subseteq \{(m,x,q)\}$,

якщо $n > p$, то $\{(m,x,n)\}U_{p,q}(k) \subseteq U_{m,q+n-p}(k)$,

якщо $n < p$, то $\{(m,x,n)\}U_{p,q}(k) \subseteq U_{m+p-n,q}(k)$.

Отже, $(BR(S,\theta),\tau^*)$ – інверсна топологічна напівгрупа. ◄

Зауваження 3. З *прикладу* 2 випливає, що аналога теореми 2 для інверсних топологічних напівгруп немає.

1. *Гутик О. В.* Вложения топологических полугрупп // Мат. студії. – 1994. – Вип. **3**. – С. 10–14.
2. *Гутік О. В.* Вкладення зліченних топологічних напівгруп у прості зліченні зв'язні топологічні напівгрупи // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 3. – С. 16–21.
3. *Гутік О. В.* Довільна топологічна напівгрупа топологічно ізоморфно вкладається в просту лінійно зв'язну топологічну напівгрупу // Алгебра і топологія: Зб. темат. праць. – Львів: ЛДУ, 1996. – С. 65–73.
4. *Гутік О. В.* Про ослаблення топології прямої суми на напівгрупі Брака // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 47. – С. 17–21.
5. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – Москва: Мир, 1961. – Т. 1. – 288 с.; Москва: Мир, 1972. – Т. 2. – 424 с.
6. *Кочин Б. П.* Строение инверсных простых ω-полугрупп // Вест. Ленингр. ун-та. – 1968. – **23**. – С. 41–50.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 752 с.

8. *Alexandroff P. S., Urysohn P. S.* Sur les espaces topologiques compacts // Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Sér. A. − 1923. − P. 5−8.
9. *Bertman M. O., West T. T.* Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups // Proc. Roy. Irish Acad. − 1976. − **A76**, No. 21−23. − P. 219−226.
10. *Bruck R. H.* A survey of binary systems. − Berlin: Springer, 1958. − 185 S. − (Ergebnisseder Math. − Heft 20.)
11. *Carruth J. H., Hildebrant J. A., Koch R. J.* The theory of topological semigroups. − New York: Marcell Dekker, Inc., 1983. − Vol. 1. − 244 p.; 1986. − Vol. 2. − 196 p.
12. *Eberhart C., Selden J.* On the closure of the bicyclic semigroup // Trans. Amer. Math. Soc. − 1969. − **119**. − P. 115−126.
13. *Munn W. D.* On simple inverse semigroups // Semigroup Forum. − 1970. − **1**. − P. 63−74.
14. *Reilly N. R.* Bisimple ω-semigroups // Proc. Glasgow Math. Assoc. − 1966. − **7**. − P. 160−169.
15. *Selden A. A.* A non locally compact nondiscrete topology for the α-bicyclic semigroup // Semigroup Forum. − 1985. − **31**, No. 3. − P. 372−374.
16. *Selden A. A.*, Bisimple ω-semigroups in the locally compact setting // Bogazici Univ. J. Sci. Math. − 1975. − **3**. − P. 15−77.
17. *Selden A. A.*, On the closure of bisimple ω-semigroup // Semigroup Forum. − 1976. − **12**. − P. 373−379.
18. *Selden A. A.*, The kernel of the determining endomorphism of a bisimple ω-semigroup // Semigroup Forum. − 1977. − **14**, No. 3. − P. 265−271.
19. *Warne R. J.* Bicyclic extensions // Acta Math. Hung. − 1997. − **76,** No. 3. − P. 213−233.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ БРАКА – РЕЙЛИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

Исследуются полугрупповые топологизации расширения Брака − Рейли топологических полугрупп. Показано, что для каждой топологической полугруппы S такая топологизация существует, а в случае, когда S − топологическая инверсная полугруппа с минимальным идеалом или S содержит H-замкнутый правый (левый, двусторонний) идеал, то такая топологизация полугруппы $\mathrm{BR}(S,\theta)$ единственная, а именно, является так называемой топологией прямой суммы.

TOPOLOGICAL BRUCK – REILLY EXTENSIONS OF TOPOLOGICAL SEMIGROUPS

Semigroup topologizations of Bruck − Reilly extensions of topological semigroups are investigated. It is shoved that for every topological semigroup S there exists such topologization, and in case of topological inverse semigroup S with minimal ideal or with H-closed right (left, two-sided) ideal, such topologization of semigroup $\mathrm{BR}(S,\theta)$ is unique, exactly, it is so called the directed sum topology.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
31.03.08