УДК 681.5:519.6

В.Е. Набивач

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВЕРСАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ

Рассмотрена задача блочно-диагональной декомпозиции семейств матриц с варьируемыми параметрами на блоки минимальной размерности, характерные для колебательных систем. Разработан алгоритм построения численно-аналитических разложений по варьируемым параметрам изучаемого семейства систем. Данные методы важны для решения задач анализа устойчивости семейств динамических систем и систем управления, зависящих от варьируемых параметров.

Введение

В теории динамических систем часто приходится рассматривать не индивидуальные объекты, скажем, дифференциальное уравнение или векторное поле, задающее систему, а некоторое семейство таких объектов, зависящее от варьируемых параметров.

Изучение семейств систем позволяет выяснять условия разрешимости задач приведения таких систем в пространстве варьируемых параметров к каноническим формам [1–4] и гарантировать численную (вычислительную) устойчивость решения задач приведения с использованием средств вычислительной техники. В [4] определена структура приводящей группы преобразований подобия и трансверсального дополнения к ней, обеспечивающие приведение семейств матриц простой структуры к соответствующей форме Жордана, а в [1] построен алгоритм численного приведения семейств систем с варьируемыми параметрами. В работах [1, 2, 5, 6] предложено использовать представление приводящего преобразования подобия в виде матричной экспоненты, известное разложение Кэмпбелла–Хаусдорфа и рассматривать задачи локального приведения с помощью метода малого параметра. В этой работе на основе предложенного алгоритма численной параметризации рассматривается применение метода малого параметра для повышения сходимости при используемом представлении матричной экспоненты в пространстве 2-струи разложения. Построен алгоритм численно-аналитической параметризации для трехпараметрического семейства систем, ассоциированного с семейством систем управления в пространстве параметров автомата стабилизации. Предложенный алгоритм позволяет оценивать в пространстве варьируемых параметров запасы устойчивости системы и строить в изучаемой окрестности D-разбиение. Достаточно полный обзор последних обобщений и областей применения метода D-разбиения приведен в [7].

Постановка задачи

Будем рассматривать семейство квадратных вещественных матриц

$$A(\mu) = A_0 + B(\mu), \;\; B(0) = 0, \tag{1}$$

находящееся в окрестности канонического представителя

$$A_0 = \mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{2j,2j-1} & a_{2j,2j} \end{bmatrix}\right\}, \;\; j = \overline{1, n/2},$$

и зависящих от вектора варьируемых параметров $\mu \in R^k$, ассоциированных с семейством линейных динамических систем

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu)x, \;\; x \in R^n, \;\; \mu \in R^k. \tag{2}$$

Ставится задача численно-аналитической блочно-диагональной декомпозиции семейства матриц $A(\mu)$ при достаточно гладких зависимостях матрицы $A(\mu)$ от параметров μ, ассоциированных с параметрами обратных связей линейных динамических систем управления, на блоки минимально возможной размерности путем применения приводящего преобразования подобия $T(\mu)$, $T(0) = E$, также гладко зависящего от параметров.

Предполагается, что матрицы A_0 и приведенные матрицы $\widetilde{A}(\mu)$ являются матрицами полного ранга простой структуры, которая для исходной матрицы A_0 и приведенной матрицы $\widetilde{A}(\mu)$ совпадает, т.е. матрицы относятся к одному классу. Простая структура матриц предполагает отсутствие кратных комплексно-сопряженных корней, а кратные действительные корни должны принадлежать одной подсистеме второго порядка.

Если матрица параметрических возмущений $B(\mu)$ задана численно, то в соответствии с [1, 2] для отыскания однородных компонент $\Delta T^{(i)}$ и $X^{(i)}$, $i = \overline{1, 3}$, имеем систему матричных уравнений

$$\begin{gathered} X^{(1)} - [A_0, \Delta T^{(1)}] = B^{(1)} \equiv B, \\ X^{(2)} - [A_0, \Delta T^{(2)}] = B^{(2)} = [B, \Delta T^{(1)}] + \frac{1}{2}[[A_0, \Delta T^{(1)}], \Delta T^{(1)}], \\ X^{(3)} - [A_0, \Delta T^{(3)}] = B^{(3)} = [B, \Delta T^{(2)}] + \frac{1}{2}[[A_0, \Delta T^{(2)}], \Delta T^{(1)}] + \\ + \frac{1}{2}[[A_0, \Delta T^{(1)}], \Delta T^{(2)}] + \frac{1}{2}[[B, \Delta T^{(1)}], \Delta T^{(1)}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered} \tag{3}$$

где $[A_0, \Delta T^{(i)}] = A_0 \Delta T^{(i)} - \Delta T^{(i)} A_0$ — обозначение скобки Ли, коммутатор матриц A_0 и $\Delta T^{(i)}$.

При численной параметризации инвариантного многообразия (пространства преобразований подобия — матрица $T = E + \Delta T = E + \sum_i \Delta T^{(i)}$), трансверсального дополнения к нему (пространства деформаций исходного объекта управления — матрица $X = \sum_i X^{(i)}$) каждое матричное уравнение из этой системы решается последовательно [1].

Таким образом, это последовательность гомологических уравнений для параметризации приводящего преобразования и трансверсального дополнения к орбите действия группы преобразований подобия, которые могут быть определены с заданной точностью.

Цель данной работы — показать применение метода малого параметра для повышения точности параметризации с использованием определяющей системы уравнений (3) и разработка алгоритмов для численно-аналитического определения параметров версальной модели, предложенной в [4], на S-параметрическом семействе систем (1).

В теории управления при некоторых фиксированных значениях параметров, например при нулевых значениях управляющих воздействий, мы получаем исходно заданный объект управления. Поэтому семейство объектов (или семейство систем) может быть ассоциировано с деформацией исходного объекта системой управления. В этой работе при численно-аналитическом разложении рассмотрим такие деформации объекта управления, когда стационарные параметры системы управления воздействуют на объект управления линейно:

$$A(\mu) = A_0 + B(\mu) = A_0 + \sum_{i=1}^{S} B_i \mu_i .$$

Разрешимость метода и точность алгоритмов численной параметризации семейств матриц с варьируемыми параметрами

Заметим, что левая часть матричных уравнений (3) линейна, а выбор структуры параметров матриц для определения однородных составляющих [4]:

— приводящего преобразования подобия

$$\Delta T = \begin{bmatrix} \Delta T_{11} & \Delta T_{12} & \dots & \Delta T_{1m} \\ \Delta T_{21} & \Delta T_{22} & \dots & \Delta T_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta T_{m1} & \Delta T_{m2} & \dots & \Delta T_{mm} \end{bmatrix},$$

где $\Delta T_{jj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t_{2j,2j-1} & t_{2j,2j} \end{bmatrix}$, ΔT_{jk} — полные матрицы второго порядка, $j \neq k$;

— и трансверсального дополнения

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0_{12} & \dots & 0_{1m} \\ 0_{21} & X_{22} & \dots & 0_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \dots & X_{mm} \end{bmatrix},$$

где $X_{jj} = = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_{2j,2j-1} & x_{2j,2j} \end{bmatrix}$, 0_{jk} — нулевые матрицы второго порядка, $j \neq k$; $j, k = \overline{1, m}$; $m = n/2$; позволяет получать единственное решение в общем случае переопределенной системы уравнений.

Алгоритм параметризации приводящего преобразования подобия, представленного в виде матричной экспоненты $e^{\Delta T}$, сводится к тому, чтобы вычислить (параметризировать) как можно больше членов разложения и тем самым уменьшить их влияние в приведенной (преобразованной) матрице $\widetilde{A}$. В общем случае этот вычислительный процесс бесконечный.

В (3) представлена система матричных уравнений, полученная для параметризации матричной экспоненты $e^{\Delta T}$ в пространстве 2-струи ее разложения.

Алгоритм численной параметризации такой системы матричных уравнений, предложенный в [1], имеет то преимущество, что для параметризации может использоваться ограниченное число членов разложения приводящего преобразования, связанного с решением нелинейной задачи параметризации, а на каждом шаге алгоритма как численной, так и численно-аналитической параметризации будут решаться линейные системы матричных уравнений. Это особенно важно при необходимости исследования модели систем большой размерности, которые, как правило, за счет системы управления деформируют модель объекта управления в ограниченной окрестности, связанной с собственными свойствами объекта.

Важным вопросом является вопрос сходимости разложения, а соответственно и точности параметризации. Покажем это. Совершенно формально рассмотрим параметрические возмущения системы (1) малым параметром μ, что можно представить в виде

$$\widetilde{A} = e^{-\Delta T}(A_0 + \mu B)e^{\Delta T}, \tag{4}$$

где $\widetilde{A} = A_0 + X$; $A_0 = \mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{2i,2i-1} & a_{2i,2i} \end{bmatrix}\right\}$, $i = \overline{1, n/2}$.

Тогда в пространстве 2-струи разложения получим систему матричных уравнений (3) в виде

$$\begin{gathered} X^{(1)} - [A_0, \Delta T^{(1)}] = B^{(1)} \equiv \mu B, \\ X^{(2)} - [A_0, \Delta T^{(2)}] = B^{(2)} = \mu[B, \Delta T^{(1)}] + \frac{1}{2}[[A_0, \Delta T^{(1)}], \Delta T^{(1)}], \\ X^{(3)} - [A_0, \Delta T^{(3)}] = B^{(3)} = \mu[B, \Delta T^{(2)}] + \frac{1}{2}[[A_0, \Delta T^{(2)}], \Delta T^{(1)}] + \\ + \frac{1}{2}[[A_0, \Delta T^{(1)}], \Delta T^{(2)}] + \frac{1}{2}\mu[[B, \Delta T^{(1)}], \Delta T^{(1)}]. \end{gathered} \tag{5}$$

Сходимость итерационного процесса, определяемого уравнениями (5) и параметризирующего трансверсальные дополнения X к орбите, индуцированной в пространстве систем действием группы преобразований подобия $G = \left\{ E + \sum_i \Delta T^{(i)} \right\}$, к нулевой деформации $X^{(i)}$ гарантирует устойчивость вычислительного процесса параметризации.

Имеется необходимое условие сходимости вычислительного процесса параметризации, так как вычисляемые на каждом шаге члены разложения приводящего преобразования подобия $\Delta T^{(i)}$ являются унипотентными матрицами [6, 8], которые определяются окрестностью параметрических возмущений исходной матрицы A_0.

Соотношение (5) можно использовать для выбора значения малого параметра μ, достаточного для достижения сходимости или заданной точности параметризации в пространстве 2-струи разложения.

Для практических целей достаточно решения задачи параметризации с заданной точностью, что не требует организации бесконечного вычислительного процесса.

Для оценки точности получаемых решений можно проводить анализ получаемых решений на каждом шаге итерационного процесса последовательных приближений путем изучения численных характеристик трансверсальных дополнений $X^{(i)}$, которые определяют поправки для решения задачи параметризации на заданном шаге используемого метода последовательных приближений.

Покажем это на примере решения задачи численной параметризации.

Пример 1. Пусть задана модель механической системы вида

$$A_0 = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1830 & -0{,}408 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2200 & -0{,}448 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2470 & -0{,}474 \end{bmatrix} \right\},$$

которая претерпевает параметрические возмущения, связанные с управлением $A_0 + B = A_0 + \mu B_1$,

$$\text{где } \mu = 0{,}2, \text{ а } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}146 & -0{,}132 & -1{,}308 & -1{,}312 & -1{,}717 & -1{,}202 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}385 & -1{,}253 & -0{,}012 & -0{,}012 & -0{,}16 & -0{,}17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}69 & 0{,}62 & 0{,}18 & 0{,}17 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате применения алгоритма численной параметризации получаем модель объекта и системы управления, приведенную к главным координатам замкнутой системы

$$A_0 + \sum_{i=1}^{3} X^{(i)} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1836 & -0{,}543 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2190 & -0{,}452 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2473 & -0{,}478 \end{bmatrix} \right\}.$$

Сходящийся вычислительный процесс на рассматриваемой вычислительной схеме дает два верных знака, что для определенного количества приложений может быть достаточным. Покажем это с помощью стандартного алгоритма eigenvals решения полной проблемы собственных значений системы MathCAD v. 12.0, и запишем используемую каноническую форму в следующем виде:

$$A_0 + B \cong \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1836 & -0{,}542 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2190 & -0{,}456 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2473 & -0{,}476 \end{bmatrix}\right\},$$

что подтверждает наличие даже трех верных знаков.

При $\mu = 0{,}4$ имеем

$$A_0 + \sum_{i=1}^{3} X^{(i)} = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1854 & -0{,}714 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2160 & -0{,}377 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2483 & -0{,}527 \end{bmatrix}\right\}.$$

С использованием стандартного алгоритма eigenvals решения полной проблемы собственных значений системы MathCad v. 12.0 каноническая форма принимает вид

$$A_0 + 2B \cong \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1857 & -0{,}712 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2158 & -0{,}406 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2481 & -0{,}5 \end{bmatrix}\right\}.$$

Результаты исследования сходимости и точности параметризации предложенной вычислительной схемы в зависимости от значений малого параметра μ представлены на рис. 1.

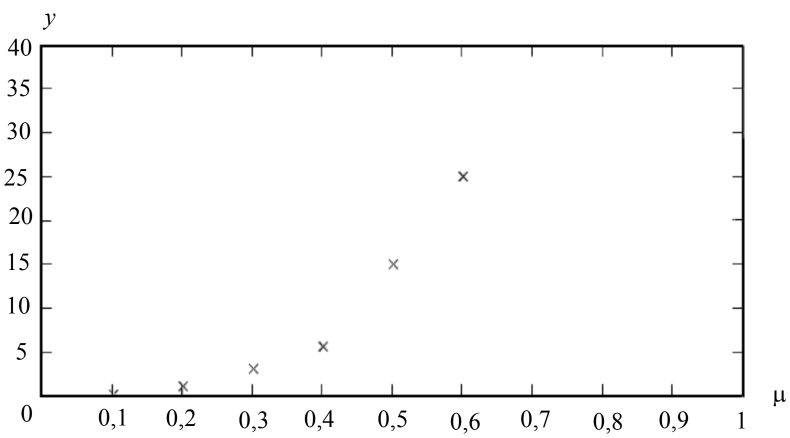

Рис. 1. Зависимость точности параметризации (в %) от малого параметра

При $\mu > 0{,}6$ система неустойчива и находится в окрестности структурных изменений, поэтому для параметризации следует использовать более сложный канонический представитель и версальную модель. Итак, при $\mu = 0{,}2$ получена точность решения задачи приведения, соответствующая двум верным знакам, что достаточно для практических приложений.

Таким образом, в окрестности канонического представителя исходной системы A_0 предложенная вычислительная схема обеспечивает сходимость и требуемую точность приведения системы к главным координатам. При больших деформациях исходного объекта возможно использование:

• более сложного канонического представителя и версальной модели — при наличии структурных изменений;

• более сложной вычислительной схемы, разложение матричной экспоненты в пространстве большего числа струй с соответствующим увеличением количества определяющих уравнений вычислительной схемы;

• методологии введения малого параметра с последовательным переходом в новую окрестность системы, принятие в качестве канонического представителя A_0 полученного значения параметризованной системы, с соответствующим приведением параметрических возмущений к новым главным координатам;

• использование введенного малого параметра в качестве аппроксимации искомых решений.

Почти аналогично эта методология (техника моделирования систем с малым параметром) может применяться при построении процедур численно-аналитического разложения моделей систем управления по параметрам автомата стабилизации (например, по параметрам каналов стабилизации). В этом случае деформации объекта управления системой стабилизации существенно уменьшаются, причем чем больше параметров сохраняется в разложении, тем с бóльшим числом малых параметров изучается система (в качестве малых параметров в этом случае можно рассматривать, например, параметры автомата стабилизации).

Численно-аналитическое определение параметров версальной модели

Из системы уравнений (3) видно, что левые части матричных уравнений однотипны и структурно совпадают с видом определяющего матричного гомологического уравнения, полученного в общем виде, где нелинейные слагаемые отнесены к правой части и включены в матрицу $\widetilde{B}$

$$X + \Delta T A_0 - A_0 \Delta T = \widetilde{B} \equiv B + B\Delta T - \Delta T X \,, \tag{6}$$

здесь A_0 — блочно-диагональная матрица главной части параметризируемой системы.

Таким образом, при заданной структуре матриц $\Delta T^{(i)}$ и $X^{(i)}$ левые части каждого из приведенных в (3) матричных уравнений однотипны, для заданной окрестности канонического представителя A_0 одинаковы и решаемые задачи отличаются только правыми частями. Аналогичная ситуация, как и в общем случае (6), должна иметь место и при построении алгоритмов численно-аналитической параметризации, что мы покажем ниже.

В [9, 10] представлены алгоритмы численной параметризации элементов матрицы приводящей группы преобразований ΔT и трансверсального дополнения к ней X, построенные на основе алгоритмов параметризации моделей систем четвертого порядка и применения методов последовательных уточнений.

Подобные алгоритмы применялись при численной параметризации элементов матрицы приводящей группы преобразований ΔT и трансверсального дополнения к ней X в [1] и будут использоваться при построении алгоритмов численно-аналитической параметризации.

Рассмотрим алгоритм построения решения задачи параметризации трансверсального дополнения X в виде явной зависимости от варьируемых параметров.

Пусть матрица B параметрических возмущений матрицы A_0 является линейной функцией варьируемых параметров, которыми могут быть, например, параметры соответствующих каналов автомата стабилизации, и имеет размерность $n \times n$, которую по аналогии с (4) можно записать в виде

$$B(\mu) = \sum_{i=1}^{S} \mu_i B_i\ ,\ S \le n^2, \tag{7}$$

где B_i — некоторые постоянные матрицы.

Рассмотрим однородные компоненты матриц X и ΔT, которые запишем в виде

$$\begin{gathered} X^{(1)} = \sum_{i=1}^{S} \mu_i X_i^{(1)},\quad X^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{S} \mu_i \mu_j X_{ij}^{(2)},\quad X^{(3)} = \sum_{i,j,k=1}^{S} \mu_i \mu_j \mu_k X_{ijk}^{(3)},\ \ldots, \\ \Delta T^{(1)} = \sum_{i=1}^{S} \mu_i \Delta T_i^{(1)},\quad \Delta T^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{S} \mu_i \mu_j \Delta T_{ij}^{(2)},\quad \Delta T^{(3)} = \sum_{i,j,k=1}^{S} \mu_i \mu_j \mu_k \Delta T_{ijk}^{(3)}, \ldots, \end{gathered} \tag{8}$$

где $X_i^{(1)}, X_{ij}^{(2)}, X_{ijk}^{(3)} \ldots$ и $\Delta T_i^{(1)}, \Delta T_{ij}^{(2)}, \Delta T_{ijk}^{(3)} \ldots$ — бесконечные последовательности матриц.

Для $S = 3$ подставим представления (8) в разложение (3) и, учитывая (7), получим:

$$\begin{gathered} X^{(1)}(\mu) - [A_0, \Delta T^{(1)}(\mu)] = \sum_{i=1}^{3} \mu_i X_i^{(1)} - \left[A_0, \sum_{i=1}^{3} \mu_i \Delta T_i^{(1)} \right] = B^{(1)}(\mu) \equiv \sum_{i=1}^{3} \mu_i B_i, \\ X^{(2)}(\mu) - [A_0, \Delta T^{(2)}(\mu)] = \sum_{i,j=1}^{3} \mu_i \mu_j X_{ij}^{(2)} - \left[A_0, \sum_{i,j=1}^{3} \mu_i \mu_j \Delta T_{ij}^{(2)} \right] = B^{(2)}(\mu) = \\ = \left[\sum_{i=1}^{3} \mu_i B_i, \sum_{j=1}^{3} \mu_j \Delta T_j^{(1)} \right] + \frac{1}{2} \left[\left[A_0, \sum_{i=1}^{3} \mu_i \Delta T_i^{(1)} \right], \sum_{j=1}^{3} \mu_j \Delta T_j^{(1)} \right], \\ X^{(3)}(\mu) - [A_0, \Delta T^{(3)}(\mu)] = B^{(3)}(\mu) = X^{(3)}(\mu) - [A_0, \Delta T^{(3)}(\mu)] = \\ = \sum_{i,j,k=1}^{3} \mu_i \mu_j \mu_k X_{ij}^{(2)} - \left[A_0, \sum_{i,j,k=1}^{3} \mu_i \mu_j \mu_k \Delta T_{ij}^{(2)} \right] = \end{gathered} \tag{9}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{3} \mu_i B_i ,\ \sum_{j,k=1}^{3} \mu_j \mu_k \Delta T_{jk}^{(2)} \right] + \frac{1}{2} \left[\left[A_0 ,\ \sum_{j,k=1}^{3} \mu_j \mu_k \Delta T_{jk}^{(2)} \right], \sum_{i=1}^{3} \mu_i \Delta T_i^{(1)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left[A_0 ,\ \sum_{i=1}^{3} \mu_i \Delta T_i^{(1)} \right], \sum_{j,k=1}^{3} \mu_j \mu_k \Delta T_{jk}^{(2)} \right] + \frac{1}{2} \left[\left[\sum_{i=1}^{3} \mu_i B_i ,\ \sum_{j=1}^{3} \mu_j \Delta T_j^{(1)} \right], \sum_{k=1}^{3} \mu_k \Delta T_k^{(1)} \right].$$

Рассматривая однородные компоненты матриц X и ΔT, запишем уравнения для нахождения матриц $X_i^{(1)}$, $X_{ij}^{(2)}$, $X_{ijk}^{(3)}$, $\Delta T_i^{(1)}$, $\Delta T_{ij}^{(2)}$, $\Delta T_{ijk}^{(3)}$, которые соответствуют влиянию данных комбинаций варьируемых параметров μ_i $i = \overline{1,3}$, полученные при представлении матричной экспоненты разложением в пространстве 2-струи:

$$\begin{aligned}
&X_i^{(1)} - [A_0, \Delta T_i^{(1)}] = B_i ,\ i = \overline{1,3};\\
&X_{ij}^{(2)} - [A_0, \Delta T_{ij}^{(2)}] = B_{ij} = [B_i, \Delta T_j^{(1)}] + \frac{1}{2}[[A_0, \Delta T_i^{(1)}], \Delta T_j^{(1)}],\ i, j = \overline{1,3};\\
&X_{ijk}^{(3)} - [A_0, \Delta T_{ijk}^{(3)}] = B_{ijk} = [B_i, \Delta T_{jk}^{(2)}] + \frac{1}{2}[[A_0, \Delta T_{jk}^{(2)}], \Delta T_i^{(1)}] +\\
&+ \frac{1}{2}[[B_i, \Delta T_j^{(1)}], \Delta T_k^{(1)}] + \frac{1}{2}[[A_0, \Delta T_i^{(1)}], \Delta T_{jk}^{(2)}],\ i, j, k = \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда с учетом (8), (9) и конечномерности пространств матриц X и ΔT получим уравнения линейного приближения для разложения по параметрам трансверсального дополнения $X^{(1)}(\mu)$

$$X^{(1)}(\mu) = X^{(1)} = \sum_{i=1}^{3} \mu_i X_i^{(1)} ,$$

уравнения для определения трансверсального дополнения $X^{(2)}(\mu)$ квадратичного приближения разложения по варьируемым параметрам μ_i $i = \overline{1,3}$, которые имеют вид

$$X^{(2)}(\mu) = X^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{3} \mu_i \mu_j X_{ij}^{(2)} ,$$

а также уравнения для определения трансверсального дополнения $X^{(3)}(\mu)$ для кубических членов разложения по варьируемым параметрам μ_i $i = \overline{1,3}$:

$$X^{(3)}(\mu) = X^{(3)} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \mu_i \mu_j \mu_k X_{ijk}^{(3)} .$$

Результирующее выражение для параметров универсальной модели в виде степенных рядов от параметров исходной деформации $A_0 + \sum_{i=1}^{3} \mu_i B_i$, а именно, численно-аналитическое разложение трансверсального дополнения X в пространстве варьируемых параметров μ, принимает вид

$$X = X^{(1)}(\mu) + X^{(2)}(\mu) + X^{(3)}(\mu) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i X_i^{(1)} + \sum_{i,j=1}^{3} \mu_i \mu_j X_{ij}^{(2)} + \sum_{i,j,k=1}^{3} \mu_i \mu_j \mu_k X_{ijk}^{(3)}.$$

В результате матрицу динамической системы

$$\dot{x} = (A_0 + B(\mu))x = (A_0 + \sum_{i=1}^{3} \mu_i B_i)x,$$

приведенную к блочно-диагональному виду с блоками второго порядка (форме Жордана) в численно-аналитическом виде, с точностью до кубических членов разложения и при представлении матричной экспоненты в пространстве 2-струи (10), запишем

$$A_0 + B(\mu) = A_0 + \sum_{i=1}^{3} \mu_i B_i \cong A_0 + X =$$

$$= A_0 + \sum_{i=1}^{3} \mu_i X_i^{(1)} + \sum_{i,j=1}^{3} \mu_i \mu_j X_{ij}^{(2)} + \sum_{i,j,k=1}^{3} \mu_i \mu_j \mu_k X_{ijk}^{(3)}, \qquad (11)$$

где $X_i^{(1)}$, $X_{ij}^{(2)}$, $X_{ijk}^{(3)}$ — численные матрицы соответствующей структуры, определяемые множеством матричных уравнений (10). В выражении (11) знак «$\cong$» обозначает эквивалентность матриц и приближенную точность параметризации в пространстве варьируемых параметров.

Таким образом, мы имеем универсальную модель численно-аналитической параметризации трехпараметрического семейства динамических систем, которое ассоциировано с семействами замкнутых систем управления с варьируемыми параметрами в контурах стабилизации. Решения получены для универсальных моделей третьего порядка точности представления зависимости от варьируемых параметров.

Аналогично можно записать решения для произвольного числа варьируемых параметров деформации матрицы исходной системы, вплоть до $S = n^2$. Точность представления матричной экспоненты и требования к числу степеней приближения численно-аналитических решений (порядку универсальных моделей) в пространстве варьируемых параметров определяется требуемой точностью искомых решений.

Вследствие конечномерности пространств матриц X и ΔT каждая из двух бесконечных последовательностей матриц $\{X_i^{(1)}, X_{ij}^{(2)}, X_{ijk}^{(3)}, ...\}$ и $\{\Delta T_i^{(1)}, \Delta T_{ij}^{(2)}, \Delta T_{ijk}^{(3)}, ...\}$ будет конечномерной линейной комбинацией базисных.

Если в этих рядах ограничиться n членами разложения, то можно говорить об универсальных моделях n-го порядка.

Проиллюстрируем результаты применения разработанного алгоритмического и программного обеспечения для решения задачи численно-аналитической параметризации главной части динамической системы управления десятого порядка с тремя варьируемыми параметрами.

Пример 2. Пусть задана модель механической системы десятого порядка

$$A_0 = \operatorname{diag}\{A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}, A_{05}\},$$

$$A_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1390 & -0{,}356 \end{bmatrix},\ A_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1680 & -0{,}391 \end{bmatrix},\ A_{03} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1830 & -0{,}408 \end{bmatrix},$$

$$A_{04} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2200 & -0{,}448 \end{bmatrix},\ A_{05} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2470 & -0{,}474 \end{bmatrix},$$

которая претерпевает параметрические возмущения вида (7), ассоциированные с трехпараметрическим семейством систем управления, где

$$B_1 = [B_{11}\ B_{12}],$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0002 & -0{,}0001 & 0 & 0 & -0{,}009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0025 & -0{,}0023 & 0{,}0003 & 0{,}024 & -0{,}146 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}024 & -0{,}022 & 0{,}0026 & 0{,}0023 & -1{,}385 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0012 & 0{,}0011 & -0{,}0001 & -0{,}0001 & 0{,}069 \end{bmatrix},$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0081 & 0 & 0 & -0{,}0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0037 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}132 & -0{,}0013 & -0{,}0013 & -0{,}0017 & -0{,}0012 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}253 & -0{,}012 & -0{,}012 & -0{,}016 & -0{,}011 \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0{,}062 & 0{,}0006 & 0{,}0006 & 0{,}0008 & 0{,}0006 \end{bmatrix},$$

а остальные матрицы

$$B_2 = [B_{21}\ B_{22}],$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0{,}0047 & 0{,}0076 & 0{,}0002 & 0 & -0{,}0002 \\ -0{,}001 & -0{,}0016 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0004 & 0{,}0007 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}036 & -0{,}058 & -0{,}0013 & -0{,}0005 & 0{,}0017 \\ 0{,}0001 & 0{,}0002 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}0033 & 0{,}002 & 0{,}0022 & 0{,}0023 \\ 0 & -0{,}0007 & -0{,}0004 & -0{,}0004 & -0{,}0005 \\ 0 & 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0002 \\ 0{,}0014 & -0{,}025 & -0{,}015 & -0{,}016 & -0{,}017 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = [B_{31}\ B_{32}],$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix} -0{,}0022 & -0{,}0079 & 0{,}0052 & 0{,}0047 & 0.0004 \\ -0{,}0025 & -0{,}0009 & 0{,}0059 & 0.0053 & 0{,}0004 \\ -0{,}0001 & 0 & 0{,}0004 & 0{,}0003 & 0 \\ 0{,}019 & 0{,}0068 & -0{,}044 & -0{,}04 & -0{,}0031 \\ -0{,}0056 & -0{,}002 & 0{,}013 & 0{,}012 & 0{,}0009 \end{bmatrix},$$

$$B_{32} = \begin{bmatrix} 0{,}0004 & -0{,}0003 & -0{,}0004 & 0{,}0028 & 0{,}0045 \\ 0{,}0004 & -0{,}0004 & -0{,}0005 & 0{,}0032 & 0{,}0052 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0002 & 0{,}0003 \\ -0{,}0032 & 0{,}0027 & 0{,}0035 & -0{,}024 & -0{,}039 \\ 0{,}0009 & -0{,}0008 & -0{,}001 & 0{,}0071 & 0{,}011 \end{bmatrix}$$

представлены без строк с нулевыми элементами.

В результате применения алгоритма численно-аналитической параметризации версальной модели трехпараметрического семейства систем (7) получаем модель параметрических возмущений объекта управления десятого порядка параметрами системы управления, приведенную к главным координатам и учитывающую параметрические возмущения, не превышающие 10^{-2} величины возмущающего параметра

$$A_0 + X(\mu) = A_0 + \sum_{i=1}^{3} \mu_i X_i^{(1)} + \sum_{i,j=1}^{3} \mu_i \mu_j X_{ij}^{(2)} + \sum_{i,j,k=1}^{3} \mu_i \mu_j \mu_k X_{ijk}^{(3)} =$$

$$= \operatorname{diag}\{A_1(\mu),\ A_2(\mu),\ A_3(\mu),\ A_4(\mu),\ A_5(\mu)\},$$

где

$$A_1(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1390 & -0{,}356 \end{bmatrix},\quad A_2(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1680 & -0{,}391 \end{bmatrix},$$

$$A_3(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1830 - 0{,}146\mu_1 - 0{,}01\mu_1^2 & -0{,}408 - 0{,}132\mu_1 \end{bmatrix},$$

$$A_4(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2200 - 0{,}012\mu_1 - 0{,}025\mu_2 + 0{,}01\mu_1^2 & -0{,}448 - 0{,}012\mu_1 - 0{,}015\mu_2 \end{bmatrix},$$

$$A_5(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2470 & -0{,}474 + 0{,}011\mu_3 \end{bmatrix}.$$

Исходя из предположения, что параметры системы управления $|\mu_i| < 1$, $i = \overline{1,3}$, в приведенных численно-аналитических разложениях не представлены квадратичные и более высокого порядка члены разложения, имеющие коэффициенты влияния, меньшие 10^{-2}. Таким образом, полученные решения гарантируют наличие трех верных знаков, что в практических приложениях, как правило, бывает достаточным, не хуже точности задания исходных данных.

Из приведенных результатов численно-аналитической параметризации главной части замкнутой системы управления видно, что наиболее существенное влияние на устойчивость исследуемой системы оказывает параметр μ_3. Однако изменение этого параметра в рассматриваемых пределах не может привести к потере устойчивости объекта управления.

Заключение

Разработанные вычислительные алгоритмы расчета параметров группы преобразований подобия и параметров трансверсального дополнения, которое в общем положении дополняет орбиту группы преобразований до всего пространства систем, практически идентичны и отличаются лишь методами расчета правых частей. Причем это полезное свойство относится как к численным [1, 9, 10], так и численно-аналитическим алгоритмам параметризации соответствующих гомологических уравнений.

Аналогично алгоритмам численной параметризации алгоритмы численно-аналитической параметризации имеют то преимущество, что для представления нелинейных членов в правой части матричных уравнений использовалось ограниченное число членов разложения матричной экспоненты, связанное с решением нелинейной задачи параметризации.

Это особенно важно при решении задач параметризации высокой размерности, когда ищется численно-аналитическое решение в пространстве варьируемых параметров. При ограниченной точности искомых решений, достаточной для практических приложений, алгоритмы решения численно-аналитической задачи параметризации, так же как и задачи численной параметризации, всегда конечны.

Приведенные примеры численной и численно-аналитической параметризации показывают результативность разработанного алгоритмического и программного обеспечения, а также демонстрируют возможности оценки точности и сходимости получаемых решений.

1. *Набивач В.Е.* Алгоритм численной параметризации версальных моделей при решении задачи декомпозиции линейного оператора // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 6. — С. 5–10.
2. *Удилов В.В.* Численные и численно-аналитические методы вычисления параметров версальной модели на основе разложения Кэмпбелла–Хаусдорфа // Там же. — 1998. — № 4. — С. 5–9.
3. *Набивач В. Е., Удилов В.В.* Устойчивость численных методов приведения матриц, зависящих от параметров // Кибернетика и вычисл. техника. — 1988. — Вып. 77. — С. 7–18.
4. *Набивач В.Е.* Задача структурно устойчивой параметризации семейств сильвестровых матриц // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 6. — С. 14–25.
5. *Митропольский Ю.А., Лопатин А.К.* Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики. — Киев: Наук. думка, 1988. — 270 с.
6. *Богаевский В.Н., Повзнер А.Я.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. — М.: Наука, 1987. — 256 с.
7. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода *D*-разбиения // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 12. — С. 3–40.
8. *Математическая* энциклопедия. Т. 3 / Гл. ред. И.М. Виноградов. — М.: Сов. энциклопедия, 1982. — 1184 с.
9. *Набивач В.Е., Фурсов А.К., Телегин И.В.* Алгоритмы устойчивой декомпозиции, отщепления и упрощения моделей многомерных динамических систем с параметрами в окрестности особых точек // Конечномерные и распределенные системы управления. — Киев: ИК АН УССР, 1986. — С. 51–61.
10. *Удилов В.В., Набивач В. Е., Турчина О.В.* Метод блочно-диагональной декомпозиции матриц с параметрами (*D*-метод) и его применение // Там же. — 1983. — С. 45–53.

Институт космических исследований
НАН Украины и НКА Украины

Получено 02.06.2009