

УДК 519.816

В. В. Циганок

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Дослідження феномену реверсу рангів при застосуванні методів парних порівнянь

Проаналізовано причини порушення ранжирування (виникнення реверсу рангів) альтернатив при визначенні їхніх ваг із застосуванням методів парних порівнянь. Розглянуто випадки додавання та виключення деякої альтернативи до/з множини альтернатив, що підлягають оцінюванню. Запропоновано метод обчислення усереднених ваг альтернатив на основі матриць парних порівнянь, отриманих від групи експертів, який дозволяє зберегти ранжирування при додаванні альтернативи до множини тих, що були розраховані раніше. У результаті експериментального дослідження отримано основні характеристичні параметри запропонованого методу.

Ключові слова: системи підтримки прийняття рішень, методи парних порівнянь, реверс рангів

У системах підтримки прийняття рішень (СППР), де використовуються парні порівняння, часто має місце феномен порушення ранжирування або зміни ваг раніше проранжированих (оцінених) альтернатив при додаванні чи виключенні деякої альтернативи з множини таких, що розглядаються. Цей феномен має назву «реверс рангів»; він був відкритий теоретиками [1–3], що досліджували метод аналітичних ієрархічних процесів Сааті [4]. Це явище є досить небажаним, особливо при застосуванні методів парних порівнянь (МПП) у СППР, що вирішують задачі знаходження максимальної (мінімальної) по вазі альтернативи або ранжирування альтернатив.

У [5] викладено та доведено достатню умову відсутності реверсу рангів для методів парних порівнянь «трикутник» і «квадрат». Вона полягає в ідеальній узгодженості вихідної та результуючої матриць парних порівнянь. Ця умова є справедливою й для запропонованих у [6, 7] методів обробки результатів парних порівнянь. Але на практиці, виконання такої умови малоімовірно, тобто, в основному, ми маємо справу з не ідеально узгодженими матрицями парних порівнянь.

При проведенні досліджень методів обробки результатів парних порівнянь, які включають елементи комбінаторної обробки МПП [6, 7], на предмет можливо-

сті виникнення реверсу рангів було зроблено ряд висновків. Виявлено, що при розрахунках ваг альтернатив при додаванні деякої альтернативи до множини, реверс рангів виникає внаслідок врахування додаткової інформації про взаємодію базових альтернатив, тобто тих альтернатив, що були присутні в попередніх розрахунках. У той самий час, коли мова йде про виключення деякої альтернативи з множини альтернатив, чиї ваги мають бути знайдені, то в цьому випадку реверс рангів виникає внаслідок втрати (не врахування при розрахунках) частини інформації про взаємодію (взаємний вплив) тих альтернатив, що залишаються в згаданій множині.

Базуючись на цих висновках, які впливають із суті самих парних порівнянь, у даній статті пропонується спосіб уникнення реверсу рангів. Разом із тим пропонується метод обробки МПП, який можна використовувати при розрахунках ваг альтернатив, коли збереження рангів є важливою умовою задачі прийняття рішень.

Сенс застосування парних порівнянь, у тому числі й МПП, для більшості експертних методів отримання ваг альтернатив, полягає в тому, що для підвищення достовірності отримуваних оцінок використовується деяка збитковість інформативності, що отримується від експерта. А саме, при розрахунках ваг альтернатив, зазвичай враховується інформація про співвідношення між альтернативами. І, крім безпосередніх порівнянь деякої пари альтернатив, враховуються ще й опосередковані. Так, наприклад, для знаходження співвідношення між альтернативами i та j , крім елемента МПП a_{ij} , в розрахунках усереднених ваг альтернатив приймають участь ще й ланцюжки (послідовності) елементів $\langle a_{ik}, a_{kl}, \dots, a_{nj} \rangle$, де $i \neq k \neq l \neq \dots \neq n \neq j$.

Отже, виходячи з вищевикладених положень, можна зробити висновок, що для збереження ранжирування (щоб не виникав реверс рангів) потрібно при розрахунках ваг альтернатив залишати без змін (не доповнювати і не вилучати) інформацію про взаємний вплив базових альтернатив. Розглянемо окремо обидва випадки зміни потужності множини альтернатив.

Перший випадок — зменшення на одиницю потужності множини альтернатив (виключення з розгляду однієї альтернативи). Для забезпечення відсутності реверсу рангів у відповідних задачах підтримки прийняття рішень потрібно, щоб інформація про взаємовплив альтернатив, яка була присутня до зменшення потужності множини альтернатив, враховувалася би і при розрахунках ваг альтернатив при меншій на одиницю потужності множини. Щоб забезпечити цю умову, пропонується в алгоритмах при застосуванні в СППР не робити повторний перерахунок ваг для зменшеної множини альтернатив. У цьому випадку пропонується залишити без змін усі ваги альтернатив, розраховані для множини альтернатив, більшої на одиницю потужності, а тільки виключити вагу відповідної виключеної із розгляду альтернативи. Далі, при необхідності, тільки передбачається можливість перенормування ваг альтернатив, що залишилися.

Таким чином, при наявності можливості, а така можливість при виключенні однієї з альтернатив із розгляду існує, пропонується враховувати накопичену інформацію про взаємовплив альтернатив, що була присутня завдяки щойно вилученій альтернативі. Крім того, додатковий сенс у такому способі вирішення питання ще є і в тому, що крім відсутності реверсу рангів, достовірність отриманих

ваг альтернатив є кращою в порівнянні з розрахунками цих ваг на основі МПП зменшеної множини альтернатив. Останнє твердження планується довести в подальших дослідженнях методів парних порівнянь.

Другий випадок — збільшення на одиницю потужності множини альтернатив (додавання однієї альтернативи). Для того, щоб зберігалися ранжирування базових альтернатив пропонується при розрахунках їхніх ваг не брати до уваги додаткову інформацію про взаємний вплив базових альтернатив, яку отримано завдяки проведеним додатковим парним порівнянням доданої альтернативи з рештою альтернатив (базовими). Тобто розраховувати ваги базових альтернатив без урахування інформації ланцюжків елементів МПП, до яких має відношення додана альтернатива. Таким чином, враховуються тільки безпосередні зв'язки (впливи) доданої альтернативи з множиною базових. Імовірно, що в такому випадку достовірність отриманих ваг альтернатив, а тому й точність методу парних порівнянь буде дещо нижчою, в порівнянні з випадком, коли враховується вся інформація з МПП (усі взаємні впливи альтернатив), але це можемо вважати «платою» за відсутність реверсу рангів.

Зупинимося на описі алгоритму отримання ваг альтернатив, що зберігає ранжирування альтернатив при додаванні додаткової альтернативи. В основу запропонованого методу покладено ідеї, викладені в [7], але необхідність виконання умов непорушення ранжирування приводить до внесення деяких спрощень, а саме до відмови від застосування рейтингів ідеально узгоджених матриць парних порівнянь при визначенні ваг альтернатив. Причиною відмови від застосування рейтингів є те, що при їхніх розрахунках передбачалося знаходження ступеня відмінності кожної ідеально узгодженої МПП від реальної МПП, яке в свою чергу передбачало використання інформації про кожний елемент МПП (тобто враховувались усі взаємні впливи альтернатив), що могло приводити до порушення ранжирування базових альтернатив.

Алгоритм отримання ваг альтернатив пропонується розглянути на прикладі найбільш загального виду — методі групового експертного оцінювання. Для застосування алгоритму до індивідуального експертного оцінювання достатньо прийняти кількість експертів рівною одиниці.

Дано: $A_i = (a_{pq})$, $i \in M$, $p, q \in N$ — матриці парних порівнянь альтернатив розмірністю $n \times n$ кожна, де $M = \{1 \dots m\}$ — множина індексів експертів; $N = \{1 \dots n\}$ — множина індексів альтернатив; $A_i^+ = (a_{pq}^+)$, $i \in M$, $p, q \in N^+$ — матриці парних порівнянь альтернатив розмірністю $(n + 1) \times (n + 1)$, де $N^+ \supset N$, $|N^+| = |N| + 1$. Причому A_i^+ — це A_i , доповнена одним рядком і стовпчиком, які відповідають парним порівнянням $(n + 1)$ -ї альтернативи з рештою n альтернатив; c_j , $j = (1, m)$ — ступені компетентності експертів відносно питання, пов'язаного з оцінкою даних альтернатив; w_k , $k \in N$ — усереднені значення ваг альтернатив, обчислені на основі матриць A_i , $i \in M$.

Визначити: усереднені значення ваг альтернатив w_k^+ , $k \in N^+$, за умови збереження ранжирування альтернатив, визначеного вагами w_k , $k \in N$.

Метод визначення ваг альтернатив можна умовно розділити на наступні кроки.

1-й крок — це генерація на основі реальних матриць парних порівнянь A_i^+ , сформованих кожним з m експертів, множини ідеально-узгоджених матриць

(ІУМПП). Причому ІУМПП формуються аналогічно тому, як запропоновано в комбінаторному методі парних порівнянь [6], а саме: визначаються *інформаційно-значимі* множини елементів МПП мінімальної потужності, на основі яких і формуються ІУМПП. Інформаційно-значима (інформаційно-вагома) множина елементів ІУМПП ω — це така множина мінімальної потужності, що складається з елементів матриці, яка несе інформацію про всю ІУМПП загалом. Причому, $\omega \subset \Omega$, де Ω — множина всіх елементів МПП і, як показано в [6], коли $|\Omega| = (n + 1)^2$, то $|\omega| = n$. Таким чином, для будь-якої ІУМПП по множині елементів ω можна відтворити множину всіх елементів Ω , визначивши значення відсутніх у ω елементів через ті, що належать цій множині.

2-й крок — задля збереження ранжирування альтернатив з індексами $k \in N$ — вибираємо із множини всіх ІУМПП, сформованих на основі реальних МПП A_i^+ , $i \in M$, тільки ті, які без доданих стовпчика та рядка співпадають з наявними в множині ІУМПП, які були сформовані на основі МПП A_i , $i \in M$.

Ось, наприклад, нехай маємо результати адитивних парних порівнянь трьох альтернатив, проведені деяким експертом x . Вони представлені у вигляді реальної матриці A_x розмірністю 3×3 (див. табл. 1). Далі в таблиці показано множину із трьох ІУМПП сформованих, базуючись на інформаційно значимих множинах елементів реальної МПП. Множини зображено в таблиці у вигляді неорієнтованих графів Γ . Вершини графів позначені індексами альтернатив, що задіяні в експертному оцінюванні, а наявність ребра свідчить про приналежність відповідного елемента МПП до множини інформаційно значимих.

Тепер, припустимо, що для експертного оцінювання представлено додаткову альтернативу з індексом 4. Експертом x МПП A_x доповнено стовпчиком і рядком під номерами 4. У результаті, сформована матриця A_x^+ прийме вигляд, як зображено в табл. 2. Загальна кількість ІУМПП, які можуть бути сформовані на базі інформаційно значимих множин елементів МПП A_x^+ розмірності 4×4 — 16 (вони зображені в табл. 2).

У рамках запропонованого методу, задля збереження ранжирування альтернатив з індексами 1–3, при додаванні альтернативи з індексом 4, будемо брати до уваги тільки ІУМПП, пронумеровані від 1 до 9, а з номерами від 10 до 16 — будуть проігноровані при розрахунках. Тобто розглядаються тільки ті ІУМПП із табл. 2, які є результатом доповнення ІУМПП із табл. 1 відповідними стовпчиком і рядком.

3-й крок — по кожній із вибраних на 2-му кроці ІУМПП, однозначно знаходяться проміжні значення ваг альтернатив (це можна зробити, наприклад, базуючись на будь-якому одному зі стовпчиків або рядків ІУМПП).

4-й крок — ці проміжні значення ваг, для кожної ІУМПП, множаться на відповідні ступені компетентності тих експертів, на основі чийх МПП сформовані ці ІУМПП.

Таблиця 1

реальна матриця		$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{matrix}$
		$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{matrix}$
№ п/п	Вигляд графу Γ	ІУМПП
1		$\begin{matrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{matrix}$
2		$\begin{matrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}$
3		$\begin{matrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{matrix}$

Таблиця 2

реальна матриця		$\begin{array}{c c c c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & -3 & -3 & -2 \\ \hline 3 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 3 & -1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}$			
№ п/п	Вигляд графу Г	ІУМПП	№ п/п	Вигляд графу Г	ІУМПП
1		$\begin{array}{c c c c} 0 & -3 & -3 & -2 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$	10		$\begin{array}{c c c c} 0 & -3 & -4 & -2 \\ \hline 3 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}$
2		$\begin{array}{c c c c} 0 & -3 & -3 & -4 \\ \hline 3 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}$	11		$\begin{array}{c c c c} 0 & -3 & -6 & -4 \\ \hline 3 & 0 & -3 & -1 \\ \hline 6 & 3 & 0 & 2 \\ \hline 4 & 1 & -2 & 0 \end{array}$
3		$\begin{array}{c c c c} 0 & -3 & -3 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$	12		$\begin{array}{c c c c} 0 & -1 & -3 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$
4		$\begin{array}{c c c c} 0 & -3 & -2 & -2 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}$	13		$\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & -3 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -3 & -1 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$
5		$\begin{array}{c c c c} 0 & -3 & -2 & -4 \\ \hline 3 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 2 & -1 & 0 & -2 \\ \hline 4 & 1 & 2 & 0 \end{array}$	14		$\begin{array}{c c c c} 0 & -1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}$
6		$\begin{array}{c c c c} 0 & -3 & -2 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}$	15		$\begin{array}{c c c c} 0 & -5 & -4 & -2 \\ \hline 5 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 4 & -1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}$
7		$\begin{array}{c c c c} 0 & -4 & -3 & -2 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$	16		$\begin{array}{c c c c} 0 & -1 & -4 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -3 & -1 \\ \hline 4 & 3 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}$
8		$\begin{array}{c c c c} 0 & -4 & -3 & -5 \\ \hline 4 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 3 & -1 & 0 & -2 \\ \hline 5 & 1 & 2 & 0 \end{array}$			
9		$\begin{array}{c c c c} 0 & -4 & -3 & -1 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 3 & -1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}$			

5-й крок — для визначення усереднених значень ваг альтернатив знаходяться середні арифметичні значення добутоків, отриманих на 4-му кроці.

Експериментальне дослідження методу було проведене для визначення його основних характеристичних показників. Ціллю дослідження було:

- експериментально підтвердити відсутність реверсу рангів альтернатив;
- виявити ступінь впливу на показники застосування спрощеного алгоритму при порівнянні з методом, представленим у [7];
- виявити ступінь впливу на показники методу ігнорування деякої кількості ІУМПП задля збереження ранжирування.

Результати цього дослідження представлені в табл. 3.

Таблиця 3

Тип парних порівнянь, що застосовувались	Адитивні			Мультиплікативні		
	основний	спрощений	збереження рангів	основний	спрощений	збереження рангів
Властивість алгоритму, що застосовується						
Коефіцієнт узгодженості	0,87113	0,87271	0,87734	0,84530	0,84623	0,84759
МО відносної похибки	0,073928	0,096419	0,095286	0,125754	0,12661	0,128508
МО тривалості визначення відносних ваг	20,09	19,73	19,82	21,56	20,71	20,95
Кількість проведених розрахунків (дослідів)	816	816	816	816	816	816

Висновки, зроблені за результатами дослідження методу

1. При застосуванні запропонованого методу порушення раніше отриманого ранжирування при додаванні деякої альтернативи до множини оцінюваних альтернатив не відбувається.

2. Основні показники досліджуваного методу, який у табл. 3 позначено як «спрощений», не значно (не більше ніж на 2 %) відрізняються від показників методу, представленого в [7] (позначеного «основний»).

3. При застосуванні в досліджуваному методі засобів для збереження рангів (ігнорування при розрахунках ваг деякої кількості сформованих ІУМПП) також не призводить до значного погіршення показників.

Отже, в рамках даної статті запропоновано варіант вирішення проблеми реверсу рангів при застосуванні методів парних порівнянь у випадках, коли вона є критичною в системах підтримки прийняття рішень. Проаналізовано причини виникнення реверсу рангів альтернатив при визначенні їхніх ваг. Запропоновано два окремих способи уникнення реверсу рангів у випадках додавання та виключення деякої альтернативи до/з множини альтернатив, що підлягають оцінюванню. Розроблено метод обчислення усереднених ваг альтернатив на основі матриць парних порівнянь, отриманих від групи експертів, який дозволяє уникнути реверсу рангів при додаванні альтернативи до множини тих, що були розраховані раніше.

1. *Belton V.* On a Shortcoming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies / *V. Belton, T. Gear* // *Omega*. — 1983. — **11**. — P. 228–230.

2. *Dyer J.S.* Remarks on the Analytic Hierarchy Process / *J.S. Dyer* // *Management Sci.* — 1990. — **36**. — P. 249–258.

3. *Kumar N.V., Ganesh L.S.* An Empirical Analysis of the Use of the Analytic Hierarchy Process for Estimating Membership Values in a Fuzzy Set // *Fuzzy Sets and Systems*. — 1996. — **82**. — P. 1–16.

4. *Saaty T.L.* The Analytic Hierarchy Process / *T.L. Saaty* — N.Y.: McGraw-Hill, 1980.

5. *Тоценко В.Г.* О проблеме реверса рангов альтернатив при многокритериальном оценивании / *В.Г. Тоценко* // *Проблемы управления и информатики*. — 2006. — № 3. — С. 65–75.

6. *Циганок В.В.* Комбінаторний алгоритм парних порівнянь зі зворотним зв'язком з експертом / *В.В. Циганок* // *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. — 2000. — Т. 2, № 2. — С. 92–102.

7. *Циганок В.В.* Метод обчислення ваг альтернатив на основі результатів парних порівнянь, проведених групою експертів / *В.В. Циганок* // *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. — 2008. — Т. 10, № 2. — С. 121–127.

Надійшла до редакції 11.07.2008